应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2003) 12_1258_09

Banach 空间中几乎渐近非扩张型映象的不动点的迭代逼近*

曾六川

(上海师范大学 数学系, 上海 200234)

(张石生推荐)

摘要: 在 Banach 空间中引入了一类新的几乎渐近非扩张型映象, 概括了 Banach 空间中若干熟知的非线性的 Lipschitz 映象类与非 Lipschitz 映象类成特例; 例如, 熟知的非扩张映象类, 渐近非扩张映象类与渐近非扩张型映象类• 考虑了用于逼近几乎渐近非扩张型映象不动点的带误差的修改了的 Ishikawa 迭代序列的收敛性问题• 关于 Banach 空间范数的 S. S. Chang 的不等式与 H. K. Xu 的不等式皆被用于做精确不动点与近似不动点间的误差估计• 而且, 张石生教授用于做带误差的修改了的 Ishikawa 迭代序列收敛性分析的方法(应用数学和力学, 2001, **22**(1) : 23—31) 被推广到几乎渐近非扩张型映象的情况• 给出了用于求一致凸 Banach 空间中几乎渐近非扩张型映象不动点的带误差的修改了的 Ishikawa 迭代序列的新的收敛判据• 并且, 由该判据, 立即得到了此类映象的带误差的修改了的 Mann 迭代序列的新的收敛判据• 上述结果统一、改进与推广了张石生教授关于用带误差的修改了的 Ishikawa 与 Mann 迭代序列来逼近渐近非扩张型映象不动点方面的结果•

关 键 词: 几乎渐近非扩张型映象; 不动点; 带误差的修改了的 Ishikawa 迭代序列; 带误差的修改了的 Mann 迭代序列

中图分类号: O177.91 文献标识码: A

引 言

本文始终假设 E 是实的 Banach 空间, E^* 是 E 的对偶空间, D 是 E 的非空子集, 且 $J: E \to 2^{E^*}$ 是定义如下的正规对偶映象

$$J(x) = \left\{f \in E^*: \langle x, f\rangle = \|x\| \cdot \|f\|, \ \|f\| = \|x\|\right\}, \qquad \forall x \in E.$$

定义 1 设 $T: D \to D$ 是一个映象•

1) T 称为渐近非扩张映象[1], 如果存在序列 $\left\{k_n\right\} \subset [1, \infty)$, $\lim_{n\to\infty} k_n = 1$, 使得

$$\|T^n x - T^n y\| \leqslant k_n \|x - y\|, \qquad \forall x, y \in D \text{ 及 } n \geqslant 0; \tag{1}$$

2) T 称为渐近非扩张型映象[2], 如果

$$\lim_{n\to\infty}\sup \sup_{x\in D}\left\{\|T^n x - T^n y\| - \|x - y\|\right\} \leqslant 0, \qquad \forall y \in D; \tag{2}$$

---

* 收稿日期: 2001_07_24; 修订日期: 2003_06_27
基金项目: 高等学校优秀青年教师教学和科研奖励基金资助项目; 上海市高等学校科学技术发展基金资助项目; 上海市科委重大项目基金资助项目
作者简介: 曾六川(1965—) , 男, 湖南人, 教授, 博士, 博士生导师, 已发表论文 70 余篇 (E_mail: zenglc@hotmail.com) .

3) T 称为几乎渐近非扩张型映象, 若存在非负序列$\{\gamma_n\} \subset [0, 1]$ 使得对每个 $y \in D$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\sup \sup_{x\in D}\{ \|T^n x - T^n y\|^2 - \|x - y\|^2 - \gamma_n \|T^n x - T^n y - (x - y)\|^2\} \leqslant 0; \tag{3}$$

4) T 称为一致L_Lipschitz 映象, 其中, L 是一个正数, 如果

$$\|T^n x - T^n y\| \leqslant L\|x - y\|, \qquad \forall x, y \in D \text{ 及 } n \geqslant 0. \tag{4}$$

注 1 (i) 当 $T: D \to D$ 是非扩张映象时, T 是具有常数列$\{1\}$ 的渐近非扩张映象; (ii) 当 $T: D \to D$ 是具有满足 $k_n \to 1$ 的序列$\{k_n\} \subset [1, \infty)$ 的渐近非扩张映象时, T 必是具有常数$L = \sup_{n\geqslant 1}\{k_n\}$ 的一致L_Lipschitz 的渐近非扩张型映象; (iii) 当 $T: D \to D$ 是渐近非扩张型映象时, $T: D \to D$ 是具有常数列$\{\gamma_n\}$ (其中, $\gamma_n = 0$ $\forall n \geqslant 0$) 的几乎渐近非扩张型映象.

定义 2[3] 一个 Banach 空间 E 称为一致凸的, 如果 E 的凸性模

$$\delta_E(\varepsilon) = \inf\{1 - \|x + y\|/2: \|x\| = \|y\| = 1, \text{ 且 } \|x - y\| \geqslant \varepsilon\} > 0, \quad \forall \varepsilon \in (0, 2].$$

注 2[4] 应该指出的是, 如果 E 是实的一致凸 Banach 空间, 则 E 是自反且严格凸的 Banacn 空间. 因此, 正规对偶映象 $J: E \to 2^{E^*}$ 是单值的.

