应用数学和力学,第 24 卷 第 12 期(2003 年 12 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2003) 12_1231_07

平面弹性力学问题等价的间接变量边界积分方程*

张耀明[1], 温卫东[1], 张作泉[2], 孙焕纯[3], 吕和祥[3]

(1. 南京航空航天大学 能源与动力学院, 南京 210016;
2. 北方交通大学 数理学院, 北京 100044;
3. 大连理工大学 力学系, 大连 116023)

(我刊编委吕和祥、孙焕纯来稿)

摘要: 用变分法确立平面弹性力学外边值问题的确切形式• 在此基础之上, 导出外边值问题的等价的间接变量边界积分方程• 一些实例表明传统的惯用的直接变量边界积分方程与原边值问题是不等价的•

关 键 词: 变分法; 外边值问题; 等价的边界积分方程
中图分类号: O342 文献标识码: A

引 言

用边界元法解弹性力学问题已有很久的历史了[1~2]• 然而, 等价的边界积分方程, 即边界积分方程与原边值问题的等价性问题的研究, 一直未得到很好的解决• 传统的边界积分方程不是等价的, 本文对此进行了深入的讨论• 我们发现要研究等价的边界积分, 首先必须明确边值问题的确切形式• 对于内边值问题, 由控制微分方程和边界条件就可确定边值问题的惟一解; 然而, 外边值问题的情形就不同了[1~2], 仅由控制微分方程和边界条件不足以保证边值问题解的惟一确定性, 还必须对解在无限远处的性态进行适当的限制• 为此, 本文首先使用变分法证明外边值问题的确切形式• 在此基础之上, 用非解析开拓数学方法得出了任意区域内的位移向量函数的一个边界积分表示式, 这个表示式中有一个边界函数和两个常数, 它们与位移向量函数之间一一对应关系, 然后通过极限方法得出原边值问题的等价的间接变量边界积分方程•

1 概念及基本定理

本文假定 Ω 是平面内的有界区域, $\Gamma = \partial\Omega$ 是其边界, $\Omega_c = R^2 - (\Omega \cup \Gamma)$ 是区域 Ω 的补域• 平面弹性力学问题的控制微分方程[1~2]为(体力项为零)

$$\boldsymbol{Au} = [\mu\Delta + (\lambda + \mu)\,\mathrm{grad\,div}]\,\boldsymbol{u} = \mathbf{0}, \tag{1}$$

分量形式为: $(\boldsymbol{Au})_i = \lambda u_{k,ki} + \mu(u_{i,jj} + u_{j,ij}) = 0$• 式中 μ 为材料的剪切弹性模量, λ 为拉梅

---

* 收稿日期: 2001_12_10; 修订日期: 2003_07_04
作者简介: 张耀明(1962—), 男, 山西五寨人, 教授, 博士(E_mail: gsdzy@nuaa.edu.cn).

常数。基本解 $u^*_{ik}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 满足方程

$$\lambda u^*_{il,lk}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\mu[u^*_{ik,jj}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+u^*_{ij,kj}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]=-\delta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\delta_{ik}\quad (i,j,k=1,2)。\tag{2}$$

平面应变时的基本解和与基本解对应的表面力为[1~2]

$$u^*_{ik}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\frac{k_0}{2\mu}[-k_1\ln r\delta_{ik}+r_{,i}r_{,k}],\tag{3}$$

$$p^*_{ik}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=-\frac{k_0}{r}\left\{\frac{\partial r}{\partial \boldsymbol{n}}[k_2\delta_{ik}+2r_{,i}r_{,k}]-k_2(r_{,i}n_k-r_{,k}n_i)\right\},\tag{4}$$

这里　$k_0=1/(4\pi(1-\nu))$, $k_1=3-4\nu$, $k_2=1-2\nu$。

定理 1　假设 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2)$ 是区域 Ω 上的满足控制微分方程(1)的位移函数, 那么

$$\int_\Gamma p_i(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\Gamma_x=0\quad (i=1,2),\quad \int_\Gamma[x_1p_2(\boldsymbol{x})-x_2p_1(\boldsymbol{x})]\mathrm{d}\Gamma_x=0,$$

