应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2003) 12_1249_09

圆柱形容器中自由表面波的三波内共振相互作用*

马晨明[1,2]

(1. 复旦大学 数学研究所, 上海 200433;
2. 上海大学 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

(戴世强推荐)

摘要: 由 Luke 变分原理导出了圆柱形容器中自由毛细重力表面波的基本方程. 首先对速度势和自由面波高作 Galerkin 展开, 用多重尺度法导出了控制方程前二阶摄动方程, 在此基础上讨论了三个波二阶内共振的非线性相互作用, 导出了三波内共振的非线性耦合作用方程和守恒律. 针对非退化的作用方程, 分析了相平面上平衡点的位置, 研究了参数对应共振与非共振的各种情况, 在不同参数情况下求出二阶作用方程的稳态解并分析了解的稳定性态, 还讨论了只在有限时间内有效的解. 分析表明, 在非退化情况下, 由于初始条件不同, 3 个波之间能量传递的模式不尽相同, 有可能能量在 3 波之间周期性传递, 亦可能单波的能量有衰减或增长.

关 键 词: 表面波; 内共振; 稳态解
中图分类号: O353.2 文献标识码: A

引 言

容器中液体的波动问题作为一个物理模型被用于研究潮汐波、湖面波动(seiche) 、海洋波浪、工业上的容器中液体晃动问题. 由于它的重要理论意义, 目前仍是一个富有活力的领域. McGoldrick[1]证明了毛细重力表面波中也有二阶共振. Hasselmann[2] 研究了连续谱中各频谱分量之间的非线性相互作用, 导出一个描述频谱分量间能量转移的公式, 其作用机制是五阶共振. Annenkov 和 Shrira[3] 利用 Zakharov 方程研究水面间歇性出现的马蹄形波纹, 讨论了 3 个波的四阶共振. Miles[4] 运用 Whitham 平均变分法, 结合 Galerkin 方法, 导出了以速度势表达的运动方程, 然后对无限长槽道讨论了两个波之间的 2∶1 二阶共振. 他[5] 还讨论了圆形容器中两个频率相同但周角差 π/2 的波之间的二阶内共振. Hammack 和 Henderson[6] 全面总结了表面波共振相互作用的理论和实验研究, 讨论了在各方面的应用, 文献引证非常详尽. Benielli 和 Sommeria[7] 研究了参数不稳定引起的内重力波的破碎. Shivamoggi[8] 讨论了 3 个声波的非线性共振, 对耦合模态导出了作用方程, 得到了用 Jacobi 椭圆函数表达的显式解, 讨论了模态间周期性的能量变换.

---

* 收稿日期: 2002_05_13; 修订日期: 2003_07_02
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10171020)
作者简介: 马晨明(1977—) , 女, 山东菏泽人, 博士生(E_mail: chenmingma@ sina. com) .

本文研究圆柱形容器中流体的3个毛细重力表面波的内共振相互作用, 基本思想是通过适当的变分原理(Luke变分原理)代替水波运动的基本控制方程与边界条件, 使用符合圆形容器几何特点的基函数对速度势和自由面波高作Galerkin展开, 以多尺度展开法为工具, 导出所讨论问题的二阶摄动方程, 3个自由表面波共振的耦合作用方程及守恒律, 用三角函数、双曲函数以及椭圆函数显式表示出非退化情况下二阶作用方程的所有稳态解•

1 自由表面波的基本方程

本文考虑半径为 R 的圆形容器, 设静止液面与容器底部距离 h, 流体密度 ρ, 液体与空气间的表面张力系数 τ, 自由面波高 η, 坐标系 (r, θ, y), y 轴垂直向上为正, 静止液面取为坐标平面 $y=0$, 记圆截面 $S=\left\{r\leqslant R\right\}$, 侧壁 $B=\left\{r=R\right\}$• 假设流动是不可压无旋的, 引进速度势 ϕ•

根据Luke的变分原理[4], 取Lagrange密度函数为

$$I=\iint_S \mathrm{d}S\int_{-h}^{\eta}\left[\phi_t+\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2+gy\right]\mathrm{d}y+\frac{\tau}{\rho}\iint_S \mathrm{d}S\left(\sqrt{1+|\nabla\eta|^2}-1\right)• \tag{1}$$

为了讨论自由波动的不同 ω_{mn} 之间的内共振, 可以利用求解区域的对称性, 取正交集 $\left\{J_m(kr)\cos m\theta\right\}$ 作基, 将波面和速度势作Galerkin展开:

$$\eta(r, \theta, t)=\eta_0+\sum_{\substack{m\geqslant 0\\ n\geqslant 1}}\eta_{mn}(t)\,\psi_{mn}, \tag{2}$$

$$\phi(r, \theta, z, t)=\phi_0\psi_{00}+\sum_{\substack{m\geqslant 0\\ n\geqslant 1}}\phi_{mn}(t)\,\psi_{mn}(r, \theta)\frac{\cosh k_{mn}(z+h)}{\cosh k_{mn}h}• \tag{3}$$