定义 3 设 D 是E 的非空闭凸子集. D 称为E 的收缩, 如果存在从 E 到D 上的连续映象 Q 使得$Qx = x$, $\forall x \in D$. 而且, Q 称为E 到D 上的收缩映象.

定义 4 设D 是E 的非空闭凸子集, $T: D \to D$ 是一个映象, Q 是E 到D 上的非扩张收缩映象, $\{u_n\}$ 与$\{v_n\}$ 是E 中的两个序列, 满足下列条件:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\|u_n\| < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\|v_n\| < \infty. \tag{5}$$

而且, $\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$ 是[0, 1]中的两个序列.

1) 序列$\{x_n\} \subset D$ 定义如下:

$$\begin{cases} x_0 \in D, \ x_{n+1} = Qp_n, \\ p_n = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T^n Q y_n + u_n, \qquad n \geqslant 0, \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T^n x_n + v_n, \end{cases} \tag{6}$$

$\{x_n\}$ 称为带误差的修改了的 Ishikawa 迭代序列;

2) 序列$\{x_n\}$ 定义如下:

$$\begin{cases} x_0 \in D, \ x_{n+1} = Qp_n, \\ p_n = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T^n x_n + u_n, \qquad n \geqslant 0, \end{cases} \tag{7}$$

$\{x_n\}$ 称为带误差的修改了的 Mann 迭代序列;

3) 特别地, 若 $u_n = v_n = 0$, $\forall n \geqslant 0$, 则由(6) 或(7) (其中, $Q = I$) 定义的序列$\{x_n\} \subset D$ 称为修改了的 Ishikawa 迭代序列或修改了的 Mann 迭代序列.

注 3 Reich 给出了下列结果(见[5, 定理5]): 设 E 既是一致凸又是一致光滑的Banach 空间. 设 $T: D(T) \subset E \to E$ 是m_增生映象. 则对每个 $x \in E$, 强极限$\lim_{r\to 0} J_r(x)$ 存在, 其中 $J_r = (I + rT)^{-1}$. 若记强极限$\lim_{r\to 0} J_r(x)$ 为 Qx, 则 $Q: E \to \mathrm{cl}(D(T))$ 是 E 到 $\mathrm{cl}(D(T))$ 上的非扩张收缩映象, 其中 $\mathrm{cl}(D(T))$ 表示 $D(T)$ 的闭包. 现在, 由 Reich[6], 我们又有结果: 假设 E 是实的一致凸 Banach 空间, D 是E 的闭凸子集, 且 $A: D(A) = D \to E$ 是一个 m_增生映象. 则存在 E 到D 上的非扩张收缩映象.

渐近非扩张映象与渐近非扩张型映象的概念分别由Goebel_Kirk[1]与Kirk[2]引入• 它们密切相关于Banach空间中的不动点理论• 一个归功于Goebel_Kirk[1]的早期基本的结果告知我们, 一致凸Banach空间的非空有界闭凸子集的每个渐近非扩张自映象都有不动点•

关于渐近非扩张映象或渐近非扩张型映象的不动点的迭代逼近问题已被许多作者在Hilbert空间或一致凸Banach空间的背景中研究过; 参见文[1~2,7~12]• 最近, 张石生教授[4]研究了一致凸Banach空间中渐近非扩张型映象的不动点迭代逼近• 他的结果推广与拓宽了[1,7,9~11]等文中的相应结果•

本文在Banach空间中引入一类新的几乎渐近非扩张型映象• 这类映象概括了Banach空间中熟知的渐近非扩张型映象类成特例• 受张石生教授[4]的启发, 本文证明了一致凸Banach空间中几乎渐近非扩张型映象的不动点的迭代逼近定理• 本文结果在下列方面统一、改进与推广了张石生教授的结果[4]: (ⅰ) 把渐近非扩张型映象拓宽到了几乎渐近渐近非扩张型映象的情况• 事实上, 当 $\gamma_n=0$, $\forall n\geqslant 0$ 时, 几乎渐近非扩张型映象化为渐近非扩张型映象; (ⅱ) 用条件 $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$ 取代了限制 $0<\varepsilon\leqslant\alpha_n\leqslant 1-\varepsilon$, $\forall n\geqslant 0$• 另一方面, 本文结果也推广与拓宽了[1,7,9~11]等文中的相应结果•

下列引理在证明本文主要结果时将发挥重要作用•

引理1[13]　设 E 是实Banach空间, $J:E\to 2^{E^*}$ 是正规对偶映象, 则对任意 $x,y\in E$ 及任意 $j(x+y)\in J(x+y)$, 有

$$\|x+y\|^2\leqslant\|x\|^2+2\langle y,j(x+y)\rangle• \tag{8}$$

引理2([3,定理2])　设 $p>1$ 与 $r>0$ 是两个固定实数• 则Banach空间 E 是一致凸的当且仅当, 存在连续的严格增加的凸函数 $g:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $g(0)=0$ 使得

$$\|\lambda x+(1-\lambda)y\|^p\leqslant\lambda\|x\|^p+(1-\lambda)\|y\|^p-\omega_p(\lambda)g(\|x-y\|), \tag{9}$$

