应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2003) 11_1101_07

重建极性连续统理论的基本定律和原理(Ⅳ)——表面守恒定律*

戴天民

(辽宁大学 数学系和数学应用中心, 沈阳 110036)

(我刊原编委戴天民来稿)

摘要: 从普遍均衡定律的平移和转动的不变性出发来重新建立较为完整的微极热力连续统的表面守恒定律, 提出了广义的能量动量和能量动量矩张量· 给出了 Piola 型、Cauchy 型和 Kirchhoff 型微极热力连续统的表面守恒定律的具体形式· 现有的结果都可以当做是特殊情形从该结果自然地推导出来, 并可从归结过程中清楚地看出现有理论的不完整性程度· 非局部微极热力连续统的表面守恒定律可通过局部化得到·

关 键 词: 表面守恒定律; 微极热力连续统; 广义能量动量张量; 广义能量动量矩张量
中图分类号: O33 文献标识码: A

引 言

本文是我们的前期工作[1, 2, 3]的延续·

关于经典连续统力学的守恒定律和路径无关问题的论文不胜枚举, 为节省篇幅, 本文不另列出·

据我们所知, 关于广义连续统场论的守恒定律和路径无关问题的文献并不很多· 下面举几个例子·

1974 年 Gross[4] 在他的博士后论文中研究了微极介质的断裂问题· 1978 年 Jaric[5] 应用 Noether 定理推导出线性微极弹性静力学中的 J 积分型守恒定律· 1981 年我们[6] 把 Fletzer[7] 和 Jaric[5] 的结果综合推广到线性微极弹性动力学, 并推导出 6 个守恒定律· 1983 年金[8] 根据微分变分原理导出非保守场守恒定律并得到某类连续介质力学的守恒定律· 1986 年我们[9] 证明了微极断裂动力学的若干路径无关积分定理· 1989 年 Vukobrat[10] 应用 Noether 定理也独立地推导出我们在[6] 和[9] 中得到的部分结果· 1990 年 Jaric[11] 给出非局部微极场论的能量释放率和 J 积分· 1998 年我们在[12] 中把 Buggisch, Gross 和 Krueger[13] 的方法从普遍均衡定律的平移和转动不变性推导出非局部微极热力连续统的表面守恒定律· 2000 年 Lubarda 和 Marken-

* 收稿日期: 2002_07_03; 修订日期: 2003_06_06
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10072024); 辽宁省教育委员会基础研究基金资助项目(99011001)
作者简介: 戴天民(1931—), 男, 满族, 辽宁开原人, 教授, 博士, 已发表专著译著 12 部和论文 60 余篇(E_mail: tianmin_dai@yahoo.com.cn)·

scoff[14]又由 Knowles 和 Sternberg[15]理论出发，从头开始建立偶应力弹性静力学的守恒定律，给出 J_k, L_k 和 M 积分，并证明了 M 积分并不存在• 我们已在[3]中应用 Noether 定理重新建立起较为完整的偶应力弹性动力学的守恒定律•

本文的目的是要从我们最近在[1]中提出的普遍均衡定律的平移和转动的不变性出发推导出微极热力连续统理论的 Piola 型，Cauchy 型和 Kirchhoff 型的表面守恒定律• 本文像 Dluzewski[16]和戴[17]那样采用欧拉角作为有向空间中的曲线坐标• 本文的结果是相当完整的，现有的各种结果均可作为特殊情形包括在内•

1　表面守恒定律

1.1　普遍的均衡定律

连续统场论的普遍均衡定律可写成下列张量形式:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}V-\int_{\partial V}\boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}-\int_V \boldsymbol{G}\,\mathrm{d}V=\boldsymbol{0}, \tag{1}$$

这里 $\boldsymbol{F}=F^i\boldsymbol{g}_i$, $\boldsymbol{S}=S^{iJ}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_J$ 和 $\boldsymbol{G}=G^i\boldsymbol{g}_i$ 分别为场矢量(或标量)，表面通量张量(或矢量)和源矢量(或标量)•

令　$$\bar{X}^K=X^K+\mathrm{d}X^K, \tag{2}$$

这里 $\mathrm{d}X^K$ 为无限小平移• 由普遍均衡定律(1)对平移的不变性，则有

$$\mathrm{d}X^K\int_{\partial V}[(\dot{F}^i-G^i)\delta^J_K-S^{iJ}_{\cdot K}]\,\mathrm{d}A_J\boldsymbol{g}_i=\boldsymbol{0} \tag{3}$$