本文中作如下约定: 凡和号中成对出现的下标, 第一个从0到∞, 第二个从1到∞• 以后不再逐一写出• 采用下列形式的Lagramge方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial I}{\partial\dot{\phi}_{mn}}=\dfrac{\partial I}{\partial\phi_{mn}}, & (4)\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial I}{\partial\dot{\eta}_{mn}}=\dfrac{\partial I}{\partial\eta_{mn}}• & (5)\end{cases}$$

展开(4)、(5), 得

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{m_1n_1}M_{mnm_1n_1}\phi_{m_1n_1}=\sum_{m_1n_1}P_{mnm_1n_1}\dot{\eta}_{m_1n_1}, & (6)\\[2ex] \displaystyle\sum_{m_1n_1}P_{m_1n_1mn}\dot{\phi}_{m_1n_1}+\frac{1}{2}\sum_{\substack{m_1m_2\\ n_1n_2}}N_{m_1n_1m_2n_2mn}\phi_{m_1n_1}\phi_{m_2n_2}+\left(g+\frac{\tau}{\rho}k_{mn}^2\right)\eta_{mn}+ & \\[2ex] \displaystyle\qquad\frac{\tau}{\rho\sqrt{\pi}}\sum_{l=2}^{\infty}(-1)^{l-1}\frac{\Gamma(l-1/2)}{(l-1)!}\sum_{\substack{i_1\cdots i_{2l-1}\\ j_1\cdots j_{2l-2}}}S_{mni_1j_1\cdots i_{2l-1}j_{2l-1}}\eta_{i_1j_1}\cdots\eta_{i_{2l-1}j_{2l-1}}=0• & (7)\end{cases}$$

这就是自由毛细重力表面波的基本方程, 其中系数的规定可参见附录•

2 多尺度展开

本文考虑弱非线性的表面波, 因此可以把函数对一个表征波高的小参数 ε 展开, 这里对于基本方程(6)、(7), 只使用其前二阶的系数, 运用多重尺度法, 记 $T_n=\varepsilon^n t\ (n=1, 2, \cdots)$, 做展

开

$$\begin{cases}\eta_{mn} = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k}\eta_{mn}^{(k)}(T_0, T_1, \cdots), & (8)\\ \phi_{mn} = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k}\phi_{mn}^{(k)}(T_0, T_1, \cdots)\cdot & (9)\end{cases}$$

将展开式(8)、(9)代入基本方程(6)、(7)可得其前二阶摄动方程,即

一阶摄动方程

$$\begin{cases}D_0\eta_{mn}^{(1)} - W_{mn}\phi_{mn}^{(1)} = 0, & (10)\\ D_0\phi_{mn}^{(1)} + \left(g + \dfrac{\tau}{\rho}k_{mn}^{2}\right)\eta_{mn}^{(1)} = 0; & (11)\end{cases}$$

二阶摄动方程

$$D_0\eta_{mn}^{(2)} + D_1\eta_{mn}^{(1)} - W_{mn}\phi_{mn}^{(2)} + \sum_{\substack{m_1n_1\\ i_1j_1}} W_{mn}L_{mnm_1n_1}^{i_1j_1}\eta_{i_1j_1}^{(1)}D_0\eta_{m_1n_1}^{(1)} = 0, \tag{12}$$

$$D_0\phi_{mn}^{(2)} + D_1\phi_{mn}^{(1)} + \left(g + \frac{\tau}{\rho}k_{mn}^{2}\right)\eta_{mn}^{(2)} + \sum_{\substack{m_1n_1\\ i_1j_1}} P_{m_1n_1mn}^{i_1j_1}\eta_{i_1j_1}^{(1)}D_0\phi_{m_1n_1}^{(1)} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{m_1n_1\\ m_2n_2}} N_{m_1n_1m_2n_2mn}^{(0)}\phi_{m_1n_1}^{(1)}\phi_{m_2n_2}^{(1)} = 0\cdot \tag{13}$$

为了求二阶摄动方程的特解, 将(12)、(13)合并, 并把已得到的一阶摄动方程的解代入, 得

$$\begin{aligned}&D_0^2\eta_{mn}^{(2)} + \omega_{mn}^2\eta_{mn}^{2} + [2\mathrm{i}\,\omega_{mn}D_1A_{mn}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{mn}T_0} + \text{c. c.}] - \\ &\left\{\sum_{\substack{m_1m_2\\ n_1n_2}} W_{mn}\left[L_{mnm_1n_1}^{m_2n_2}\omega_{m_1n_1}(\omega_{m_1n_1} + \omega_{m_2n_2}) + \frac{1}{2}N_{m_1n_1m_2n_2mn}^{(0)}W_{m_1n_1}^{-1}W_{m_2n_2}^{-1}\omega_{m_1n_1}\omega_{m_2n_2} + W_{m_1n_1}^{-1}\omega_{m_1n_1}^{2}P_{m_1n_1mn}^{m_2n_2}\right]A_{m_1n_1}A_{m_2n_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{m_1n_1} + \omega_{m_2n_2})T_0} + \text{c. c.}\right\} - \\ &\left\{\sum_{\substack{m_1m_2\\ n_1n_2}} W_{mn}\left[L_{mnm_1n_1}^{m_2n_2}\omega_{m_1n_1}(\omega_{m_1n_1} - \omega_{m_2n_2}) - \frac{1}{2}N_{m_1n_1m_2n_2mn}^{(0)}W_{m_1n_1}^{-1}W_{m_2n_2}^{-1}\omega_{m_1n_1}\omega_{m_2n_2} + W_{m_1n_1}^{-1}\omega_{m_1n_1}^{2}P_{m_1n_1mn}^{m_2n_2}\right]A_{m_1n_1}\overline{A_{m_2n_2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{m_1n_1} - \omega_{m_2n_2})T_0} + \text{c. c.}\right\} = 0\cdot\end{aligned} \tag{14}$$

