

层射流的格子 Boltzmann 方法的数值模拟^{*}

李元, 段雅丽, 郭彦, 刘儒勋

(中国科学技术大学 数学系, 合肥 230026)

(周哲玮推荐)

摘要: 通过引入一种格子 Boltzmann 方法的特殊边界处理, 对对称和非对称的层射流进行有效的数值研究, 模拟结果与已有的数值结果非常吻合. 表明了格子 Boltzmann 方法解层射流问题的高效与稳定.

关键词: 格子 Boltzmann 方法; 浅水方程; 层射流

中图分类号: O345; O11 **文献标识码:** A

引 言

格子 Boltzmann 方法(LBM)^[1-3]作为一种高效的现代数值方法, 能灵活、有效地处理带有复杂边界的各种流体问题, 从而进行有效的数值模拟. 格子 Boltzmann 方法基于统计物理, 它描述了宏观层上以简单方式运动的粒子现象. 这些粒子运动的平均效应表现为宏观层上的流体现象. 因为格子 Boltzmann 方法拥有很多优点, 如易于计算, 本质的并行性, 边界处理容易实现等, 最近十多年, 它在各个领域, 特别是复杂流体力学领域^[4-10]里取得了很大的成功.

另一方面, 不可压 Navier-Stokes 方程的积分平均形式——浅水方程, 可以描述很多水动力学问题, 例如: 浅水湖的自由面流动、宽河道流动、河口和粗糙海岸区域上潮汐、水库和明渠流动等. 对一些简化模型进行数值模拟和数值分析, 科学家们可以得到各种复杂浅水波现象的许多重要信息.

对层射流问题, 因为在不同区域上的非线性流动现象的复杂性, 这方面的文献并不多^[11-18]. 天然的流体区域有复杂的边界构造, 它直接影响到内部流体的流动. 内部区域可能会有高梯度的地方, 譬如涡和流动不活跃区域(停滞区域)周围的剪切层. 这样, 以复杂区域上小尺度演变的浅水问题的数值模拟就显得很重要. 到目前还没有对层射流的 LBM 系统研究. 本文给出了对层射流的详细精确的模拟, 并与其他格式的结果相比较, 得到了令人满意结果, 为水动力学研究提供有价值的参考.

1 浅水方程的层射流模型

由于射流本质上等同于二维粘性流, 二维带粘性的浅水方程的张量形式写为

* 收稿日期: 2008-07-19; 修订日期: 2009-03-03

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10771134)

作者简介: 李元(1982—), 男, 江苏人, 博士(联系人. Tel: + 86-551-3601009; E-mail: yuan@mail.ustc.edu.cn).

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F^x(Q)}{\partial x} + \frac{\partial F^y(Q)}{\partial y} - \sqrt{\left[\frac{\partial R^x(Q)}{\partial x} + \frac{\partial R^y(Q)}{\partial y}\right]} = S, \quad (1)$$

其中 Q 是守恒向量, $F^x(Q)$ 和 $F^y(Q)$ 是无粘流通量, $R^x(Q)$ 和 $R^y(Q)$ 是粘性流通量. S 为外力项. $Q, F^x(Q), F^y(Q), R^x(Q), R^y(Q), S$ 有如下形式:

$$Q = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}, \quad F^x(Q) = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huw \end{bmatrix}, \quad F^y(Q) = \begin{bmatrix} hw \\ huw \\ hw + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix},$$

$$R^x(Q) = \begin{bmatrix} 0 \\ hu_x \\ hw_x \end{bmatrix}, \quad R^y(Q) = \begin{bmatrix} 0 \\ hu_y \\ hw_y \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0 \\ -gh(S_{fx} + S_{ox}) + hC_f v \\ -gh(S_{fy} + S_{oy}) - hC_f u \end{bmatrix}.$$

其中 h 是水的高度; u 和 v 分别是 x 和 y 方向沿水深的平均速度; u_x, u_y 和 v_x, v_y 分别是 u, v 在 x 和 y 方向上的微分; $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ 是重力加速度; (S_{fx}, S_{fy}) 表示河底摩擦项, $S_{fx} = u \sqrt{u^2 + v^2} / (hC^2)$, $S_{fy} = v \sqrt{u^2 + v^2} / (hC^2)$, 其中 C 是 Chezy 系数; (S_{ox}, S_{oy}) 是河底坡度项; C_f 是 Coriolis 参数; ν 是动力涡粘系数. 在本篇文章中, 除了最后一个算例, 其他的只考虑 $S = \mathbf{0}$ 的情形.