或　$$\int_{\partial V}[(\dot{F}^i-G^i)\delta^J_K-S^{iJ}_{\cdot K}]\,\mathrm{d}A_J=0• \tag{4}$$

现令

$$\mathrm{d}X^K=\varepsilon^K_{MN}\,\mathrm{d}\Phi^M X^N, \tag{5}$$

这里 $\mathrm{d}\Phi^M$ 和 $\varepsilon^K_{\ MN}$ 分别为无限小转动和交替张量• 于是在转动不变性下连续统力学的表面守恒定律具有下列形式:

$$\mathrm{d}\Phi^M\int_{\partial V}\varepsilon^K_{\ MN}\left\{X^N[(\dot{F}^i-G^i)\delta^J_K-S^{iJ}_{\cdot K}]+S^{iN}\delta^J_K\right\}\mathrm{d}A_J\boldsymbol{g}_i=\boldsymbol{0}, \tag{6}$$

或

$$\int_{\partial V}\varepsilon^K_{\ MN}\left\{X^N[(\dot{F}^i-G^i)\delta^J_K-S^{iJ}_{\cdot K}]+S^{iN}\delta^J_K\right\}\mathrm{d}A_J=0• \tag{7}$$

1.2　动量表面守恒定律

取

$$\boldsymbol{F}=\rho_0(\dot{u}^i+\varepsilon^i_{\alpha k}\dot{\gamma}^\alpha x^k)\boldsymbol{g}_i=\rho_0\dot{\underline{u}}^i\boldsymbol{g}_i,$$

$$\boldsymbol{S}=\tau^{iJ}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_J,\ \boldsymbol{G}=\rho_0 f^i\boldsymbol{g}_i,$$

则由式(4)可得动量表面守恒定律如下:

$$\int_{\partial V}[\rho_0(\ddot{\underline{u}}^i-f^i)\delta^J_K-\tau^{iJ}_{\cdot K}]\,\mathrm{d}A_J=0, \tag{8}$$

这里 u^i, γ^α, f^i, τ^{iJ} 分别为位移矢量，角位移矢量，体力密度和 Piola 应力张量•

1.3　动量矩表面守恒定律

取

$$\boldsymbol{F}=\rho_0(\varepsilon^\alpha_{ki}x^k\dot{\underline{u}}^i+\sigma^\alpha)\boldsymbol{g}_\alpha,\quad \boldsymbol{S}=\rho_0(\varepsilon^\alpha_{ki}x^k\tau^{iJ}+\mu^{\alpha J})\boldsymbol{g}_\alpha\boldsymbol{g}_J=\rho_0\underline{\mu}^{\alpha J}\boldsymbol{g}_\alpha\boldsymbol{g}_J,$$

$$\boldsymbol{G}=\rho_0(\varepsilon^\alpha_{ki}x^k f^i+l^\alpha)\boldsymbol{g}_\alpha=\rho_0\underline{l}^\alpha\boldsymbol{g}_\alpha,$$

则由式(7)可得动量矩表面守恒定律如下:

$$\int_{\partial V}[\rho_0(\dot{\sigma}^\alpha - l^\alpha)\delta_K^J - \varepsilon^\alpha_{kl}x^k_{;K}\tau^{lJ} - \mu^{\alpha J}_{:K}]\mathrm{d}A_J = 0, \tag{9}$$

这里 $\sigma^\alpha = j^{\alpha\beta}\dot{\gamma}_\beta$, $j^{\alpha\beta}$, l^α 和 $\mu^{\alpha J}$ 分别是自旋密度, 微惯性张量, 体力矩矢量和Piola型偶应力张量•本文中“;”和“:”分别表示协变导数和全协变导数•