为分析方程(14), 应区分无内共振和有内共振两种情况• 在无内共振情形时, 可以得到自由毛细重力表面波固有频率的修正, 此处由于篇幅的关系, 不予讨论• 下面将集中讨论3个自由表面波的内共振相互作用•

3 三波内共振

本节只考虑3个波的共振, 但不考虑几种共振同时发生的组合共振• 设3个波的频率分

别是 $\omega_{m_\alpha n_\alpha}$、$\omega_{m_\beta n_\beta}$、$\omega_{m_\gamma n_\gamma}$，满足 $\omega_{m_\alpha n_\alpha}+\omega_{m_\beta n_\beta}=\omega_{m_\gamma n_\gamma}+O(\varepsilon)$，引入解谐参数 $\sigma=O(1)$，则 $\omega_{m_\alpha n_\alpha}+\omega_{m_\beta n_\beta}=\omega_{m_\gamma n_\gamma}+\sigma\varepsilon$•

3.1 作用方程和守恒律

由(14)，三波二阶摄动方程分别为

$$
\begin{aligned}
&D_0^2\eta^{(2)}_{m_\alpha n_\alpha}+\omega^2_{m_\alpha n_\alpha}\eta^{(2)}_{m_\alpha n_\alpha}+2\mathrm{i}\,\omega_{m_\alpha n_\alpha}\left[D_1A_{m_\alpha n_\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{m_\alpha n_\alpha}T_0}-\overline{D_1A_{m_\alpha n_\alpha}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{m_\alpha n_\alpha}T_0}\right]-\\
&\quad 4\,\omega_{m_\alpha n_\alpha}C_\alpha A_{m_\gamma n_\gamma}\overline{A_{m_\beta n_\beta}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma T_1}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{m_\alpha n_\alpha}T_0}+\mathrm{NST}+\mathrm{c.c.}=0,
\end{aligned}\tag{15}
$$

$$
\begin{aligned}
&D_0^2\eta^{(2)}_{m_\beta n_\beta}+\omega^2_{m_\beta n_\beta}\eta^{(2)}_{m_\beta n_\beta}+2\mathrm{i}\,\omega_{m_\beta n_\beta}D_1A_{m_\beta n_\beta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{m_\beta n_\beta}T_0}-\\
&\quad 4\,\omega_{m_\beta n_\beta}C_\beta A_{m_\gamma n_\gamma}\overline{A_{m_\alpha n_\alpha}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma T_1}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{m_\beta n_\beta}T_0}+\mathrm{NST}+\mathrm{c.c.}=0,
\end{aligned}\tag{16}
$$