$\forall x,y\in B(0,r)$ 及 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, 其中, $B(0,r)$ 是 E 中的中心在零点且半径为 r 的闭球,

$$\omega_p(\lambda)=\lambda^p(1-\lambda)+\lambda(1-\lambda)^p• \tag{10}$$

引理3([4,定理1.3])　设 E 是实Banach空间, D 是 E 的非空闭凸子集, Q 是 E 到 D 上的非扩张收缩映象, 且 $T:D\to D$ 是一致 L_Lipschitz映象, 其中, $L>0$• 设 $\{x_n\}$ 是由(6)所定义的带误差的修改了的Ishikawa迭代序列, 其中, $\{u_n\}$、$\{v_n\}$ 是 E 中满足条件(5)的两个有界序列• 则由 $\|x_n-T^nx_n\|\to 0$ 可得 $\|x_n-Tx_n\|\to 0$•

1　几乎渐近非扩张型映象的不动点的迭代逼近

定义1.1　设 E 是实的Banach空间, D 是 E 的闭子集• 映象 $T:D\to D$ 称为半紧的, 如果对任何满足 $\|x_n-Tx_n\|\to 0\ (n\to\infty)$ 的有界序列 $\{x_n\}\subset D$, 都有子列 $\{x_{n_i}\}\subset\{x_n\}$ 使得

$$x_{n_i}\to x^*\in D\qquad(n_i\to\infty)• \tag{11}$$

定理1.1　设 E 是实的一致凸Banach空间, D 是 E 的有界闭凸子集, $T:D\to D$ 是半紧的一致 L_Lipschitz的几乎渐近非扩张型映象, 且具有非负数列 $\{\gamma_n\}\subset[0,1]$• 又设 $Q:E\to D$ 是 E 到 D 上的非扩张收缩映象, $\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$ 是 $[0,1]$ 中的两个序列, 且满足下列条件: (ⅰ) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$; (ⅱ) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\gamma_n<\infty$; (ⅲ) $\varepsilon\leqslant\beta_n\leqslant 1-\varepsilon$, $\forall n\geqslant 0$, 对某个 $\varepsilon>0$• 假设 $F(T)\neq$

中 ($F(T)$ 是 T 在 D 中的所有不动点之集), 且 T 满足下列条件:

(*) 对任何子列 $\{x_{n_i}\} \subset \{x_n\}$, 当 $\|T^{n_i}x_{n_i} - x_{n_i}\| \to 0$ 时, 必有 $\|Tx_{n_i} - x_{n_i}\| \to 0$. 则由 (6) 所定义的带误差的修改了的 Ishikawa 迭代序列 $\{x_n\}$ 强收敛到 T 在 D 中的某个不动点 x^*.

证　取 $q \in F(T)$. 由于 D 有界, $\{u_n\}$、$\{v_n\}$ 是 E 中满足条件 (5) 的两个有界序列, 且 $\{x_n\}$、$\{T^nQy_n\}$、$\{T^nx_n\}$ 皆在 D 中, 因此, 存在 $r > 0$ 使得

$$D \cup \{x_n - q + u_n\} \cup \{T^nQy_n - q + u_n\} \cup \{T^nx_n - q + v_n\} \cup \{x_n - q + v_n\} \subset B(0, r),$$

其中, $B(0, r)$ 是 E 中的中心在零点且半径为 r 的闭球.

取 $p = 2$ 且 $\lambda = \alpha_n$, 据引理 2 及 (6), 有

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - q\|^2 &= \|Qp_n - Qq\|^2 \leqslant \|p_n - q\|^2 = \\ &\|(1-\alpha_n)(x_n - q + u_n) + \alpha_n(T^nQy_n - q + u_n)\|^2 \leqslant \\ &(1-\alpha_n)\|x_n - q + u_n\|^2 + \alpha_n\|T^nQy_n - q + u_n\|^2 - \\ &\omega_2(\alpha_n)g(\|T^nQy_n - x_n\|) \leqslant \\ &(1-\alpha_n)\|x_n - q + u_n\|^2 + \alpha_n\|T^nQy_n - q + u_n\|^2.\end{aligned} \tag{12}$$

因 $\{x_n - q + u_n\}$ 与 $\{T^nQy_n - q + u_n\}$ 都是 $B(0, r)$ 中的序列, 故由引理 1, 有

$$\begin{aligned}\|x_n - q + u_n\|^2 &\leqslant \|x_n - q\|^2 + 2\langle u_n, J(x_n - q + u_n)\rangle \leqslant \\ &\|x_n - q\|^2 + 2\|u_n\| \cdot \|x_n - q + u_n\| \leqslant \\ &\|x_n - q\|^2 + 2r\|u_n\|;\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\|T^nQy_n - q + u_n\|^2 &\leqslant \|T^nQy_n - q\|^2 + 2\langle u_n, J(T^nQy_n - q + u_n)\rangle \leqslant \\ &\|T^nQy_n - q\|^2 + 2r\|u_n\|.\end{aligned} \tag{14}$$