1.4 能量表面守恒定律

取

$$F = \rho_0\left(e + \frac{1}{2}\dot{\underline{u}}^i\dot{\underline{u}}_i + \frac{1}{2}\sigma^\alpha\dot{\gamma}_\alpha\right), \quad \boldsymbol{S} = (\dot{u}_i\tau^{iJ} + \dot{\gamma}_\alpha\underline{\mu}^{\alpha J} + Q^J)\boldsymbol{g}_J,$$

$$G = \rho_0(\dot{u}_i f^i + \dot{\gamma}_\alpha \underline{l}^\alpha + h),$$

并考虑到

$$(\dot{u}_i\tau^{iJ})_{:K} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u_{i;K}\tau^{iJ}) - u_{i;K}\dot{\tau}^{iJ} + \dot{u}_i\tau^{iJ}_{:K}, \tag{10}$$

$$(\dot{\gamma}_\alpha\underline{\mu}^{\alpha J})_{:K} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma_{\alpha;K}\underline{\mu}^{\alpha J}) - \gamma_{\alpha;K}\dot{\underline{\mu}}^{\alpha J} + \dot{\gamma}_\alpha\underline{\mu}^{\alpha J}_{:K}, \tag{11}$$

则由式(4)和式(7)可得能量表面守恒定律如下:

$$\begin{aligned}\int_{\partial V}\Big\{&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\rho_0(e + \frac{1}{2}\dot{\underline{u}}^i\dot{\underline{u}}_i + \frac{1}{2}\sigma^\alpha\dot{\gamma}_\alpha) - u_{i;K}\tau^{iJ} - \gamma_{\alpha;K}\underline{\mu}^{\alpha J}] - \\ &\rho_0(\dot{u}_i f^i + \dot{\gamma}_\alpha\underline{l}^\alpha + h)\delta_K^J + u_{i;K}\dot{\tau}^{iJ} - \\ &\dot{u}_i\tau^{iJ}_{:K} + \gamma_{\alpha;K}\underline{\mu}^{\alpha J} - \dot{\gamma}_\alpha\underline{\mu}^{\alpha J}_{:K} + Q^J_{;K}\Big\}\mathrm{d}A_J = 0\end{aligned} \tag{12}$$

和

$$\begin{aligned}\int_{\partial V}\varepsilon^K{}_{MN}\Big[X^N\Big\{&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\rho_0\left(e + \frac{1}{2}\dot{\underline{u}}^i\dot{\underline{u}}_i + \frac{1}{2}\sigma^\alpha\dot{\gamma}_\alpha\right)\delta_K^J - u_{i;K}\tau^{iJ} - \gamma_{\alpha;K}\underline{\mu}^{\alpha J}\Big] - \\ &\rho_0(\dot{u}_i f^i + \dot{\gamma}_\alpha\underline{l}^\alpha + h)\delta_K^J + u_{i;K}\dot{\tau}^{iJ} - \dot{u}_i\tau^{iJ}_{:K} + \gamma_{\alpha;K}\underline{\mu}^{\alpha J} - \dot{\gamma}_\alpha\underline{\mu}^{\alpha J}_{:K} + Q^J_{;K}\Big\} + \\ &(\dot{u}_i\tau^{iN} + \gamma_{\alpha;K}\underline{\mu}^{\alpha J} - \dot{\gamma}_\alpha\underline{\mu}^{\alpha N} - Q^N)\delta_K^J\Big]\mathrm{d}A_J = 0\end{aligned} \tag{13}$$

考虑式(8)和式(9)以及下列关系式

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sigma^\alpha\dot{\gamma}_\alpha) = \dot{\sigma}^\alpha\dot{\gamma}_\alpha - \frac{1}{2}\dot{j}^{\alpha\beta}\dot{\gamma}_\beta\dot{\gamma}_\alpha, \tag{14}$$

则式(12)和式(13)可写成下列形式:

$$\begin{aligned}\int_{\partial V}\Big[&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho_0 e\delta_K^J - u_{i;K}\tau^{iJ} - \gamma_{\alpha;K}\underline{\mu}^{\alpha J}) - \rho_0\left(\frac{1}{2}\dot{j}^{\alpha\beta}\dot{\gamma}_\beta\dot{\gamma}_\alpha + h\right)\delta_K^J + \\ &\varepsilon^\alpha_{kl}x^k_{;K}\tau^{lJ}\dot{\gamma}_\alpha + u_{i;K}\dot{\tau}^{iJ} + \gamma_{\alpha;K}\underline{\mu}^{\alpha J} + Q^J_{;K}\Big]\mathrm{d}A_J = 0\end{aligned} \tag{15}$$