$$
\begin{aligned}
&D_0^2\eta^{(2)}_{m_\gamma n_\gamma}+\omega^2_{m_\gamma n_\gamma}\eta^{(2)}_{m_\gamma n_\gamma}+2\mathrm{i}\,\omega_{m_\gamma n_\gamma}D_1A_{m_\gamma n_\gamma}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{m_\gamma n_\gamma}T_0}-\\
&\quad 4\,\omega_{m_\gamma n_\gamma}C_\gamma A_{m_\alpha n_\alpha}A_{m_\beta n_\beta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma T_1}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{m_\gamma n_\gamma}T_0}+\mathrm{NST}+\mathrm{c.c.}=0,
\end{aligned}\tag{17}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
C_\alpha=\frac{W_{m_\alpha n_\alpha}}{4\,\omega_{m_\alpha n_\alpha}}\Big[&L^{(m_\beta n_\beta)}_{m_\alpha n_\alpha m_\gamma n_\gamma}\omega_{m_\gamma n_\gamma}(\omega_{m_\gamma n_\gamma}-\omega_{m_\beta n_\beta})+gP^{(m_\beta n_\beta)}_{m_\gamma n_\gamma m_\alpha n_\alpha}-\\
&\frac{1}{2}N^{(0)}_{m_\gamma n_\gamma m_\beta n_\beta m_\alpha n_\alpha}W^{-1}_{m_\gamma n_\gamma}W^{-1}_{m_\beta n_\beta}\omega_{m_\gamma n_\gamma}\omega_{m_\beta n_\beta}\Big],\\
C_\beta=\frac{W_{m_\beta n_\beta}}{4\,\omega_{m_\beta n_\beta}}\Big[&L^{(m_\alpha n_\alpha)}_{m_\beta n_\beta m_\gamma n_\gamma}\omega_{m_\gamma n_\gamma}(\omega_{m_\gamma n_\gamma}-\omega_{m_\alpha n_\alpha})+gP^{(m_\alpha n_\alpha)}_{m_\gamma n_\gamma m_\beta n_\beta}-\\
&\frac{1}{2}N^{(0)}_{m_\gamma n_\gamma m_\alpha n_\alpha m_\beta n_\beta}W^{-1}_{m_\gamma n_\gamma}W^{-1}_{m_\alpha n_\alpha}\omega_{m_\gamma n_\gamma}\omega_{m_\alpha n_\alpha}\Big],\\
C_\gamma=\frac{W_{m_\gamma n_\gamma}}{4\,\omega_{m_\gamma n_\gamma}}\Big\{&\Big[L^{(m_\beta n_\beta)}_{m_\gamma n_\gamma m_\alpha n_\alpha}\omega_{m_\alpha n_\alpha}+L^{(m_\alpha n_\alpha)}_{m_\gamma n_\gamma m_\beta n_\beta}\omega_{m_\beta n_\beta}\Big](\omega_{m_\alpha n_\alpha}-\omega_{m_\beta n_\beta})+\\
&g\Big[P^{(m_\beta n_\beta)}_{m_\alpha n_\alpha m_\gamma n_\gamma}+P^{(m_\alpha n_\alpha)}_{m_\beta n_\beta m_\gamma n_\gamma}\Big]+N^{(0)}_{m_\alpha n_\alpha m_\beta n_\beta m_\gamma n_\gamma}W^{-1}_{m_\alpha n_\alpha}W^{-1}_{m_\beta n_\beta}\omega_{m_\alpha n_\alpha}\omega_{m_\beta n_\beta}\Big\},
\end{aligned}
$$

则方程(15)~(17)中消去长期项的条件是

$$
\begin{cases}
\mathrm{i}D_1A_{m_\alpha n_\alpha}=2C_\alpha A_{m_\gamma n_\gamma}\overline{A_{m_\beta n_\beta}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma T_1},\\
\mathrm{i}D_1A_{m_\beta n_\beta}=2C_\beta A_{m_\gamma n_\gamma}\overline{A_{m_\alpha n_\alpha}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma T_1},\\
\mathrm{i}D_1A_{m_\gamma n_\gamma}=2C_\beta A_{m_\alpha n_\alpha}A_{m_\beta n_\beta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma T_1}\cdot
\end{cases}\tag{18}
$$

这就是共振三波的非线性相互作用方程•

令 $$A_{m_\lambda n_\lambda}=\frac{1}{2}a_\lambda\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_\lambda}\qquad(\lambda=\alpha,\beta,\gamma),\tag{19}$$

其中 $a_\lambda(T_1,\cdots)$、$\theta_\lambda(T_1,\cdots)$ 都是实函数•

将(19)代入(18)得

$$
\begin{cases}
C_\gamma a_\alpha a_\beta a_\gamma\cos\mu+\dfrac{\sigma}{2}a_\gamma^2=H,\\
C_\gamma a_\alpha^2+C_\alpha a_\gamma^2=E_1,\\
C_\gamma a_\beta^2+C_\beta a_\gamma^2=E_2,
\end{cases}\tag{20}
$$

其中 $\mu=\theta_\alpha+\theta_\beta+\sigma T_1-\theta_\gamma$，$H$、$E_1$、$E_2$ 都是与 T_1 无关的量• 方程(20)就是三波内共振的守

恒律•

3.2 作用方程的变形

可以利用(20)的第一式消去 μ, 得

$$(a_\gamma D_1 a_\gamma)^2 + \left(H - \frac{\sigma}{2}a_\gamma^2\right)^2 = (C_\gamma a_\alpha a_\beta a_\gamma)^2 \cdot \tag{21}$$

若记 $\xi = a_\gamma^2$, 则有

$$\frac{d\xi}{dT_1} = \pm 2\sqrt{f(\xi)}, \tag{22}$$

其中 $f(\xi) = B_3\xi^3 - B_2\xi^2 + B_1\xi - B_0$, $f(\xi)$ 的系数是

$$B_3 = C_\alpha C_\beta,\ B_2 = C_\alpha E_2 + C_\beta E_1 + \sigma^2/4,\ B_1 = E_1E_2 + \sigma H,\ B_0 = H^2 \cdot \tag{23}$$

3.3 作用方程的稳态解

下面讨论非退化情况 $(B_3 \neq 0)$ 下, 作用方程(22)稳态解及其稳定性分析• 设方程有3个根: ξ_1、ξ_2、ξ_3, 可分成1个实根与3个实根两种情况• 首先假设 $B_3 > 0$, 并设 Δ 是方程 $f(\xi) = 0$ 的判别式•