这里　$p_i(\boldsymbol{x})=\lambda u_{k,k}(\boldsymbol{x})n_i(\boldsymbol{x})+\mu[u_{i,j}(\boldsymbol{x})n_j(\boldsymbol{x})+u_{j,i}(\boldsymbol{x})n_j(\boldsymbol{x})]$。

定理 2　假设 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2)$ 是区域 Ω_c 上的满足控制微分方程(1)的位移函数, 且当 $\boldsymbol{x}\to\infty$ 时, 满足 $u_i(\boldsymbol{x})=\lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty}C_i$($C_i$ 是常数), 那么有

$$\int_\Gamma p_k(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\Gamma_x=0\quad (k=1,2)。\tag{5}$$

证明　以原点为圆心, R 为半径作圆域 $B_R(0)$, 简记为 B_R, 并使 $B_R(0)\supset\Omega$。令 $\Omega=\Omega_c\cap B_R$, 在区域 Ω 上, 将位移函数 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2)$ 分别与函数 $v'=(1,0)$ 和 $v''=(0,1)$ 应用 Betty 互等定理(或直接的推导), 可得

$$\int_\Gamma p_k(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\Gamma_x=\int_{\partial B_R}p_k(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\Gamma_x\quad (k=1,2)。\tag{6}$$

当 $R\to\infty$ 时, 在 ∂B_R 上有 $p_k(\boldsymbol{x})=o(1/R)$, 于是

$$\int_{\partial B_R}p_k(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\Gamma_x\to 0\quad (k=1,2)。\tag{7}$$

将式(7)代入式(6), 即证得式(5)。

定理 3　若 $\phi_k(\boldsymbol{x})$ $(k=1,2)$ 为 Γ 上的可积函数, 那么由基本解(3)定义的下列函数

$$U_i(\boldsymbol{y})=\int_\Gamma\phi_k(\boldsymbol{x})u^*_{ik}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mathrm{d}\Gamma_x\quad (i=1,2),\tag{8}$$

当 $\boldsymbol{y}\to\infty$ 时, $U_i(\boldsymbol{y})\to 0$ 当且仅当条件 $\int_\Gamma\phi_k(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\Gamma_x=0$ $(k=1,2)$ 成立。

证明　当 $i=1$ 时, 由基本解式(3)可知

$$\phi_k(\boldsymbol{x})u^*_{1k}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\frac{k_0}{2\mu}[-k_1\phi_1(\boldsymbol{x})\ln r+\phi_1(\boldsymbol{x})r^2_{,1}+\phi_2(\boldsymbol{x})r_{,1}r_{,2}],$$

其中　$r=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$, $r_{,1}=\dfrac{x_1-y_1}{r}$, $r_{,2}=\dfrac{x_2-y_2}{r}$。

由于当 $\boldsymbol{y}\to\infty$ 时

$$\ln r=\ln|\boldsymbol{y}|+\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{y}|^2}+\frac{|\boldsymbol{x}|^2}{|\boldsymbol{y}|^2}\right)=$$
$$\ln|\boldsymbol{y}|-\frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{y}|^2}+\frac{|\boldsymbol{x}|^2}{2|\boldsymbol{y}|^2}+o\left(\frac{1}{|\boldsymbol{y}|}\right),$$

所以

$$U_1(\boldsymbol{y})=\int_\Gamma\phi_k(\boldsymbol{x})u^*_{1k}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mathrm{d}\Gamma_x=$$