对射流(见图 2、图 5、图 9、图 12), 边界条件一般有两种, 即固壁边界和开放边界. 这里, 固壁边界采用无滑移条件. 给定垂直于管道方向的速度为 0, 即没有流体穿透边界. 对无滑移的固壁边界, 沿管道方向的速度也为 0. 在我们的试验中, Froude 数 $Fr = \sqrt{(u^2 + v^2) / (gh)} \approx 0.101 < 1$ 属于亚临界流. 对于亚临界流, 入口边界给定流量 $q = hu$, 出口边界给定水高 h .

2 浅水方程的格子 Boltzmann 模型

按照格子 Boltzmann 的理论, 格子 Boltzmann 方法分为两步: 1) 流动步, 即每个粒子沿其所有的速度方向流到其最近的节点; 2) 碰撞步, 即两个粒子到达同一个节点, 发生碰撞后, 按一定的规则交换且改变它们的速度方向. 通常在单松弛时间近似(BGK 假设^[19])下, 这两步可由下面的格子 Boltzmann 方程描述为

$$f_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{e}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) = f_\alpha(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{\tau}(f_\alpha(\mathbf{x}, t) - f_\alpha^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t)), \quad (2)$$

其中, f_α 为粒子的分布函数; f_α^{eq} 为粒子的局部平衡分布函数; Δx 为空间网格步长; Δt 为时间步长; \mathbf{e}_α 为粒子速度; τ 是松弛因子. 事实上, 格子 Boltzmann 方法是时间、空间和速度的全离散方法. 在格子 Boltzmann 模型的计算中, 使用微观变量 $\{f_\alpha, \alpha \in \{0, 1, \dots, N\}\}$ 替代了传统的宏观变量 $\{h, u, v\}$. 它们之间的关系:

$$\sum_\alpha f_\alpha = h, \quad \sum_\alpha f_\alpha e_{\alpha x} = u, \quad \sum_\alpha f_\alpha e_{\alpha y} = v. \quad (3)$$

对 9-速度模型, \mathbf{e}_α 为如下定义的格子速度(图 1):

$$\mathbf{e}_\alpha = (e_{\alpha x}, e_{\alpha y}) = \begin{cases} (0, 0), & \alpha = 0, \\ c \left[\cos\left(\frac{\alpha-1}{2}\pi\right), \sin\left(\frac{\alpha-1}{2}\pi\right) \right], & \alpha = 1, 2, 3, 4, \\ \sqrt{2}c \left[\cos\left(\frac{\alpha-1}{2}\pi\right), \sin\left(\frac{\alpha-1}{2}\pi\right) \right], & \alpha = 5, 6, 7, 8, \end{cases} \quad (4)$$

其中 c 是当地声速. 这里, 如果平衡分布函数取为 Maxwell 分布的离散近似, 那么通过推导, 格

子 Boltzmann 方程对应的宏观方程只能是 Navier-Stokes 方程. 这严重限制了方法所能模拟方程的种类. 一种有效的变通方法是, 先假定平衡分布函数有如下依赖于宏观速度阶次的形式^[20]:

$$f_{\alpha}^{eq} = A_{\alpha} + B_{\alpha}(e_{\alpha x}u + e_{\alpha y}v) + C_{\alpha}(e_{\alpha x}u + e_{\alpha y}v)^2 + D_{\alpha}(u^2 + v^2). \quad (5)$$

因为平衡分布函数有与格子速度相同的对称性, 故有

$$\begin{cases} A_i = A, & \text{对 } i \in \{1, 2, 3, 4\}, \\ A_j = \tilde{A}, & \text{对 } j \in \{5, 6, 7, 8\}. \end{cases} \quad (6)$$