和

$$\begin{aligned}\int_{\partial V}\varepsilon^K{}_{MN}\Big\{X^N\Big[&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho_0 e\delta_K^J - u_{i;K}\tau^{iJ} - \gamma_{\alpha;K}\underline{\mu}^{\alpha J}) - \rho_0\left(\frac{1}{2}\dot{j}^{\alpha\beta}\dot{\gamma}_\beta\dot{\gamma}_\alpha + h\right)\delta_K^J + \\ &\varepsilon^\alpha_{kl}x^k_{;K}\tau^{lJ}\dot{\gamma}_\alpha + u_{i;K}\dot{\tau}^{iJ} + \gamma_{\alpha;K}\underline{\mu}^{\alpha J} + Q^J_{;K}\Big] + \\ &(\dot{u}_i\tau^{iN} + \dot{\gamma}_\alpha\underline{\mu}^{\alpha N} - Q^N)\delta_K^J\Big\}\mathrm{d}A_J = 0\end{aligned} \tag{16}$$

于是我们证明了下列Piola型表面守恒定律:

$$T_K(t) = \int_{\partial V} P_K^J(t, \tau, \mu)\,\mathrm{d}A_J = \text{const}. \tag{17}$$

和

$$R_M(t) = \int_{\partial V} Q_M^J(t, \tau, \mu)\,\mathrm{d}A_J = \text{const}. \tag{18}$$

其中

$$\begin{aligned} P_K^J(t, \tau, \mu) = {} & (\rho_0 e\,\delta_K^J - u_{i;K}\tau^{iJ} - \gamma_{\alpha;K}\underline{\mu}^{\alpha J}) + \\ & \int_0^t \Big[-\rho_0\Big(\frac{1}{2}\dot{j}^{\alpha\beta}\dot{\gamma}_\beta\dot{\gamma}_\alpha + h\Big)\delta_K^J + \varepsilon^\alpha_{ki}x^k_{;K}\tau^{iJ}\dot{\gamma}_\alpha + \\ & u_{i;K}\dot{\tau}^{iJ} + \gamma_{\alpha;K}\dot{\underline{\mu}}^{\alpha J} + Q^J_{;K}\Big]\,\mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{19}$$

和

$$\begin{aligned} Q_M^J(t, \tau, \mu) = {} & \varepsilon^K{}_{MN}X^N(\rho_0 e\,\delta_K^J - u_{i;K}\tau^{iJ} - \gamma_{\alpha;K}\underline{\mu}^{\alpha J}) + \\ & \int_0^t \varepsilon^K{}_{MN}\Big\{X^N\Big[-\rho_0\Big(\frac{1}{2}\dot{j}^{\alpha\beta}\dot{\gamma}_\beta\dot{\gamma}_\alpha + h\Big)\delta_K^J + \varepsilon^\alpha_{ki}x^k_{;K}\tau^{iJ}\dot{\gamma}_\alpha + \\ & u_{i;K}\dot{\tau}^{iJ} + \gamma_{\alpha;K}\dot{\underline{\mu}}^{\alpha J} + Q^J_{;K}\Big] + (\dot{u}_i\tau^{iN} + \dot{\gamma}_\alpha\underline{\mu}^{\alpha N} - Q^N)\delta_K^J\Big\}\,\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{20}$$

这里 $P_K^J(t, \tau, \mu)$ 和 $Q_M^J(t, \tau, \mu)$ 可分别称为广义动力能量动量和能量动量矩张量.

应用下列熟知的关系式

$$\rho_0 = J\rho, \tag{21}$$

$$\mathrm{d}A_J = J^{-1}x^i_{;J}\,\mathrm{d}a_i, \tag{22}$$

$$\tau^{iJ} = JX^J_{;j}t^{ij} = x^k_{;K}T^{KJ}, \tag{23}$$

$$\mu^{\alpha J} = JX^J_{;j}m^{\alpha j} = \varphi^\alpha_{;\Theta}M^{\Theta J}, \tag{24}$$

$$Q^J = JX^J_{;j}q^j, \tag{25}$$

则由式(17)~(20)可直接推导出 Cauchy 型和 Kirchhoff 型表面守恒定律. 这里 t^{ij}, $m^{\alpha j}$ 和 T^{KJ}, $M^{\Theta J}$ 分别为 Cauchy 型和 Kirchhoff 型应力张量, 偶应力张量.