$$-\frac{k_0k_1}{2\mu}\ln|\boldsymbol{y}|\int_\Gamma\phi_1(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\Gamma_x+\frac{k_0k_1}{2\mu|\boldsymbol{y}|^2}\int_\Gamma\phi_1(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\Gamma_x+o\left(\frac{1}{|\boldsymbol{y}|}\right)+$$
$$\frac{k_0}{2\mu}\int_\Gamma\phi_1(\boldsymbol{x})\left[\frac{(x_1-y_1)^2}{r^2}-\frac{y_1^2}{y_1^2+y_2^2}\right]\mathrm{d}\Gamma_x+\frac{k_0}{2\mu}\frac{y_1^2}{y_1^2+y_2^2}\int_\Gamma\phi_1(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\Gamma_x+$$
$$\frac{k_0}{2\mu}\int_\Gamma\phi_2(\boldsymbol{x})\left[\frac{(x_1-y_1)(x_2-y_2)}{r^2}-\frac{y_1y_2}{y_1^2+y_2^2}\right]\mathrm{d}\Gamma_x+$$
$$\frac{k_0}{2\mu}\frac{y_1y_2}{y_1^2+y_2^2}\int_\Gamma\phi_2(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\Gamma_x\cdot \tag{9}$$

当 $\boldsymbol{y}\to\infty$ 时

$$\frac{(x_1-y_1)^2}{r^2}-\frac{y_1^2}{y_1^2+y_2^2}\to 0,\quad \frac{(x_1-y_1)(x_2-y_2)}{r^2}-\frac{y_1y_2}{y_1^2+y_2^2}\to 0,$$

因此当 $\boldsymbol{y}\to\infty$ 时，$U_1(\boldsymbol{y})\to 0\Leftrightarrow\int_\Gamma\phi_k(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\Gamma_x=0\ (k=1,2)$. 同理可证 $i=2$ 的情形.

2 外域 Ω_c 上边值问题的确切形式

采用变分法[2~5]证明无界区域 Ω_c 上的边值问题的确切形式. 为此引入 Hilbert 空间

$$W(\Omega_c)=\left\{\boldsymbol{u}=(u_1,u_2)\mid u_i\in W_0^1(\Omega_c)\right\}\text{ 及 }\mathring{W}(\Omega_c)=\left\{\boldsymbol{u}\in W(\Omega_c);\boldsymbol{u}|_\Gamma=\boldsymbol{0}\right\},$$

其中

$$W_0^1(\Omega_c)=\left\{u\in D'(\Omega_c);\frac{u}{\sqrt{1+r^2}\ln(2+r^2)}\in L^2(\Omega_c),\ \frac{\partial u}{\partial x_i}\in L^2(\Omega_c),\ i=1,2,\ r=\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right\}.$$

$\mathring{W}(\Omega_c)$ 上的内积是 $(\omega,\upsilon)_{\mathring{W}}=(\omega_1,\upsilon_1)_{W_0^1}+(\omega_2,\upsilon_2)_{W_0^1}$, 故范数 $\|\upsilon\|_{\mathring{W}}=\|\upsilon_1\|_{W_0^1}+\|\upsilon_2\|_{W_0^1}$.

若 $\boldsymbol{u}_0\in(H^{1/2}(\Gamma))^2$, 根据迹定理, 存在一个具有紧支集的向量函数 $\mathscr{R}\boldsymbol{u}_0\in W(\Omega_c)$, 使得 $\mathscr{R}\boldsymbol{u}_0|_\Gamma=\boldsymbol{u}_0$, 令 $\omega=\boldsymbol{u}-\mathscr{R}\boldsymbol{u}_0$, 则 ω 满足齐次边界条件.

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}\omega=-\boldsymbol{A}(\mathscr{R}\boldsymbol{u}_0), & \text{在 }\Omega_c\text{ 内},\\ \omega|_\Gamma=\boldsymbol{0}, & \text{在 }\Gamma\text{ 上}.\end{cases} \tag{10}$$

上述问题等价于变分方程

$$D(\omega,\upsilon)=-D(\mathscr{R}\boldsymbol{u}_0,\upsilon),\qquad\forall\upsilon\in\mathring{W}(\Omega_c),$$

其中 $$D(\omega,\upsilon)=\int_{\Omega_c}[\lambda\varepsilon_{kk}(\omega)\varepsilon_{ll}(\upsilon)+2\mu\varepsilon_{ij}(\omega)\varepsilon_{ij}(\upsilon)]\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