对 $B_{\alpha}, C_{\alpha}, D_{\alpha}$ 有类似的形式. 由此, (5) 式可重新写成

$$f_{\alpha}^{eq} = \begin{cases} A_0 + D_0(u^2 + v^2), & \alpha = 0, \\ A + B(e_{\alpha x}u + e_{\alpha y}v) + C(e_{\alpha x}u + e_{\alpha y}v)^2 + D(u^2 + v^2), & \alpha = 1, 2, 3, 4, \\ \tilde{A} + \tilde{B}(e_{\alpha x}u + e_{\alpha y}v) + \tilde{C}(e_{\alpha x}u + e_{\alpha y}v)^2 + \tilde{D}(u^2 + v^2), & \alpha = 5, 6, 7, 8. \end{cases} \quad (7)$$

Zhou^[6]通过推导得出了系数, 并证明了格子 Boltzmann 方程与所对应的宏观浅水方程之间只有一阶精度. 相应的平衡分布函数为

$$f_{\alpha}^{eq} = \begin{cases} h - \frac{5gh^2}{6c^2} - \frac{2h}{3c^2}(u^2 + v^2), & \alpha = 0, \\ \frac{gh^2}{6c^2} + \frac{h}{3c^2}(e_{\alpha x}u + e_{\alpha y}v) + \frac{h}{2c^4}(e_{\alpha x}u + e_{\alpha y}v)^2 - \frac{h}{6e^2}(u^2 + v^2), & \alpha = 1, 2, 3, 4, \\ \frac{gh^2}{24c^2} + \frac{h}{12c^2}(e_{\alpha x}u + e_{\alpha y}v) + \frac{h}{8c^4}(e_{\alpha x}u + e_{\alpha y}v)^2 - \frac{h}{24e^2}(u^2 + v^2), & \alpha = 5, 6, 7, 8. \end{cases} \quad (8)$$

刘峰等^[9]也得到了相同的结果, 虽然他们的分布函数在格式上稍有差别. 在本篇文章里, 我们将使用 Zhou 的格式^[6]来进行数值模拟.

3 数值模拟

本节通过使用 LB 方法求解几个数值问题, 展示了 LB 方法如何处理对称和非对称射流. 通过与其他方法的数值结果比较, 进一步证实了 LB 方法的有效与稳定.

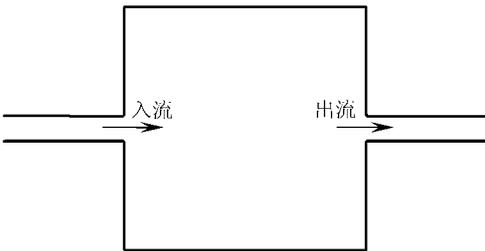


图 2 方腔射流区域的几何形状

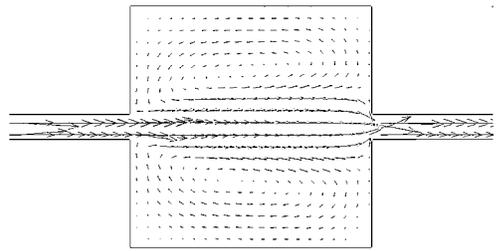


图 3 方腔射流的速度矢量图

3.1 方腔射流

首先考虑方腔射流. 因为它几何简单, 边界处理变得很容易. 取中间水库为 $1.5 \text{ m} \times 1.5 \text{ m}$ 的正方形. 水库的入口和出口都是细窄的河道, 宽度为 0.156 m (见图 2). 水库的入口处有锐

利的边界, 入流在这里对称地产生两个涡旋, 具体的流动特征依赖于入流的 Reynolds 数. 这里采用无滑移边界条件, 涡粘系数为 $\nu = 7.84 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$, 给定初边值条件如下:

$$h(x, y, 0) = 0.1 \text{ m}, \quad u(x, y, 0) = 0.0 \text{ m/s}, \quad v(x, y, 0) = 0.0 \text{ m/s}. \quad (9)$$

$$q(-1.5, y, t) = 0.01 \text{ m/s}, \quad v(-1.5, y, t) = 0.0 \text{ m/s}; \quad (10)$$

$$h(1.5, y, t) = 0.1 \text{ m/s}, \quad v(1.5, y, t) = 0.0 \text{ m/s}. \quad (11)$$