1) $\Delta < 0$ 时, $f(\xi) = 0$ 有3个相异实根: $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$

记 $\xi_k = 2\sqrt{-f'(C)/(3B_3)}\cos(\varphi_k/3)$,

其中

$$\cos\varphi_k = \frac{-f(C)}{2B_3}\Big\backslash\sqrt{-\left(\frac{f'(C)}{3B_3}\right)^3},$$

$$\sin\varphi_k = \sqrt{-\Delta}\Big\backslash\sqrt{-\left(\frac{f'(C)}{3B_3}\right)^3},$$

$$C = B_2/(3B_3) \cdot$$

1.1) 求解区域为: $\xi_1 \leqslant \xi \leqslant \xi_2$

作变量代换 $\xi = \xi_1 + (\xi_2 - \xi_1)\sin^2\varphi$, 则(22)经过积分后有

$$\int_0^\varphi 1/\sqrt{1 - K^2\sin^2 W}\,dW = \sqrt{B_3(\xi_3 - \xi_1)}\,T_1, \tag{24}$$

故初始条件用了 $T_1 = 0$ 时 $\varphi = 0$, 即从 $\xi = \xi_1$ 开始积分,

$$\xi = \xi_1 + (\xi_2 - \xi_1)\mathrm{sn}^2[\sqrt{B_3(\xi_3 - \xi_1)}\,T_1], \tag{25}$$

其中 sn[•] 是 Jacobi 椭圆函数• (25)表明 ξ 在 ξ_1 与 ξ_2 之间作周期运动, 其运动方程为:

$$\begin{cases} a_\gamma^2 = \xi = \xi_1 + (\xi_2 - \xi_1)\mathrm{sn}^2[\sqrt{B_3(\xi_3 - \xi_1)}\,T_1], \\ a_\beta^2 = \dfrac{1}{C_\gamma}\left\{E_2 - C_\beta\xi_1 - C_\beta(\xi_2 - \xi_1)\mathrm{sn}^2\left[\sqrt{B_3(\xi_3 - \xi_1)}\,T_1\right]\right\}, \\ a_\alpha^2 = \dfrac{1}{C_\gamma}\left\{E_1 - C_\alpha\xi_1 - C_\alpha(\xi_2 - \xi_1)\mathrm{sn}^2\left[\sqrt{B_3(\xi_3 - \xi_1)}\,T_1\right]\right\} \cdot \end{cases} \tag{26}$$

由于 sn[•] 是周期函数, 可以看出能量在3个波间无衰减地传递, 具体地说是 $\omega_{m_\gamma n_\gamma}$ 波向另两个 $\omega_{m_\alpha n_\alpha}$ 波和 $\omega_{m_\beta n_\beta}$ 波传递能量或从这两个波吸收能量•

1.2) 求解区域是 $\xi \geqslant \xi_3$

作变量代换 $\xi = \zeta/B_3$, 代入(22)有:

$$d\zeta/dT_1 = \pm\sqrt{4\zeta^3 - p\zeta - q}, \tag{27}$$

其中,

$$\begin{cases} p = \dfrac{4}{3}(B_2^2 - 3B_1B_3), \\ q = 4(2B_2^3/27 - B_1B_2B_3/3 + B_0B_3^2) \end{cases}$$

(27) 的求解区域是 $\zeta \geqslant B_3\xi_3$, 初始条件为 $\zeta = B_3\xi_3 (T_1 = 0)$。

积分可得:

$$\zeta = P\left(\int_{B_3\xi_3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\tau^3 - p\tau - q}}\mathrm{d}\tau - T_1\right), \tag{28}$$

其中 P 是 Wereistrass 椭圆函数。

1. 1) 与 1. 2) 解的区别在于初始时刻波的能量, 若 $\omega_{m_\gamma n_\gamma}$ 波的能量过大, 则对应 1. 2), 解就会趋于无穷。 将 ζ 代回原变量 $\xi = \zeta/B_3$ 得

$$a_\gamma^2 = \frac{1}{B_3}P\left(\int_{B_3\xi_3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\tau^3 - p\tau - q}}\mathrm{d}\tau - T_1\right),$$

$$a_\beta^2 = \frac{1}{C_\gamma}\left\{E_2 - \frac{1}{C_\alpha}P\left(\int_{B_3\xi_3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\tau^3 - p\tau - q}}\mathrm{d}\tau - T_1\right)\right\},$$

$$a_\alpha^2 = \frac{1}{C_\gamma}\left\{E_1 - \frac{1}{C_\beta}P\left(\int_{B_3\xi_3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\tau^3 - p\tau - q}}\mathrm{d}\tau - T_1\right)\right\}.$$

在 C_α、C_β 均为正时, $\omega_{m_\alpha n_\alpha}$、$\omega_{m_\beta n_\beta}$ 会在一段时间后被抑制; 当 C_α、C_β 均为负时, 3 个波都会剧烈增长。