由 Cauchy_Schwarz 不等式, 不难验证 $D(\omega,\upsilon)$ 是 $\mathring{W}(\Omega_c)$ 上的有界双线性形式, $D(\mathscr{R}\boldsymbol{u}_0,\upsilon)$ 是 $\mathring{W}(\Omega_c)$ 上的有界线性泛函. 利用 Korn 不等式[4~5]

$$C\int_{\Omega_c}\varepsilon_{ij}(\upsilon)\varepsilon_{ij}(\upsilon)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\geqslant\|\upsilon\|_{\mathring{W}}^2\qquad(C>0\text{是常数})$$

可得

$$D(\upsilon,\upsilon)\geqslant 2\mu\int_{\Omega_c}\varepsilon_{ij}(\upsilon)\varepsilon_{ij}(\upsilon)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\geqslant\|\upsilon\|_{\mathring{W}}^2,$$

即 $D(\omega,\upsilon)$ 是 $\mathring{W}(\Omega_c)$ 上正定双线性形式. 应用 Lax_Milgram 定理[4], 边值问题(10)在空间

$W(\Omega_c)$ 中的广义解存在惟一•

由于 $(-x_2, x_1) \notin W(\Omega_c)$, 所以在无应变情形下, 仅存在刚体平移, 即 $\mathscr{R} = \left\{ C_1, C_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbf{R} \right\}$[2]• 对 $u_i(\boldsymbol{x}) \in W_0^1(\Omega_c)$, 当 $\boldsymbol{x} \to \infty$ 时, $u_i(\boldsymbol{x}) = o(\ln r)$• 进而, 由位移向量的解析表示式可知, 在 ∞ 处, $u_i(\boldsymbol{x}) = C_i + O(1/r)$ (C_i 是常数)• 因此第一外边值问题的合理形式是

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^{c} = \boldsymbol{0}, & \text{在 } \Omega_c \text{ 内}, \\ \boldsymbol{u}^{c} \mid_{\Gamma} = \boldsymbol{u}_0, & \text{在 } \Gamma \text{ 上}, \\ u_i^{c}(\boldsymbol{x}) \to C_i + O(1/r), & \text{在 } \infty \text{ 处} \bullet \end{cases} \tag{11}$$

3 位移函数的边界积分表示

首先我们就 Ω 为单连通区域和体力项为零情形下进行讨论• 现在将 Ω 上的位移函数非解析开拓到补域 $\Omega_c = R^2 - (\Omega \cup \Gamma)$ 中去, 在 Ω_c 中如下确定一个位移向量函数

$$\begin{cases} \text{在 } \Omega_c \text{ 内:} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^{c} = \boldsymbol{0}, \\ \text{在 } \Gamma \text{ 上:} & u_i^{+} = u_i^{-}, \\ \text{在 } \infty \text{ 处:} & u_i^{c} = C_i + O(1/r), \end{cases} \tag{12}$$

这里 $u_i^{+}(\boldsymbol{y}) = \lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{x} \in \Omega_c}} u_i^{c}(\boldsymbol{x})$, $u_i^{-}(\boldsymbol{y}) = \lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{x} \in \Omega}} u_i(\boldsymbol{x})$• 为了叙述方便, 引入特征函数

$$S(\boldsymbol{y}) = \begin{cases} 1, & \boldsymbol{y} \in \Omega, \\ 0, & \boldsymbol{y} \in \Omega_c; \end{cases} \quad S^{c}(\boldsymbol{y}) = \begin{cases} 0, & \boldsymbol{y} \in \Omega, \\ 1, & \boldsymbol{y} \in \Omega_c \bullet \end{cases}$$

在区域 Ω 上, 一种状态取 $(X'_k, u'_k, p'_k) = (0, u_k^{-}, p_k^{-})$, 另一种状态对应 Kelvin 问题的解, 即取 $(X''_k, u''_k, p''_k) = (\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\delta_{ik} e_i, u_{ik}^{*}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) e_i, p_{ik}^{*}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) e_i)$, 应用 Betti 互等定理可得

$$S(\boldsymbol{y}) u_i(\boldsymbol{y}) = \int_{\Gamma} [u_{ik}^{*}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) p_k^{-}(\boldsymbol{x}) - u_k^{-}(\boldsymbol{x}) p_{ik}^{*}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})] \mathrm{d}\Gamma_x$$
$$(\boldsymbol{y} \in \Omega, i = 1, 2) \bullet \tag{13}$$