在这里, 由于计算区域的对称性, 结合下面的对称边界条件, 计算上半区域即可.

$$\left. \frac{\partial h}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{y=0} = 0. \quad (12)$$

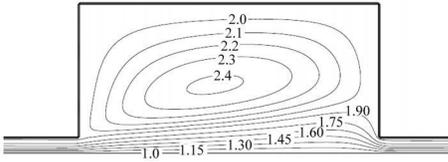


图 4 方腔射流上半区域的流线图

计算中取 $\Delta x = 0.012 \text{ m}$, $\Delta t = 0.006 \text{ s}$, $c = \Delta x / \Delta t = 2 \text{ m/s}$ 及 $\tau = 3\nu\Delta t / c^2 + 1/2 = 0.6176$. 入口和出口处的处理使用压力-速度边界格式^[21]. 广泛应用在格子 Boltzmann 方法中的反弹格式^[22-23], 则应用于无滑移边界的处理.

在入口边界处, 当碰撞步和滑移步完成时, 有 3 个分布函数 $\{f_\alpha, \alpha \in \{1, 5, 8\}\}$ 是未知的. 假定 $f_1 - f_3 = f_1^{\text{eq}} - f_3^{\text{eq}}$, 由(3)式、(8)式和(10)式, 可得到在入口边界处的 3 个未知的分布函数 $\{f_\alpha, \alpha \in \{1, 5, 8\}\}$ 的表达形式

$$h = f_0 + f_2 + f_4 + 2(f_1 + f_5 + f_8) + q, \quad f_1 = f_3 + 2q / (3c),$$

$$f_5 = f_7 - (f_2 - f_4) / 2 + q / 6, \quad f_8 = f_6 + (f_2 - f_4) / 2 + q / 6.$$

在出口边界处, 同样的, 有 3 个未知的分布函数 $\{f_\alpha, \alpha \in \{3, 6, 7\}\}$. 假定 $f_1 - f_3 = f_1^{\text{eq}} - f_3^{\text{eq}}$, 由(3)式、(8)式和(11)式, 可得到相应的表达形式^[21]:

$$q = \frac{1}{1+u} [f_0 + f_2 + f_4 + 2(f_1 + f_5 + f_8)], \quad f_3 = f_1 - \frac{2}{3c}q,$$

$$f_6 = f_8 - \frac{1}{2}(f_2 - f_4) - \frac{1}{6}hu, \quad f_7 = f_5 + \frac{1}{2}(f_2 - f_4) - \frac{1}{6}hu.$$

图 3 和图 4 分别为方腔射流在稳定状态时, 上半区域的速度矢量和带标注值的流函数等高线图. 这与我们的分析结果是一致的.

3.2 圆腔射流

将前一射流中的方腔换成圆腔, 即得到另一个例子(见图 5). 这个例子与上一个相比有些不同, 因为几何形状的改变, 它的固壁边界为曲边, 处理变得复杂了. 这里, 取圆腔的半径为 $R = 0.75 \text{ m}$, 水库入口与出口弧角均为 $\pi/15 \text{ rad}$, 粘性为 $\nu = 7.84 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$. 固壁边界采用无滑移条件, 初边值采用与上一算例相同的取法. 取 $\Delta x = 0.012 \text{ m}$, $\Delta t = 0.006 \text{ s}$, $c = \Delta x / \Delta t = 2 \text{ m/s}$, $\tau = 0.6176$.

在直边界和曲边交界的角点处, 边界处理有些麻烦, 这里采用了一个特别的处理方法. 一般来说, 在直边界上使用反弹格式^[22-23], 在曲边边界上使用 Mei 的格式^[24], 但这样子很难在它们交界的角点处找到合适的格式. 在这里, 我们把直边和曲边看作一个整体, 也就是说, 直边界作为一段特殊的曲边边界. 这样, 4 个角点就会成为曲边的一部分, 而不用单独设计格式来处理. 结果显示这样处理可以使整个格式收敛, 并迅速达到稳定状态.