2 特殊情形

2.1 具有微极势的情形

如果体力 f^i 和体力偶 l^α 可以从一个所谓的微极势 $V(\dot{u}_i, \dot{\gamma}_\alpha)$ 导出, 亦即:

$$f^i = -\frac{\partial V}{\partial \dot{u}_i}, \qquad \underline{l}^\alpha = -\frac{\partial V}{\partial \dot{\gamma}_\alpha}, \tag{26}$$

于是我们有

$$f^i\dot{u}_i + \underline{l}^\alpha\dot{\gamma}_\alpha = -\dot{V}. \tag{27}$$

把式(27)代入式(12)和式(13), 则得具有微极势的表面能量守恒定律如下:

$$\begin{aligned} \int_{\partial V}\Big\{ & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\rho_0\Big(e + V + \frac{1}{2}\dot{\underline{u}}^i\dot{\underline{u}}_i + \frac{1}{2}\sigma^\alpha\dot{\gamma}_\alpha\Big)\delta_K^J - u_{i;K}\tau^{iJ} - \gamma_{\alpha;K}\underline{\mu}^{\alpha J}\Big] - \\ & \rho_0 h\,\delta_K^J + u_{i;K}\dot{\tau}^{iJ} - \dot{u}_i\tau^{iJ}_{;K} + \gamma_{\alpha;K}\dot{\underline{\mu}}^{\alpha J} - \dot{\gamma}_\alpha\underline{\mu}^{\alpha J}_{;K} + Q^J_{;K}\Big\}\,\mathrm{d}A_J = 0 \end{aligned} \tag{28}$$

和

$$\int_{\partial V}\varepsilon^{K}{}_{MN}\Big[X^{N}\Big\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\rho_0\Big(e+V+\frac{1}{2}\dot{\underline{u}}^{i}\dot{\underline{u}}_{i}+\frac{1}{2}\sigma^{\alpha}\dot{\gamma}_{\alpha}\Big)\delta^{J}_{K}-u_{i;K}\tau^{iJ}-\gamma_{\alpha;K}\underline{\mu}^{\alpha J}\Big]-$$
$$\rho_0 h\delta^{J}_{K}+u_{i;K}\dot{\tau}^{iJ}-\dot{u}_{i}\tau^{iJ}_{:K}+\gamma_{\alpha;K}\dot{\underline{\mu}}^{\alpha J}-\dot{\gamma}_{\alpha}\underline{\mu}^{\alpha J}{}_{:K}+Q^{J}_{;K}\Big\}+$$
$$(\dot{u}_{i}\tau^{iN}+\dot{\gamma}_{\alpha}\mu^{\alpha N}-Q^{N})\delta^{J}_{K}\Big]\mathrm{d}A_{J}=0. \tag{29}$$

2.2 静力情形

对于静力情形, t 可以看做是一个任意参数, 故由式(17)~(20)可得下列 Piola 型表面守恒定律:

$$T_K(0)=\int_{\partial V}P^{J}_{K}(0,\tau,\mu)\,\mathrm{d}A_J=0 \tag{30}$$

和

$$R_M(0)=\int_{\partial V}Q^{J}_{M}(0,\tau,\mu)\,\mathrm{d}A_J=0, \tag{31}$$

其中

$$P^{J}_{K}(0,\tau,\mu)=(\rho_0 e\delta^{J}_{K}-u_{i;K}\tau^{iJ}-\gamma_{\alpha;K}\underline{\mu}^{\alpha J})-\rho_0 h\delta^{J}_{K}+$$
$$u_i\tau^{iJ}_{:K}+\gamma_\alpha(\varepsilon^{\alpha}{}_{ki}x^{k}_{;K}\tau^{iJ}+\underline{\mu}^{\alpha J}_{:K})+Q^{J}_{;K} \tag{32}$$

和

$$Q^{J}_{M}(0,\tau,\mu)=\varepsilon^{K}{}_{MN}\Big\{X^{N}[(\rho_0 e\delta^{J}_{K}-u_{i;K}\tau^{iJ}-\gamma_{\alpha;K}\underline{\mu}^{\alpha J}-\rho_0 h\delta^{J}_{K}+u_i\tau^{iJ}_{:K})+$$
$$\gamma_\alpha(\varepsilon^{\alpha}{}_{ki}x^{k}_{;K}\tau^{iJ}+\underline{\mu}^{\alpha J}_{:K})+Q^{J}_{;K}]+(u_i\tau^{iN}+\gamma_\alpha\underline{\mu}^{\alpha N}-Q^{N})\delta^{J}_{K}\Big\}, \tag{33}$$

这里 $P^{J}_{K}(0,\tau,\mu)$ 和 $Q^{J}_{M}(0,\tau,\mu)$ 可分别称为静力能量动量和能量动量矩张量.