以坐标原点为圆心, 充分大的 R 为半径, 作圆域 $B_R(0)$, 简记为 B_R, 并使 $B_R \supset \Omega$, 令 $\Omega = \Omega_c \cap B_R$, 在区域 Ω 上, 一种状态取 $(X'_k, u'_k, p'_k) = (0, u_k^{+}, p_k^{+})$; 另一种状态对应 Kelvin 基本解 $(X''_k, u''_k, p''_k) = (\delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\delta_{ik} e_i, u_{ik}^{*}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) e_i, p_{ik}^{*}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) e_i)$, 应用 Betti 功的互等定理, 可得

$$S^{c}(\boldsymbol{y}) u_i^{c}(\boldsymbol{y}) = -\int_{\Gamma} [u_{ik}^{*}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) p_k^{+}(\boldsymbol{x}) - u_k^{+}(\boldsymbol{x}) p_{ik}^{*}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})] \mathrm{d}\Gamma_x +$$
$$\int_{\partial B_R} [u_{ik}^{*}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) p_k^{+}(\boldsymbol{x}) - u_k^{+}(\boldsymbol{x}) p_{ik}^{*}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})] \mathrm{d}\Gamma_x, \qquad \boldsymbol{y} \in \Omega \bullet \tag{14}$$

将(13)与(14)式两边相加, 可得

$$V_i(\boldsymbol{y}) = \int_{\Gamma} u_{ik}^{*}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) [p_k^{-}(\boldsymbol{x}) - p_k^{+}(\boldsymbol{x})] \mathrm{d}\Gamma_x +$$
$$\int_{\partial B_R} [u_{ik}^{*}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) p_k^{+}(\boldsymbol{x}) - u_k^{+}(\boldsymbol{x}) p_{ik}^{*}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})] \mathrm{d}\Gamma_x, \tag{15}$$

这里 $\quad V_i(\boldsymbol{y}) = S(\boldsymbol{y}) u_i(\boldsymbol{y}) + S^{c}(\boldsymbol{y}) u_i^{c}(\boldsymbol{y}), \qquad \boldsymbol{y} \in \Omega \cup \Omega \bullet$

对 $\forall \boldsymbol{y} \in \Omega \cup \Omega_c$, 当 $R \to \infty$ 时, 在 ∂B_R 上, 有

$$u_k^{+}(\boldsymbol{x}) \to C_k, \quad p_k^{+}(\boldsymbol{x}) \to o\left(\frac{1}{R}\right),$$

$$r_{,i} = \frac{x_i - y_i}{r} = \frac{x_i}{R} + O\left(\frac{1}{R}\right),$$

$$r_{,i}n_k - r_{,k}n_i \to 0,$$

所以 $$u^+_k(\boldsymbol{x})p^*_{ik}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \to -\frac{k_0C_k}{R}\left(k_2\delta_{ik} + \frac{2x_{,i}x_{,k}}{R^2}\right) + o\left(\frac{1}{R}\right),$$

故

$$\int_{\partial B_R}[u^*_{ik}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})p^+_k(\boldsymbol{x}) - u^+_k(\boldsymbol{x})p^*_{ik}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]\mathrm{d}\Gamma_x \to$$

$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^{2\pi}k_0[C_1(k_2+2\cos^2\theta)+2C_2\sin\theta\cos\theta]\mathrm{d}\theta = C_1 & (i=1),\\ \displaystyle\int_0^{2\pi}k_0[2C_1\sin\theta\cos\theta + C_2(k_2+2\sin^2\theta)]\mathrm{d}\theta = C_2 & (i=2)\cdot\end{cases} \tag{16}$$