2) $\Delta > 0$, 这时 $f(\xi) = 0$ 只有一个实根 ξ_3

设 $$f(\xi) = B_3(\xi - \xi_3)(\xi^2 + p\xi + q), \tag{29}$$

作变量代换

$$\xi = \xi_1 + \sqrt{g(\xi_1)}\tan^2\frac{\varphi}{2},$$

则(22) 经过积分后得;

$$\xi = \xi_1 + \sqrt{g(\xi_1)} \cdot \frac{1 - \mathrm{cn}(2\sqrt{B_3}\sqrt[4]{g(\xi_1)}T_1)}{1 + \mathrm{cn}(2\sqrt{B_3}\sqrt[4]{g(\xi_1)}T_1)}.$$

ξ 的运动无界, 持续的时间是

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - K^2\sin^2\tau}}\mathrm{d}\tau \cdot \frac{1}{\sqrt{B_3}\sqrt[4]{g(\xi_1)}},$$

其中:

$$\xi_1 = \sqrt[3]{-\frac{f(C)}{2B_3} + \sqrt{\left(\frac{f(C)}{2B_3}\right)^2 + \left(\frac{f'(C)}{3B_2}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{f(C)}{2B_3} - \sqrt{\left(\frac{f(C)}{2B_3}\right)^2 + \left(\frac{f'(C)}{3B_2}\right)^3}}.$$

3) $\Delta = 0$

3. 1) $f(\xi)$ 有三重根

设 $f(\xi) = B_3(\xi - B_2/(3B_3))^3$。

考察过平衡点 $B_2/(3B_3)$ 的积分曲线 $(\xi_0 - B_2/(3B_3))^{-1/2} - (\xi - B_2/(3B_3))^{-1/2} = \sqrt{B_3}T_1$, 由于 $\xi = B_2/(3B_3)$ 处奇性过强, 原本不在 $B_2/(3B_3)$ 的点在有限时间内永远不会到达此点。

但在有限时间 $1/(B_3(\xi_0 - B_2/(3B_3))^{-1/2})$ 内 $\xi \to \infty$•

ξ 的变化取决于初值• 若初始时 $\xi = B_2/(3B_3)$, 则它成为一个稳态解• 若初始时 $\xi \neq B_2/(3B_3)$, 则必须是 $\xi > B_2/(3B_3)$, 如在上枝, 则经有限时间即远离平衡点, 即解趋于无穷; 如在下枝, 则经无限时间后可无限接近平衡点, 但不会达到平衡点•

3.2) 1 个单根, 1 个二重根

3.2a) $\xi_1 = \xi_2 < \xi_3$

求解区域是: $\xi > \xi_3$

$$\xi = \xi_3 + (\xi_3 - \xi_1)\tan^2[\sqrt{B_3(\xi_3 - \xi_1)} \cdot T_1] \cdot \tag{30}$$

3.2b) $\xi_1 < \xi_2 = \xi_3$

$$\frac{d\xi}{dT_1} = \pm 2\sqrt{B_3}\sqrt{\xi - \xi_1}\,|\xi - \xi_3| \cdot$$

设积分路线是 I , II•

I 求解区域 $\xi_1 \leqslant \xi \leqslant \xi_3$

作变换 $\sqrt{\xi - \xi_1} = \zeta$, 解方程得

$$\xi = \xi_1 + (\xi_3 - \xi_1)\tanh^2[\sqrt{B_3(\xi_3 - \xi_1)} \cdot T_1], \tag{31}$$

显然 $\xi \to \xi_3$, 仅当 $T_1 \to \infty$, 即有限时间内 ξ 不会从 ξ_1 到 ξ_3•

II 求解区域: $\xi \geqslant \xi_3$

$$\xi = \xi_1 + \frac{(\xi_3 - \xi_1)^2}{\xi_0 - \xi_1}\left[\frac{\sqrt{\dfrac{\xi_0 - \xi_1}{\xi_3 - \xi_1}} \pm \tanh(\sqrt{B_3(\xi_3 - \xi_1)}\,T_1)}{\sqrt{\dfrac{\xi_3 - \xi_1}{\xi_0 - \xi_1}} \pm \tanh(\sqrt{B_3(\xi_3 - \xi_1)}\,T_1)}\right]^2 \cdot \tag{32}$$

(32)" $\pm$ "中取" - "的解在有限时间内失效, 只在

$$-\infty < T_1 < 0.5\sqrt{B_3(\xi_3 - \xi_1)}\ln(\sqrt{\xi_0 - \xi_1} + \sqrt{\xi_3 - \xi_1}/\sqrt{\xi_0 - \xi_1} + \sqrt{\xi_3 - \xi_1})$$

时有效, 此范围外解无界• (32)" $\pm$ "中取" + "的解从 $\xi = \infty$ 到 ξ_0 仅用有限时间即可, 但从 ξ_0 到 ξ_3 需经历无穷长的时间• 故有效时段是:

$$-0.5\sqrt{B_3(\xi_3 - \xi_1)}\ln(\sqrt{\xi_0 - \xi_1} + \sqrt{\xi_3 - \xi_1}/\sqrt{\xi_0 - \xi_1} - \sqrt{\xi_3 - \xi_1}) < T_1 < \infty \cdot$$