把 (13)、(14) 代入 (12) 并化简, 可得

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - q\|^2 &\leqslant (1-\alpha_n)\|x_n - q\|^2 + \alpha_n\|T^nQy_n - q\|^2 + 2r\|u_n\| = \\ &\|x_n - q\|^2 + \alpha_n\{\|T^nQy_n - q\|^2 - \|Qy_n - q\|^2\} + \\ &\alpha_n\{\|Qy_n - q\|^2 - \|x_n - q\|^2\} + 2r\|u_n\| = \\ &\|x_n - q\|^2 + \alpha_n\{\|T^nQy_n - T^nq\|^2 - \|Qy_n - q\|^2 - \\ &\gamma_n\|T^nQy_n - T^nq - (Qy_n - q)\|^2\} + \alpha_n\gamma_n\|Qy_n - T^nQy_n\|^2 + \\ &\alpha_n\{\|Qy_n - q\|^2 - \|x_n - q\|^2\} + 2r\|u_n\|.\end{aligned} \tag{15}$$

首先, 考虑在 (15) 中的右边的第 4 项. 取 $p = 2$, 由引理 2, 有

$$\begin{aligned}\|Qy_n - q\|^2 - \|x_n - q\|^2 &= \|Qy_n - Qq\|^2 - \|x_n - q\|^2 \leqslant \\ &\|y_n - q\|^2 - \|x_n - q\|^2 = \\ &\|(1-\beta_n)(x_n - q + v_n) + \beta_n(T^nx_n - q + v_n)\|^2 - \|x_n - q\|^2 \leqslant \\ &(1-\beta_n)\|x_n - q + v_n\|^2 + \beta_n\|T^nx_n - q + v_n\|^2 - \\ &\omega_2(\beta_n)g(\|x_n - T^nx_n\|) - \|x_n - q\|^2.\end{aligned} \tag{16}$$

由于对一切 $n \geqslant 0$, $x_n - q + v_n \in B(0, r)$ 且 $T^nx_n - q + v_n \in B(0, r)$, 故由引理 1 推得

$$\begin{aligned}\|x_n - q + v_n\|^2 &\leqslant \|x_n - q\|^2 + 2\langle v_n, J(x_n - q + v_n)\rangle \leqslant \\ &\|x_n - q\|^2 + 2\|v_n\| \cdot r;\end{aligned} \tag{17}$$

$$\|T^nx_n - q + v_n\|^2 \leqslant \|T^nx_n - q\|^2 + 2\langle v_n, J(T^nx_n - q + v_n)\rangle \leqslant$$

$$\|T^n x_n - q\|^2 + 2r\|v_n\|. \tag{18}$$

把(17)、(18)代入(16)并化简,可得

$$\begin{aligned}
&\|Qy_n - q\|^2 - \|x_n - q\|^2 \leqslant \\
&\quad \beta_n\left\{\|T^n x_n - q\|^2 - \|x_n - q\|^2\right\} + 2r\|v_n\| - \beta_n(1-\beta_n)g(\|x_n - T^n x_n\|) \leqslant \\
&\quad \beta_n\left\{\|T^n x_n - q\|^2 - \|x_n - q\|^2 - \gamma_n\|T^n x_n - T^n q - (x_n - q)\|^2\right\} + \\
&\quad \beta_n\gamma_n\|x_n - T^n x_n\|^2 + 2r\|v_n\| - \beta_n(1-\beta_n)g(\|x_n - T^n x_n\|).
\end{aligned} \tag{19}$$

又把(19)代入(15)并化简,可得

$$\begin{aligned}
&\|x_{n+1} - q\|^2 \leqslant \|x_n - q\|^2 + \alpha_n\left\{\|T^n Qy_n - T^n q\|^2 - \|Qy_n - q\|^2 - \right.\\
&\quad \left.\gamma_n\|T^n Qy_n - T^n q - (Qy_n - q)\|^2\right\} + \alpha_n\gamma_n\|Qy_n - T^n Qy_n\|^2 + \\
&\quad \alpha_n\left\{\beta_n\left(\|T^n x_n - T^n q\|^2 - \|x_n - q\|^2 - \gamma_n\|T^n x_n - T^n q - (x_n - q)\|^2\right) + \right.\\
&\quad \left.\beta_n\gamma_n\|x_n - T^n x_n\|^2 + 2r\|v_n\| - \beta_n(1-\beta_n)g(\|x_n - T^n x_n\|)\right\} + 2r\|u_n\| \leqslant \\
&\quad \|x_n - q\|^2 - \alpha_n\beta_n(1-\beta_n)g(\|x_n - T^n x_n\|) + \\
&\quad \alpha_n\left\{\|T^n Qy_n - T^n q\|^2 - \|Qy_n - q\|^2 - \gamma_n\|T^n Qy_n - T^n q - (Qy_n - q)\|^2\right\} + \\
&\quad \alpha_n\beta_n\left\{\|T^n x_n - T^n q\|^2 - \|x_n - q\|^2 - \gamma_n\|T^n x_n - T^n q - (x_n - q)\|^2\right\} + \\
&\quad \alpha_n\gamma_n\|Qy_n - T^n Qy_n\|^2 + \alpha_n\beta_n\gamma_n\|x_n - T^n x_n\|^2 + 2r(\|u_n\| + \|v_n\|).
\end{aligned}$$