达到稳定状态时的速度向量见图 6, 上半区域的流线见图 7, 而图 8 是由有限体积与有限元混合方法^[18]得到的流线图. 由图可见, 达到稳态时在入流和出流之间射流两侧产生两个方向相反的回流域(涡流域). 通过数值比较可见, 两种数值结果流函数等高线图非常一致. 与此同时, 一些不同大小的圆形水库在此情形下的类似的流线图可参见文献[16-18].

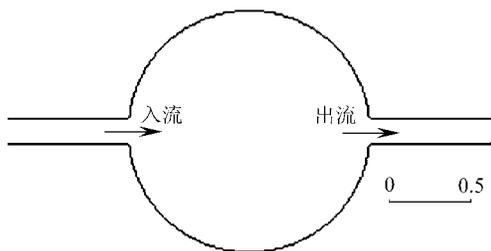


图 5 对称的圆腔射流的几何形状

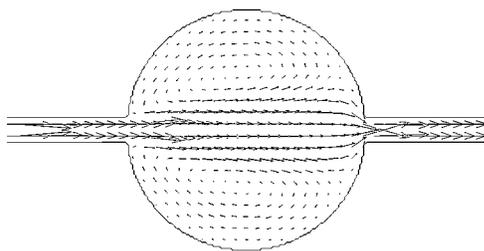


图 6 对称的圆腔射流的速度矢量图

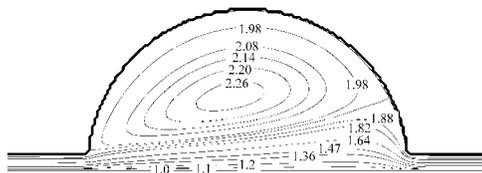


图 7 对称的圆腔射流的流线图

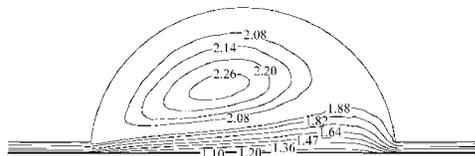


图 8 文献[18]中对称的圆腔射流的流线图

对非对称圆腔射流^[2], 取半径 $R = 1\text{ m}$. 水库入口与出口的弧角均为 $\pi/16\text{ rad}$, 它们中心线的夹角为 $7\pi/8\text{ rad}$. 水库的几何形状如图 9 所示. 本问题的初边值条件与前一个例子类似, 但因为出口边界上垂直于河道的速度分量的表示不同, 所以出口边界的边界条件为 $-u\sin(\pi/8) + v\cos(\pi/8) = 0.0\text{ m/s}$, 此时, 出口边界处理相应地改变为

$$u = \frac{1}{h}[f_0 + f_2 + f_4 + 2(f_1 + f_5 + f_8)] - 1, \quad v = u \tan\left(\frac{\pi}{8}\right),$$

$$f_3 = f_1 - \frac{2}{3c}q, \quad f_6 = f_8 - \frac{1}{2}(f_2 - f_4) + \frac{1}{2}hv - \frac{1}{6}hu,$$