当 $B_3 < 0$ 时, 讨论情形类似, 故在此省略•

4 结　　论

本文导出了圆柱形容器中自由毛细重力表面波的二阶摄动方程, 3 个自由表面波共振的耦合作用方程及守恒律, 以及非退化情况下二阶作用方程的所有稳态解• 分析表明 3 波之间能量可能是周期性来回传递也可能是衰减或增长, 这取决于初始条件•

另外, 在表面波列无内共振情形下可以得到波的固有频率修正; 当 3 波之间发生内共振时, 在二阶作用方程退化情况下波的频率受到调制• 这些结果在作者硕士学位论文[9] 中有详细的讨论•

致谢　本文工作得到上海大学、上海市应用数学和力学研究所的乐嘉春副教授和戴世强教授的悉心指导和大力支持, 在此致以衷心谢意!

附　　录

自由毛细重力表面波的基本方程(6)、(7)中的系数定义如下:

$$M_{m_1n_1m_2n_2} = W_{m_1n_1}\delta_{m_1m_2}\delta_{n_1n_2} + \sum_{k=1}^{\infty} M_{m_1n_1m_2n_2}^{(i_1j_1\cdots i_kj_k)}\eta_{i_1j_1}\cdots\eta_{i_kj_k},$$

$$M_{m_1n_1m_2n_2}^{(i_1j_1\cdots i_kj_k)} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(\tanh k_{m_1n_1}h + \tanh k_{m_2n_2}h)\dfrac{(k_{m_1n_1}+k_{m_2n_2})^{k-1}}{(k)!}[D_{m_1n_1m_2n_2}^{(i_1j_1\cdots i_kj_k)} + k_{m_1n_1}k_{m_2n_2}\times \\ \quad C_{m_1n_1m_2n_2i_1j_1\cdots i_kj_k}] + \dfrac{1}{2}(\tanh k_{m_1n_1}h - \tanh k_{m_2n_2}h)\dfrac{(k_{m_1n_1}-k_{m_2n_2})^{k-1}}{(k)!}\times \\ \quad [D_{m_1n_1m_2n_2}^{(i_1j_1\cdots i_kj_k)} - k_{m_1n_1}k_{m_2n_2}C_{m_1n_1m_2n_2i_1j_1\cdots i_kj_k}] \qquad (k\text{ 为偶数}), \\ \dfrac{1}{2}(1+\tanh k_{m_1n_1}h\cdot\tanh k_{m_2n_2}h)\dfrac{(k_{m_1n_1}+k_{m_2n_2})^{k-1}}{(k)!}[D_{m_1n_1m_2n_2}^{(i_1j_1\cdots i_kj_k)} + k_{m_1n_1}k_{m_2n_2}\times \\ \quad C_{m_1n_1m_2n_2i_1j_1\cdots i_kj_k}] + \dfrac{1}{2}(1-\tanh k_{m_1n_1}h\cdot\tanh k_{m_2n_2}h)\dfrac{(k_{m_1n_1}-k_{m_2n_2})^{k-1}}{(k)!}\times \\ \quad [D_{m_1n_1m_2n_2}^{(i_1j_1\cdots i_kj_k)} - k_{m_1n_1}k_{m_2n_2}C_{m_1n_1m_2n_2i_1j_1\cdots i_kj_k}] \qquad (k\text{ 为奇数}), \end{cases}$$

$$P_{mnm_1n_1} = \delta_{mm_1}\delta_{nn_1} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\substack{i_1\cdots i_k\\ j_1\cdots j_k}} P_{mnm_1n_1}^{(i_1j_1\cdots i_kj_k)}\eta_{i_1j_1}\cdots\eta_{i_kj_k},$$

$$P_{mnm_1n_1}^{(i_1j_1\cdots i_kj_k)} = \begin{cases} \dfrac{(k_{mn})^k}{k!}C_{mnm_1n_1i_1j_1\cdots i_kj_k} & (k\text{ 为偶数}, k>0), \\ \dfrac{(k_{mn})^k}{k!}\tanh k_{mn}hC_{mnm_1n_1i_1j_1\cdots i_kj_k} & (k\text{ 为奇数}), \end{cases}$$

$$N_{m_1n_1m_2n_2mn} = D_{m_1n_1m_2n_2}^{mn} + W_{m_1n_1}W_{m_2n_2}C_{m_1n_1m_2n_2mn} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\substack{i_1\cdots i_k\\ j_1\cdots j_k}} N_{m_1n_1m_2n_2mn}^{i_1j_1\cdots i_kj_k}\eta_{i_1j_1}\cdots\eta_{i_kj_k},$$