因$\{x_n\}$、$\{Qy_n\}$、$\{T^n Qy_n\}$、$\{T^n x_n\}$皆是$D \subset B(0, r)$中的序列,故有

$$\alpha_n\gamma_n\|Qy_n - T^n Qy_n\|^2 + \alpha_n\beta_n\gamma_n\|x_n - T^n x_n\|^2 \leqslant 8r^2\alpha_n\gamma_n.$$

利用条件(iii)来化简,可得

$$\begin{aligned}
&\|x_{n+1} - q\|^2 \leqslant \|x_n - q\|^2 - \alpha_n\varepsilon^2 g(\|x_n - T^n x_n\|) + \\
&\quad \alpha_n\left\{\|T^n Qy_n - T^n q\|^2 - \|Qy_n - q\|^2 - \gamma_n\|T^n Qy_n - T^n q - (Qy_n - q)\|^2\right\} + \\
&\quad \alpha_n\beta_n\left\{\|T^n x_n - T^n q\|^2 - \|x_n - q\|^2 - \gamma_n\|T^n x_n - T^n q - (x_n - q)\|^2\right\} + \\
&\quad 8r^2\alpha_n\gamma_n + 2r(\|u_n\| + \|v_n\|), \qquad \forall n \geqslant 0.
\end{aligned} \tag{20}$$

记 $\sigma = \inf\limits_{n \geqslant 0}\|x_n - T^n x_n\|$.

今断言 $\sigma = 0$. 事实上,如若不然,则 $\sigma > 0$. 于是,$\|x_n - T^n x_n\| \geqslant \sigma > 0$, $\forall n \geqslant 0$. 由于 g 是严格增加函数,$g(0) = 0$, 所以,

$$g(\|x_n - T^n x_n\|) \geqslant g(\sigma) > 0, \qquad \forall n \geqslant 0. \tag{21}$$

从而,由(20)与(21)可得

$$\begin{aligned}
&\|x_{n+1} - q\|^2 \leqslant \|x_n - q\|^2 - \alpha_n\varepsilon^2 g(\sigma) + \\
&\quad \alpha_n\left\{\|T^n Qy_n - T^n q\|^2 - \|Qy_n - q\|^2 - \gamma_n\|T^n Qy_n - T^n q - (Qy_n - q)\|^2\right\} + \\
&\quad \alpha_n\beta_n\left\{\|T^n x_n - T^n q\|^2 - \|x_n - q\|^2 - \gamma_n\|T^n x_n - T^n q - (x_n - q)\|^2\right\} + \\
&\quad 8r^2\alpha_n\gamma_n + 2r(\|u_n\| + \|v_n\|), \qquad \forall n \geqslant 0.
\end{aligned} \tag{22}$$

因 T 是几乎渐近非扩张型映象,故对每个 $y \in D$, 有

$$\limsup_{n\to\infty}\sup_{x \in D}\left\{\|T^n x - T^n y\|^2 - \|x - y\|^2 - \gamma_n\|T^n x - T^n y - (x - y)\|^2\right\} \leqslant 0. \tag{23}$$

从而,对给定的 $q \in F(T) \subset D$ 及给定的$(\varepsilon^2/4)g(\sigma) > 0$, 存在自然数 n_0 使得当 $m \geqslant n_0$ 时,有

$$\sup_{m \geqslant n_0}\sup_{x \in D}\left\{\|T^m x - T^m q\|^2 - \|x - q\|^2 - \gamma_m\|T^m x - T^m q - (x - q)\|^2\right\} < \frac{\varepsilon^2}{4}g(\sigma). \tag{24}$$

由于对一切 $n \geqslant 0$, $Qy_n \in D$ 及 $x_n \in D$, 所以, 由(24) 推得, 对一切 $n \geqslant n_0$, 有

$$\|T^nQy_n - T^nq\|^2 - \|Qy_n - q\|^2 - \gamma_n\|T^nQy_n - T^nq - (Qy_n - q)\|^2 < \frac{\varepsilon^2}{4}g(\sigma),$$

$$\|T^nx_n - T^nq\|^2 - \|x_n - q\|^2 - \gamma_n\|T^nx_n - T^nq - (x_n - q)\|^2 < \frac{\varepsilon^2}{4}g(\sigma).$$