将(16)式代入(15)式,可得

$$V_i(\boldsymbol{y}) = \int_\Gamma u^*_{ik}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})[p^-_k(\boldsymbol{x}) - p^+_k(\boldsymbol{x})]\mathrm{d}\Gamma_x + C_i,$$

式中 $\boldsymbol{y}\in\Omega\cup\Omega_c$, $i=1,2$• 令 $\phi_k(\boldsymbol{x}) = p^-_k(\boldsymbol{x}) - p^+_k(\boldsymbol{x})$, 按照习惯仍将 $V_i(\boldsymbol{y})$ 写成 $u_i(\boldsymbol{y})$,

$$u_i(\boldsymbol{y}) = \int_\Gamma \phi_k(\boldsymbol{x})u^*_{ik}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mathrm{d}\Gamma_x + C_i \qquad (\boldsymbol{y}\in\Omega\cup\Omega_c,\ i=1,2)\cdot \tag{17}$$

由定理1和定理2可知, $\phi_k(\boldsymbol{x})$ 满足

$$\int_\Gamma \phi_k(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\Gamma_x = 0 \qquad (k=1,2)\cdot \tag{18}$$

对于 Ω_c 为复连通区域即含有空洞的区域,上述证明仍然有效,只不过 Γ 是所有边界曲线的总和• 对于有界区域 Ω 的情况,用同样的方法可证明(17)~(18)的正确性• 因此公式(17)~(18)通用于单连通(不含空洞)和复连通(含空洞)、有限区域和无限区域等各种情形• 由定理3我们可看出:式(17)和(18)是位移向量 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2)$ 的边界积分表示式,使得满足(1)的位移向量 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2)$ 与 $\varphi=(\phi_1,\phi_2)$ 及 $\boldsymbol{C}=(C_1,C_2)$ 之间存在一一对应关系;任给满足(1)的位移向量函数 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2)$,一定能找到,且只能找到一组(ϕ_i,C_i) $(i=1,2)$ 使得(17)与(18)式成立;反之,任给一组(ϕ_i,C_i) $(i=1,2)$ 满足式(17),那么由式(17)所确定的位移向量 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2)$ 必然满足(1)•

4 等价的间接变量边界积分方程

考虑混合边值问题• 边界条件为:在 $\Gamma_{\boldsymbol{u}}$ 上: $u_i=\bar{u}_i$; 在 Γ_p 上, $p_i=\sigma_{ij}n_j=\bar{p}_i$, 其中 $\bar{u}_i,\bar{p}_i$ $(i=1,2)$ 为已知的位移和面应力分量• 这里 $\Gamma_{\boldsymbol{u}}$、$\Gamma_{\boldsymbol{p}}$ 分别为位移和面应力已知的边界,全部边界为 $\Gamma=\Gamma_{\boldsymbol{u}}\cup\Gamma_{\boldsymbol{p}}$•

由前面的结果可知: Ω(或 Ω_c)上的任一满足式(1)的位移向量 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2)$ 可由式(17)~(18)表示,并且表达式是惟一的• 即

$$\int_\Gamma \phi_k(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\Gamma_x = 0, \tag{19}$$

$$u_i(\boldsymbol{y}) = \int_\Gamma \phi_k(\boldsymbol{x})u^*_{ik}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mathrm{d}\Gamma_x + C_i \qquad (\boldsymbol{y}\in\Omega(\text{或 }\Omega_c),\ i=1,2)\cdot \tag{20}$$

通过位移和面应力间的关系式 $p_i=\sigma_{ij}n_j=\lambda u_{k,k}n_i+\mu(u_{i,j}n_j+u_{j,i}n_j)$, 可得

$$p_i(\boldsymbol{y}) = \int_\Gamma \phi_k(\boldsymbol{x})p^*_{ik}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mathrm{d}\Gamma_x \qquad (\boldsymbol{y}\in\Omega(\text{或 }\Omega_c),\ i=1,2)\cdot \tag{21}$$