$$f_7 = f_5 + \frac{1}{2}(f_2 - f_4) - \frac{1}{2}hv - \frac{1}{6}hu.$$

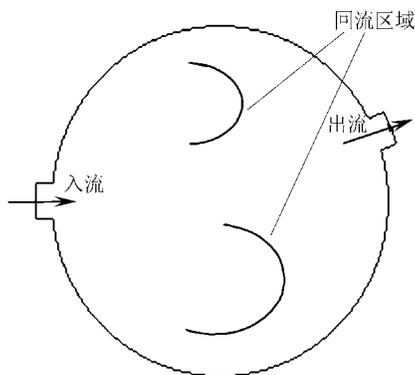


图 9 非对称的圆腔射流的几何形状

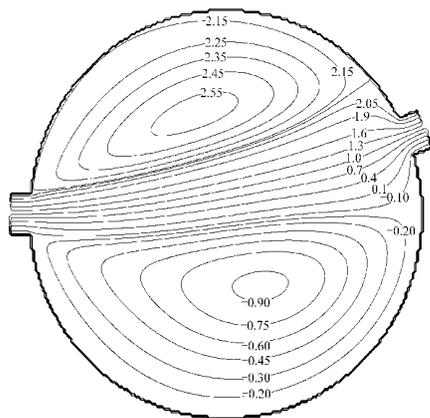


图 10 非对称的圆腔射流的速度矢量图

图 11(a)~(d) 展示了射流的演化过程. 在开始的时候, 在水库入口处对称地产生, 流卷出两个方向相反的涡, 随着时间的推进, 在剪切层的作用下, 涡开始变化发展为不同的形态. 由于旋涡顺时针方向旋转的循环在较低的涡旋, 所以在计算中低涡的强度不断增加. 经过 7 000 步后达到稳定态. 稳定态时流函数等高线和速度矢量图为图 10 和图 11(d).