于是, 由(22) 可得

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - q\|^2 \leqslant{}& \|x_n - q\|^2 - \alpha_n\varepsilon^2 g(\sigma) + \alpha_n\frac{\varepsilon^2}{4}g(\sigma) + \\ & \alpha_n\beta_n\frac{\varepsilon^2}{4}g(\sigma) + 8r^2\alpha_n\gamma_n + 2r(\|u_n\| + \|v_n\|) \leqslant \\ & \|x_n - q\|^2 - \alpha_n\varepsilon^2 g(\sigma) + \alpha_n\frac{\varepsilon^2}{4}g(\sigma) + \\ & \alpha_n\frac{\varepsilon^2}{4}g(\sigma) + 8r^2\alpha_n\gamma_n + 2r(\|u_n\| + \|v_n\|) \leqslant \\ & \|x_n - q\|^2 - \alpha_n\frac{\varepsilon^2}{2}g(\sigma) + 8r^2\alpha_n\gamma_n + 2r(\|u_n\| + \|v_n\|), \qquad \forall n \geqslant n_0,\end{aligned}$$

即, 对一切 $n \geqslant n_0$,

$$\alpha_n\frac{\varepsilon^2}{2}g(\sigma) \leqslant \|x_n - q\|^2 - \|x_{n+1} - q\|^2 + 8r^2\alpha_n\gamma_n + 2r(\|u_n\| + \|v_n\|).$$

设 $m \geqslant n_0$ 是任给的一个自然数, 则有

$$\begin{aligned}\sum_{n=n_0}^{m}\frac{\varepsilon^2}{2}g(\sigma)\alpha_n \leqslant{}& \|x_{n_0} - q\|^2 - \|x_{m+1} - q\|^2 + \sum_{n=n_0}^{m}8r^2\alpha_n\gamma_n + \\ & 2r\left(\sum_{n=n_0}^{m}\|u_n\| + \sum_{n=n_0}^{m}\|v_n\|\right) \leqslant \\ & \|x_{n_0} - q\|^2 + \sum_{n=n_0}^{m}8r^2\alpha_n\gamma_n + 2r\left(\sum_{n=n_0}^{m}\|u_n\| + \sum_{n=n_0}^{m}\|v_n\|\right).\end{aligned}$$

令 $m \to \infty$, 则由条件(ⅰ) 与(ⅱ) 即得

$$\begin{aligned}\infty = \sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{\varepsilon^2}{2}g(\sigma)\alpha_n \leqslant{}& \|x_{n_0} - q\|^2 + \sum_{n=n_0}^{\infty}8r^2\alpha_n\gamma_n + \\ & 2r\left(\sum_{n=n_0}^{\infty}\|u_n\| + \sum_{n=n_0}^{\infty}\|v_n\|\right) < \infty.\end{aligned}$$

此为矛盾. 所以, $\sigma = 0$. 据 σ 的定义, 存在子列 $\{x_{n_j}\} \subset \{x_n\}$ 使得

$$\|x_{n_j} - T^{n_j}x_{n_j}\| \to 0 \quad (n_j \to \infty). \tag{25}$$

由条件(*) 得知

$$\|x_{n_j} - Tx_{n_j}\| \to 0 \quad (n_j \to \infty).$$

因 T 是半紧的, 故存在子列 $\{x_{n_i}\} \subset \{x_{n_j}\}$ 使得

$$x_{n_i} \to x^* \in D \quad (n_i \to \infty). \tag{26}$$

据 T 的连续性, 由(26) 推得

$$\lim_{n_i\to\infty}\|x_{n_i} - Tx_{n_i}\| = \|x^* - Tx^*\| = 0,$$

即, x^* 是 T 在 D 中的不动点. 此外, 又有

$$\|T^{n_i}x_{n_i} - x^*\| \leqslant \|T^{n_i}x_{n_i} - x_{n_i}\| + \|x_{n_i} - x^*\| \to 0 \quad (n_i \to \infty).$$

故由(6)与(25)可得

$$y_{n_i} = x_{n_i} - \beta_{n_i}(x_{n_i} - T^{n_i}x_{n_i}) + v_{n_i} \to x^* \qquad (n_i \to \infty).$$

今在(20)中,取 $q = x^*$,可知

$$\begin{aligned}\|x_{n_i+1} - x^*\|^2 \leqslant{}& \|x_{n_i} - x^*\|^2 - \alpha_{n_i}\varepsilon^2 g(\|x_{n_i} - T^{n_i}x_{n_i}\|) + \\ & \alpha_{n_i}\Big\{\|T^{n_i}Qy_{n_i} - T^{n_i}x^*\|^2 - \|Qy_{n_i} - x^*\|^2 - \\ & \gamma_{n_i}\|T^{n_i}Qy_{n_i} - T^{n_i}x^* - (Qy_{n_i} - x^*)\|^2\Big\} + \\ & \alpha_{n_i}\beta_{n_i}\Big\{\|T^{n_i}x_{n_i} - T^{n_i}x^*\|^2 - \|x_{n_i} - x^*\|^2 - \gamma_{n_i}\|T^{n_i}x_{n_i} - \\ & T^{n_i}x^* - (x_{n_i} - x^*)\|^2\Big\} + 8r^2\alpha_{n_i}\gamma_{n_i} + 2r(\|u_{n_i}\| + \|v_{n_i}\|).\end{aligned} \tag{27}$$