就方程(20)~(21),令 $\boldsymbol{y}\to\Gamma$, 可得如下等价的边界积分方程

$$\int_\Gamma \phi_k(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\Gamma_x = 0,$$

$$u_i(\boldsymbol{y}) = \int_\Gamma \phi_k(\boldsymbol{x}) u^*_{ik}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\Gamma_x + C_i, \qquad \boldsymbol{y} \in \Gamma_{\boldsymbol{u}},\ i = 1, 2,$$

$$p_i(\boldsymbol{y}) = C_{ik}\phi_k(\boldsymbol{y}) + \int_\Gamma \phi_k(\boldsymbol{x}) p^*_{ik}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\Gamma_x, \qquad \boldsymbol{y} \in \Gamma_{\boldsymbol{p}},$$

这里 $C_{ik}(i, k = 1, 2)$ 是与 Γ 在 $\boldsymbol{y}$ 点的几何形状有关的常数•

5 讨 论

1) 对外边值问题的讨论

以下例子表明对外边值问题的解在无穷远处的性态不加限制或进行不恰当的限制, 将导致问题的解不唯一•

例 1 设 Ω_c 是单位圆域 $B_1(0)$ 的补域, 边界为单位圆周 $\Gamma = \partial B_1(0)$, 考虑如下边值问题

$$\begin{cases} \text{在 } \Omega_c \text{ 内}: & \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}, \\ \text{在 } \Gamma \text{ 上}: & u_1 = \cos^2\theta,\ u_2 = \cos\theta\sin\theta• \end{cases}$$

如果此边值问题的解在无穷远处没有任何限制, 那么边值问题的解不唯一• 显然

$$\begin{cases} u_1 = -(3 - 4\nu)\ln r + \cos^2\theta, \\ u_2 = \cos\theta\sin\theta \end{cases} \text{与} \begin{cases} u_1 = 0.5 + \cos 2\theta/(2r^2), \\ u_2 = \sin 2\theta/(2r^2) \end{cases}$$

均是上述边值问题的解•

例 2 设 Ω_c 是单位圆域 $B_1(0)$ 的补域, 边界为单位圆周 $\Gamma = \partial B_1(0)$, 考虑如下边值问题

$$\begin{cases} \text{在 } \Omega_c \text{ 内}: & \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}, \\ \text{在 } \Gamma \text{ 上}: & u_1 = -x_2,\ u_2 = x_1• \end{cases}$$

如果对外问题的解在无穷远处添加刚体位移的性态条件: 当 $|\boldsymbol{x}| \to \infty$ 时, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{C} + D(-x_2, x_1) + o(1/r)$($\boldsymbol{C}$ 为常向量, D 为常数), 那么边值问题的解不唯一• 显然

$$\begin{cases} u_1 = -\sin\theta/r, \\ u_2 = \cos\theta/r \end{cases} \text{与} \begin{cases} u_1 = -x_2, \\ u_2 = x_1 \end{cases}$$

均是上述边值问题的解•

2) 对传统边界积分方程的讨论

以下我们通过反例表明传统的间接变量边界积分方程不是普遍适用的• 考虑如下两个混合边值问题

$$(\mathrm{I})\begin{cases} \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}, & \text{在 } \Omega_c \text{ 内}, \\ u_i = u_i, & \text{在 } \Gamma_{\boldsymbol{u}} \text{ 上}, \\ p_i = p_i, & \text{在 } \Gamma_{\boldsymbol{p}} \text{ 上}, \\ |\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})| = O(1) & \text{在 } \infty \text{ 处}; \end{cases} \qquad (\mathrm{II})\begin{cases} \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}, & \text{在 } \Omega_c \text{ 内}, \\ u_i = u_i + \delta_{1i}C, & \text{在 } \Gamma_{\boldsymbol{u}} \text{ 上}, \\ p_i = p_i, & \text{在 } \Gamma_{\boldsymbol{p}} \text{ 上}, \\ |\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})| = O(1), & \text{在 } \infty \text{ 处}; \end{cases}$$