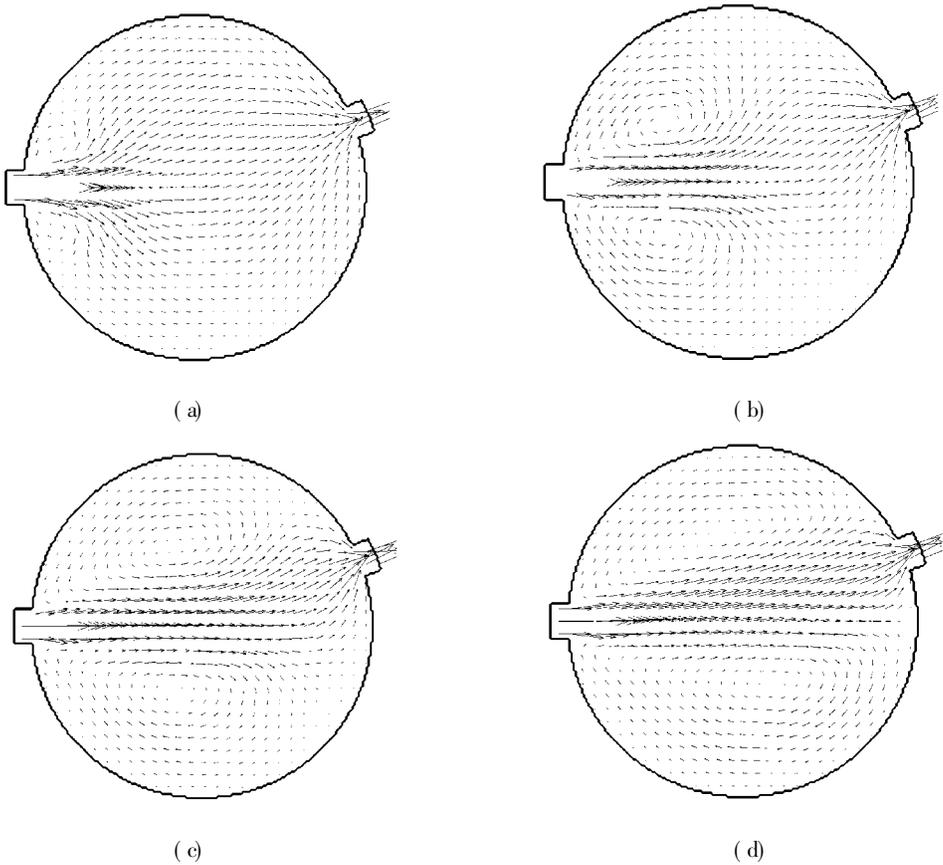


图 11 非对称的圆腔射流中射流的演化过程

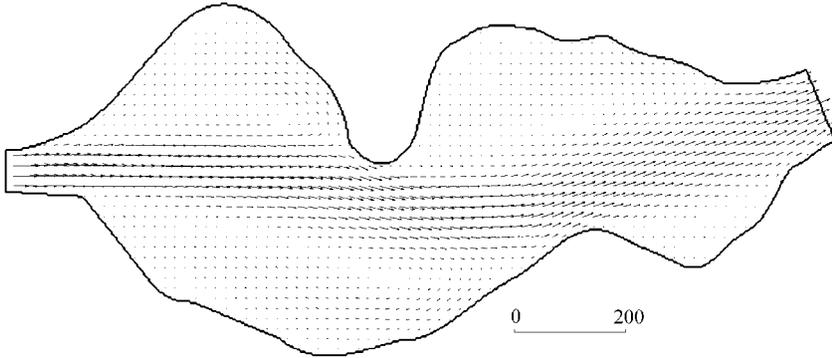


图 12 $v = 0.5 \text{ m}^2/\text{s}$ 时不规则边界河道的速度矢量图

3.3 不规则边界的河道

最后一小节通过一不规则任意边界的河道来展示 LB 方法模拟射流问题的通用性. 为了模拟大尺度的射流现象, 这一小节模拟一条 1.5 km 长的河道. 在狭窄入口处的速度设为 0.5 m/s , 河道中水高设为 2 m , 在整个河道上, Chezy 粗糙系数为 $45 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$, 对 Coriolis 力项, 取北纬 55° 上的 Coriolis 参数 $f_c = 1.19 \times 10^{-4}$.

在计算中, 取 $\Delta x = 10 \text{ m}$, $\Delta t = 1 \text{ s}$, $c = \Delta x / \Delta t = 10 \text{ m/s}$. 影响涡旋特征的涡粘系数决定了次要流体现象(涡旋) 的尺寸和强度. 图 12、图 13 分别是涡粘系数 $\nu = 0.5 \text{ m}^2/\text{s}$, $\nu = 1.0 \text{ m}^2/\text{s}$

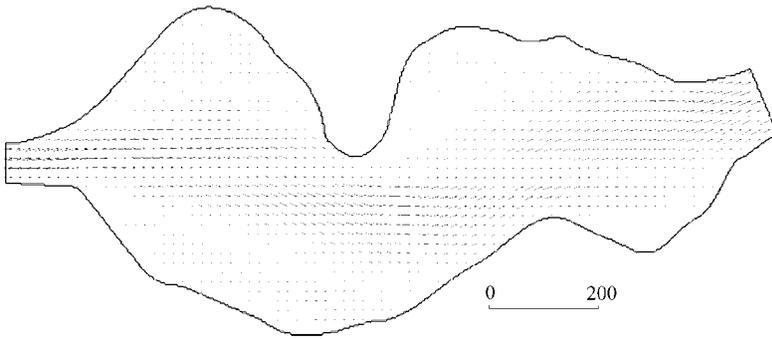


图 13 $v = 1.0 \text{ m}^2/\text{s}$ 时不规则边界河道的速度矢量图

时稳定状态下速度的矢量图。从图上很容易看出, 涡粘系数的大小对河道中涡旋有显著的影响。例如, 涡粘系数 $1.0 \text{ m}^2/\text{s}$ 时, 意味着下面的涡旋会弱一些, 并在下游 200 m 的地方开始出现分流。而对于涡粘系数为 $0.5 \text{ m}^2/\text{s}$ 的情形, 下面的回旋会明显一些, 并在下游 350 m 的地方出现分流。回旋涡的大小与入流速度的衰减有紧密的联系。结果显示 LB 方法在不规则边界的情形下对射流有很好的模拟效果。

4 结 论

本文通过一种特殊的边界处理使用 LB 方法求解方形水库、圆形水库及不规则几何边界水库的层射流问题。通过比较, 我们的数值结果与已有结果非常一致。显示了 LB 方法在处理多种形状的层射流及类似的问题上具有很大的潜力。

致谢 感谢中国科学技术大学青年科学基金的资助。

[参 考 文 献]