由于 $T: D \to D$ 是几乎渐近非扩张型映象,故可得

$$\begin{aligned}\limsup_{n_i\to\infty}&\Big\{\|T^{n_i}Qy_{n_i} - T^{n_i}x^*\|^2 - \|Qy_{n_i} - x^*\|^2 - \\ & \gamma_{n_i}\|T^{n_i}Qy_{n_i} - T^{n_i}x^* - (Qy_{n_i} - x^*)\|^2\Big\} \leqslant \\ & \limsup_{n_i\to\infty}\sup_{x\in D}\Big\{\|T^{n_i}x - T^{n_i}x^*\|^2 - \|x - x^*\|^2 - \\ & \gamma_{n_i}\|T^{n_i}x - T^{n_i}x^* - (x - x^*)\|^2\Big\} \leqslant \\ & \limsup_{n\to\infty}\sup_{x\in D}\Big\{\|T^n x - T^n x^*\|^2 - \|x - x^*\|^2 - \\ & \gamma_n\|T^n x - T^n x^* - (x - x^*)\|^2\Big\} \leqslant 0.\end{aligned} \tag{28}$$

类似地,可证

$$\begin{aligned}\limsup_{n_i\to\infty}&\Big\{\|T^{n_i}x_{n_i} - T^{n_i}x^*\|^2 - \|x_{n_i} - x^*\|^2 - \\ & \gamma_{n_i}\|T^{n_i}x_{n_i} - T^{n_i}x^* - (x_{n_i} - x^*)\|^2\Big\} \leqslant 0.\end{aligned} \tag{29}$$

所以,纵观如上论证,可由(5)、(25)~(29),条件(ii)~(iii)及 g 的连续性推得

$$\lim_{n_i\to\infty}\|x_{n_i+1} - x^*\|^2 = 0,$$

即

$$x_{n_i+1} \to x^* \qquad (n_i \to \infty). \tag{30}$$

下证

$$T^{n_i+1}x_{n_i+1} \to x^* \qquad (n_i \to \infty). \tag{31}$$

事实上,由于 $T: D \to D$ 是一致 L_Lipschitz 映象,故有

$$\begin{aligned}\|T^{n_i+1}x_{n_i+1} - x^*\| ={}& \|T^{n_i+1}x_{n_i+1} - T^{n_i+1}x^*\| \leqslant \\ & L\|x_{n_i+1} - x^*\| \to 0 \qquad (n_i \to \infty).\end{aligned}$$

显然,易见

$$\|x_{n_i+1} - T^{n_i+1}x_{n_i+1}\| \leqslant \|x_{n_i+1} - x^*\| + \|T^{n_i+1}x_{n_i+1} - x^*\| \to 0 \qquad (n_i \to \infty).$$

于是,由(6)即得

$$y_{n_i+1} = x_{n_i+1} - \beta_{n_i+1}(x_{n_i+1} - T^{n_i+1}x_{n_i+1}) + v_{n_i+1} \to x^* \qquad (n_i \to \infty). \tag{32}$$

再在(20)中取 $q = x^*$,可知

$$\|x_{n_i+2} - x^*\|^2 \leqslant \|x_{n_i+1} - x^*\|^2 - \alpha_{n_i+1}\varepsilon^2 g(\|x_{n_i+1} - T^{n_i+1}x_{n_i+1}\|) +$$

$$\alpha_{n_i+1}\Big\{\|T^{n_i+1}Qy_{n_i+1}-T^{n_i+1}x^*\|^2-\|Qy_{n_i+1}-x^*\|^2-$$
$$\gamma_{n_i+1}\|T^{n_i+1}Qy_{n_i+1}-T^{n_i+1}x^*-(Qy_{n_i+1}-x^*)\|^2\Big\}+$$
$$\alpha_{n_i+1}\beta_{n_i+1}\Big\{\|T^{n_i+1}x_{n_i+1}-T^{n_i+1}x^*\|^2-\|x_{n_i+1}-x^*\|^2-$$
$$\gamma_{n_i+1}\|T^{n_i+1}x_{n_i+1}-T^{n_i+1}x^*-(x_{n_i+1}-x^*)\|^2\Big\}+$$
$$8r^2\alpha_{n_i+1}\gamma_{n_i+1}+2r(\|u_{n_i+1}\|+\|v_{n_i+1}\|). \tag{33}$$

利用如同证(30)的一样的论证, 由(33)也可证

$$x_{n_i+2}\to x^*\quad(n_i\to\infty). \tag{34}$$

又因据(6)可知

$$y_{n_i+2}=x_{n_i+2}-\beta_{n_i+2}(T^{n_i+2}x_{n_i+2}-x_{n_i+2})+v_{n_i+2}, \tag{35}$$

故利用如同证(32)的一样的论证, 由(35)也可证

$$y_{n_i+2}\to x^*\quad(n_i\to\infty).$$

照此继续下去, 由归纳法可证, 对每个 $m\geqslant 0$,

$$x_{n_i+m}\to x^*,\ y_{n_i+m}\to x^*\quad(n_i\to\infty).$$

从而, 有 $x_n\to x^*\ (n\to\infty)$, $y_n\to x^*\ (n\to\infty)$.