其中 C 为常数•

传统的边界积分方程是基于区域 Ω_c 内的位移向量, 可表示为

$$u_i(\boldsymbol{y}) = \int_\Gamma \phi_k(\boldsymbol{x}) u^*_{ik}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\Gamma_x \qquad (\boldsymbol{y} \in \Omega_c,\ i = 1, 2)• \tag{22}$$

假设使用传统边界积分方程求解问题(Ⅰ)、(Ⅱ), 它们的解均存在, 分别为 ϕ_i, $\phi_i(i = 1, 2)$, 那么 $\hat{u}_i = u_i - u_i$, $\hat{p}_i = p_i - p_i(i = 1, 2)$ 必然是如下边值问题的解

$$\begin{cases} \text{在 } \Omega_c \text{ 内}: & \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0}, \\ \text{在 } \Gamma_{\boldsymbol{u}} \text{ 上}: & \hat{u}_i = \delta_{1i}C, \\ \text{在 } \Gamma_{\boldsymbol{p}} \text{ 上}: & \hat{p}_i = 0, \\ \text{在 } \infty \text{ 处}: & |\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x})| = O(1)• \end{cases}$$

显然上述问题的解为 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2) = (C, 0), \boldsymbol{p} = (p_1, p_2) = (0, 0)$•

使用传统的边界积分方程, 如果 $\int_\Gamma \hat{\varphi}_k(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\Gamma_x = 0,\ \ k = 1, 2$, 那么由定理3可知 $\lim_{x\to\infty} u_i = 0$, $i = 1, 2$, 如果 $\int_\Gamma \hat{\varphi}_k(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\Gamma_x \neq 0,\ \ k = 1, 2$, 那么 $\lim_{x\to\infty} u_i(x) = \infty$, 两者均是错误的•

评注 以上例子表明, 对于边界条件相差常数的任何两个外边值问题, 使用传统的边界积分方程求解, 至少一个问题的解无法获得• 更重要的是, 在实践中, 由于边界条件的复杂性, 我们很难判断什么边界条件下, 问题可求解•

[参 考 文 献]

[1] 孙焕纯, 张耀明, 许强, 等. 无奇异边界元法[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1999.

[2] 余德浩. 自然边界元方法的数学理论[M]. 北京: 科学出版社, 1993.

[3] Schmidt G, Stress H. The convergence of a direct BEM for the plane mixed boundary value problems of the Laplaceian[J]. Numer Math, 1988, **54**(1): 145—165.

[4] Ciaret P G. The Finite Element Method for Elliptic Problems[M]. Amsterdam: North_Holland, 1978.

[5] 王鸣, 张鸿庆. 广义 Korn_Poincare 不等式及其应用Ⅰ [J]. 科学探索, 1982, **2**(3): 83—92.

[6] Zeb A, Elliot L, Ingham D B, et al. The boundary element method for solution of Stokes equation in two_dimensional domains[J]. Eng Anal Boundary Element, 1998, **22**(11): 317—326.

[7] 张耀明, 孙焕纯. 薄板弯曲问题的等价的边界积分方程[J]. 应用数学和力学, 2000, **21**(11): 1246—1255.

[8] 张耀明, 孙焕纯. 平面 Laplace 问题[J]. 计算力学学报, 2001, **18**(2): 162—166.

Equivalent Boundary Integral Equations With Indirect Variables for Plane Elasticity Problems

ZHANG Yao_ming[1], WEN Wei_dong[1], ZHANG Zuo_quan[2], SUN Huan_chun[3], LÜ He_xiang[3]

(1. College of Energy &Power Engineering, Nanjing Univeristy of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, P.R.China;
2. School of Mathematics and Physics, Northern Jiaotong Institute, Beijing 100044, P.R.China;
3. Department of Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116023, P.R.China)

Abstract: The exact form of the exterior problem for plane elasticity problems was produced and fully proved by the variational principle. Based on this, the equivalent boundary integral equations(EBIE) with direct variables, which are equivalent to the original boundary value problem, were deduced rigorously. The conventionally prevailing boundary integral equation with direct variables was discussed thoroughly by some examples and it is shown that the previous results are not EBIE.

Key words: variational principle; exterior problem; EBIE