- [1] Benzi R, Succi S, Vergassola M. The lattice Boltzmann equation: theory and applications[J]. Physics Reports-Review Section of Physics Letters, 1992, **222**(3): 145-197.
- [2] Qian Y H, Dhumieres D, Lallemand P. Lattice BGK models for Navier-Stokes equation[J]. Europhysics Letters, 1992, **17**(6): 479-484.
- [3] Chen S, Doolen G D. Lattice Boltzmann method for fluid flows[J]. Annual Review of Fluid Mechanics, 1998, **30**: 329-364.
- [4] DUAN Ya-li, LIU Ru-xun. Lattice Boltzmann model for two-dimensional unsteady Burgers' equation[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2007, **206**(1): 432-439.
- [5] Duan Y L, Liu R X. Lattice Boltzmann simulations of triangular cavity flow and free-surface problems[J]. Journal of Hydrodynamics, Ser B, 2007, **19**(2): 127-134.
- [6] Zhou J G. A lattice Boltzmann model for the shallow water equations[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2002, **191**(32): 3527-3539.
- [7] Zhou J G. A Lattice Boltzmann model for the shallow water equations with turbulence modeling[J]. International Journal of Modern Physics C, 2002, **13**(8): 1135-1150.
- [8] Zhou J G. An elastic-collision scheme for lattice Boltzmann methods[J]. International Journal of Modern Physics C, 2001, **12**(3): 387-401.
- [9] 刘峰, 胡非. 浅水动力学的格子 Boltzmann 模拟[J]. 海洋与湖沼, 2004, **35**(1): 35-40.
- [10] Thiémes G, Seefeld M, Banda M K. Lattice Boltzmann methods for shallow water flow applications[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2007, **55**(7): 673-692.

- [11] Dennis S C R. Application of the series truncation method to two-dimensional internal flows[A]. In: *Proc 4th Internat Conf in Numerical Methods in Fluid Dynamics*[C]. New York: Springer, 1974, 146-151.
- [12] Borthwick A G L, Barber R W. River and reservoir modeling using the transformed shallow water equations [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1992, **14**(10): 1193-1217.
- [13] Vreugdenhil M J, Wijnnga J H A. Computation of flow patterns in rivers[J]. *Journal of Hydraulic Division, Proc ASCE*, 1982, **108**(11): 1296-1310.
- [14] Borthwick A G L, Barber R W. Numerical simulation of jet-forced flow in a circular reservoir using discrete and random vortex methods[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1992, **14**(12): 1453-1472.
- [15] Anastasiou K, Chan C T. Solution of the 2D shallow water equations using the finite volume method on unstructured triangular meshes[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1997, **24**(11): 1225-1245.
- [16] Rogers B, Fujihara M, Borthwick A G L. Adaptive Q-tree Godunov-type scheme for shallow water equations [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2001, **35**(3): 247-280.
- [17] Aizinger V, Dawson C. A discontinuous Galerkin method for two-dimensional flow and transport in shallow water[J]. *Adv Water Resour*, 2002, **25**(1): 67-84.
- [18] WANG Ji-wen, LIU Ru-xun. Combined finite volume-finite element method for shallow water equations[J]. *Computers and Fluids*, 2005, **34**(10): 1199-1222.
- [19] Bhatnagar P, Gross E, Krook M. A model for collision processes in gas—I: small amplitude processes in charged and neutral one-component system[J]. *Phys Rev*, 1954, **94**(3): 511-525.
- [20] Rothmann D H, Zaleski S. *Lattice-Gas Cellular Automata*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- [21] Zou Q S, He X Y. On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model[J]. *Physics of Fluids*, 1997, **9**(6): 1591-1598.
- [22] Behrend O. Solid-fluid boundaries in particle suspension simulations via the Boltzmann method[J]. *Physical Review E*, 1995, **52**(1): 1164-1175.
- [23] Ladd A J C, Verberg R. Lattice Boltzmann simulations of particle-fluid suspensions[J]. *Journal of Statistical Physics*, 2001, **104**(5/6): 1191-1251.
- [24] Mei R W, Luo L S, Shyy W. An accurate curved boundary treatment in the lattice Boltzmann method[J]. *Journal of Computational Physics*, 1999, **155**(2): 307-330.

Numerical Simulation of Laminar Jet-Forced Flow Using a Lattice Boltzmann Method

LI Yuan, DUAN Ya-li, GUO Yan, LIU Ru-xun

(Department of Mathematics, University of Science and Technology of China,
Hefei 230026, P. R. China)

Abstract: A numerical study on symmetrical and asymmetrical laminar jet-forced flows was presented by a lattice Boltzmann Method (LBM) with a special boundary treatment. The simulation results are in very good agreement with the available numerical prediction. It is shown that the LBM is a very competitive method for laminar jet-forced flow in terms of computational efficiency and stability.

Key words: lattice Boltzmann method; shallow water equations; laminar jet-forced flow