这就结束了定理 1.1 的证明.

定理 1.2 设 E 是实的一致凸 Banach 空间, D 是 E 的非空有界闭凸子集, 且 $T: D\to D$ 是具有非负数列 $\{\gamma_n\}\subset[0,1]$ 的半紧的一致 L_Lipschitz 的几乎渐近非扩张型映象. 又设 $\{\alpha_n\}$ 是 $[0,1]$ 中满足定理 1.1 中条件(i)、(ii)的序列, $Q: E\to D$ 是从 E 到 D 上的非扩张收缩映象. 假设 $F(T)\neq\varnothing$, 且 T 满足定理 1.1 中的条件(*). 则由(7)所定义的带误差的修改了的 Mann 迭代序列 $\{x_n\}$ 强收敛到 T 在 D 中的某个不动点 x^*.

注 1.1 在定理 1.1 中, 如果 $u_n=v_n=0$, $\forall n\geqslant 0$, 则条件"$Q: E\to D$ 是从 E 到 D 上的非扩张收缩映象"就无须假设了.

[参 考 文 献]

[1] Goebel K, Kirk W A. A fixed point theorem for asymptotically nonexpansive mappings[J]. Proc Amer Math Soc, 1972, **35**(1): 171—174.

[2] Kirk W A. Fixed point theorems for non_Lipschitzian mappings of asymptotically nonexpansive type [J]. Israel J Math, 1974, **11**: 339—346.

[3] Xu H K. Inequalities in Banach spaces with applications[J]. Nonlinear Anal TMA, 1991, **16**(12): 1127—1138.

[4] 张石生. 关于 Banach 空间中渐近非扩张型映象的不动点的迭代逼近问题[J]. 应用数学和力学, 2001, **22**(1): 25—34.

[5] Reich S. Strong convergence theorems for resolvents of accretive operators in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1980, **75**: 287—292.

[6] Reich S. Extension problems for accretive sets in Banach spaces[J]. J Funct Anal, 1997, **26**: 378—395.

[7] Chang S S, Cho Y J, Jung J S, et al. Iterative approximation of fixed point and solutions for strongly accretive and strongly pseudo_contractive mappings in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1998, **224**: 149—165.

[8] Xu H K. Existence and convergence for fixed points of mappings of asymptotically nonexpansive type [J]. Nonlinear Anal TMA, 1991, **16**(12): 1139—1146.

[9] Liu Q H. Convergence theorems of the sequence of iterates for asymptotically demi_contractive and hemi_contractive mapings[J]. Nonlinear Anal TMA, 1996, **26**(11): 1835—1842.

[10] Schu J. Iterative construction of fixed points of asymptotically nonexpansive mappings[J]. J Math Anal Appl, 1991, **158**: 407—413.

[11] ZENG Lu_chuan. A note on approximating fixed points of nonexpansive mappings by the Ishikawa iteration process[J]. J Math Anal Appl, 1998, **226**: 245—250.

[12] Kirk W A, Torrejon R. An asymptotically nonexpansive semigroup in Banach space[J]. Nonlinear Anal TMA, 1979, **1**: 111—121.

[13] Chang S S. Some problems and results in the study of nonlinear analysis[J]. Nonlinear Anal TMA, 1997, **30**: 4197—4208.

Iterative Approximation of Fixed Points for Almost Asymptotically Nonexpansive Type Mappings in Banach Spaces

ZENG Lu_chuan

(Department of Mathematics, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, P. R. China)

Abstract: A new class of almost asymptotically nonexpansive type mappings in Banach spaces is introduced, which includes a number of known classes of nonlinear Lipschitzian mappings and non_Lipschitzian mappings in Banach spaces as special cases; for example, the known classes of nonexpansive mappings, asymptotically nonexpansive mappings and asymptotically nonexpansive type mappings. The convergence problem of modified Ishikawa iterative sequences with errors for approximating fixed points of almost asymptotically nonexpansive type mappings is considered. Not only S. S. Chang's inequality but also H. K. Xu's one for the norms of Banach spaces are applied to make the error estimate between the exact fixed point and the approximate one. Moreover, ZHANG Shi_sheng's method(Applied Mathematics and Mechanics (English Edition), 2001, **22**(1): 25—34) for making the convergence analysis of modified Ishikawa iterative sequences with errors is extended to the case of almost asymptotically nonexpansive type mappings. The new convergence criteria of modified Ishikawa iterative sequences with errors for finding fixed points of almost asymptotically nonexpansive type mappings in uniformly convex Banach spaces are presented. Also, the new convergence criteria of modified Mann iterative sequences with errors for this class of mappings are immediately obtained from these criteria. The above results unify, improve and generalize ZHANG Shi_sheng's ones on approximating fixed points of asymptotically nonexpansive type mappings by the modified Ishikawa and Mann iterative sequences with errors.

Key words: almost asymptotically nonexpansive type mapping; fixed point; modified Ishikawa iterative sequence with error; modified Mann iterative sequence with error