$$N_{m_1n_1m_2n_2mn}^{i_1j_1\cdots i_kj_k} = \Bigg[\frac{(k_{m_1n_1}+k_{m_2n_2})^k\sinh(k_{m_1n_1}+k_{m_2n_2})h + (k_{m_1n_1}-k_{m_2n_2})^k\sinh(k_{m_1n_1}-k_{m_2n_2})h}{2k!\cosh k_{m_1n_1}h\cosh k_{m_2n_2}h}\times$$

$$D_{m_1n_1m_2n_2}^{(mni_1j_1\cdots i_kj_k)} + C_{m_1n_1m_2n_2mni_1j_1\cdots i_kj_k}k_{m_1n_1}k_{m_2n_2}\times$$

$$\left(\frac{(k_{m_1n_1}+k_{m_2n_2})^k\sinh(k_{m_1n_1}+k_{m_2n_2})h}{2k!\cosh k_{m_1n_1}h\cosh k_{m_2n_2}h} - \frac{(k_{m_1n_1}-k_{m_2n_2})^k\sinh(k_{m_1n_1}-k_{m_2n_2})h}{2k!\cosh k_{m_1n_1}\cosh k_{m_2n_2}h}\right)\Bigg]$$

$$(k\text{ 为偶数}),$$

$$N_{m_1n_1m_2n_2mn}^{i_1j_1\cdots i_kj_k} = \frac{(k_{m_1n_1}+k_{m_2n_2})^k\cosh(k_{m_1n_1}+k_{m_2n_2})h + (k_{m_1n_1}-k_{m_2n_2})^k\cosh(k_{m_1n_1}-k_{m_2n_2})h}{2k!\cosh k_{m_1n_1}h\cosh k_{m_2n_2}h}\times$$

$$D_{m_1n_1m_2n_2}^{(mni_1j_1\cdots i_kj_k)} + C_{m_1n_1m_2n_2mni_1j_1\cdots i_kj_k}k_{m_1n_1}k_{m_2n_2}\times$$

$$\left(\frac{(k_{m_1n_1}+k_{m_2n_2})^k\cosh(k_{m_1n_1}+k_{m_2n_2})h}{2k!\cosh k_{m_1n_1}h\cosh k_{m_2n_2}h} - \frac{(k_{m_1n_1}-k_{m_2n_2})^k\cosh(k_{m_1n_1}-k_{m_2n_2})h}{2k!\cosh k_{m_1n_1}h\cosh k_{m_2n_2}h}\right)$$

$$(k\text{ 为奇数})\cdot$$

[参 考 文 献]

[1] McGoldrick L F. Resonant interactions among capillary_gravity waves[J]. J Fluid Mech, 1965, **21**: 305—331.

[2] Hasselmann K. On the nonlinear energy transfer in a gravity wave spectrum_Part 1: General theory [J]. J Fluid Mech, 1962, **12**: 481—500.

[3] Annenkov S Yu, Shrira V I. Physical mechanisms for sporadic wind wave horse_shoe patterns[J].

Eur J Mech B/Fluids, 1999, **18**(3): 463—474.

[4] Miles J W. Nonlinear surface waves in closed basins[J]. J Fluid Mech, 1976, **75**: 419—448.

[5] Miles J W. Internally resonant surface waves in a circular cylinder[J]. J Fluid Mech, 1984, **149**: 1—14.

[6] Hammack J L, Henderson D M. Resonant interactions among surface water waves[J]. Annu Rev Fluid Mech, 1993, **25**: 55—97.

[7] Benielli D, Sommeria J. Excitation and breaking of internal gravity waves by parametric instability [J]. J Fluid Mech, 1998, **374**: 117—144.

[8] Shivamoggi B K. Non_linear resonant three_wave interactions of sound waves[J]. J Sound Vib, 1994, **176**(2): 271—277.

[9] MA Chen_ming. Resonant interactions of free and forced capillary_gravity surface waves in a circular cylindrical basin[D]. the dissertation submitted for the Master's Degree. Shanghai: Shanghai University, 2002.

Internal Resonant Interactions of Three Free Surface_Waves in a Circular Cylindrical Basin

MA Chen_ming[1,2]

(1. Institute of Mathematics, Fudan University, Shanghai 200433, P. R. China;

2. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, P. R. China)

Abstract: The basic equations of free capillary_gravity surface_waves in a circular cylindrical basin were derived from Luke's principle. Taking Galerkin's expansion of the velocity potential and the free surface elevation, two_order perturbation equations were derived by use of expansion of multiple scale. The nonlinear interactions with two_order internal resonance of three free surface_waves were discussed based on the above. The results include: derivation of the couple equations of resonant interactions among three waves and the conservation laws; analysis of the positions of equilibrium points in phase plane; study of the resonant parameters and the non_resonant parameters respectively in all kinds of circumstances; derivation of the stationary solutions of second_order interaction equations corresponding to different parameters and analysis of the stability property of the solutions; discussion of the effective solutions only in the limited time range. The analysis makes it clear that the energy transformation mode among three waves differs because of the different initial conditions under non-trivial circumstance. The energy may either exchange among three waves periodically or damp or increase in single waves.

Key words: free surface_wave; internal resonant interaction; stationary solution