在无体力和体力矩的静力情况下, 我们有

$$\tau^{iJ}_{;K}=0 \tag{34}$$

和

$$\varepsilon^{\alpha}{}_{ki}x^{k}_{;K}\tau^{iJ}+\mu^{\alpha J}_{:K}=0, \tag{35}$$

于是可得

$$T_K(0)=\int_{\partial V}[(\rho_0 e\delta^{J}_{K}-u_{i;K}\tau^{iJ}-\gamma_{\alpha;K}\underline{\mu}^{\alpha J})-\rho_0 h\delta^{J}_{K}+Q^{J}_{;K}]\,\mathrm{d}A_J=0 \tag{36}$$

和

$$R_M(0)=\int_{\partial V}\varepsilon^{K}{}_{MN}\Big\{[X^{N}(\rho_0 e\delta^{J}_{K}-u_{i;K}\tau^{iJ}-\gamma_{\alpha;K}\underline{\mu}^{\alpha J}-\rho_0 h\delta^{J}_{K}+Q^{J}_{;K})]+$$
$$(u_i\tau^{iN}+\gamma_\alpha\underline{\mu}^{\alpha N}-Q^{N})\delta^{J}_{K}\Big\}\mathrm{d}A_J=0. \tag{37}$$

2.3 非耦合型的情形

如果采用微惯性守恒, 把欧拉角用微运动代替, 并取 $\dot{\underline{\boldsymbol{u}}}=\dot{\boldsymbol{u}}$, $\underline{\mu}=\mu$, $\underline{\boldsymbol{l}}=\boldsymbol{l}$, 则由本文给出的耦合型表面守恒定律(17)~(20)即得传统的微极热力物质理论框架下的结果.

在不考虑体力和体力矩的情况下, 根据式(36)和式(37)可得微极弹性静力学的 Cauchy 型表面守恒定律如下:

$$T_K(0)=\int_{\partial V}(W\delta_{jk}-u_{i,k}t_{ij}-\varphi_{i,k}m_{ij})\,\mathrm{d}a_j=0 \tag{38}$$

和

$$R_m(0)=\int_{\partial V}\varepsilon_{kmn}[x_n(W\delta_{jk}-u_{i,k}t_{ij}-\varphi_{i,k}m_{ij})+$$

$$(u_i t_{in} + \varphi_i m_{in})\delta_{jk}]\,\mathrm{d}a_j = 0, \tag{39}$$

其中 $\rho_0 e = W$, 而 φ_i 为微转动矢量• 式(38)便是由 Jaric[5]给出的结果• 式(38)和式(39)是戴[6]给出的结果• 如果取 φ_i 为宏转动矢量 ω_i, 则上列两式便是 Lubarda 和 Markenscoff 在[14]和戴在[3]中给出的偶应力弹性静力学的表面守恒定律•

2.4 经典连续统的情形

如果 V 中所有场量都是足够可微的, 而且 $\gamma_\alpha = l_\alpha = \mu^{\alpha J} = 0$, 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\rho_0 \dot{u}^i \dot{u}_i\right) = \dot{u}_i(\rho_0 f^i + \tau^{iP}_{;P}), \tag{40}$$

于是由式(12)和式(13)可得下列经典连续统力学的表面守恒积分

$$T_K(t,\tau) = \int_{\partial V}\Big\{(\rho_0 e\delta^J_K - u_{i;K}\tau^{iJ}) + \int_0^t [-\rho_0 h\delta^J_K + u_{i;K}\dot{\tau}^{iJ} + \dot{u}_i(\tau^{iJ}_{;K} - \tau^{iP}_{;P}\delta^J_K) + Q^J_{;K}]\,\mathrm{d}\tau\Big\}\,\mathrm{d}A_J = \text{const} \tag{41}$$

和

$$R_M(t,\tau) = \int_{\partial V}\varepsilon^K{}_{MN}[X^N(\rho_0 e\delta^J_K - u_{i;K}\tau^{iJ}) + \int_0^t X^N\{[-\rho_0 h\delta^J_K + u_{i;K}\dot{\tau}^{iJ} + \dot{u}_i(\tau^{iJ}_{;K} - \tau^{iP}_{;P}\delta^J_K) + Q^J_{;K}] - (\dot{u}_i\tau^{iN} - Q^N)\delta^J_K\}\,\mathrm{d}\tau]\,\mathrm{d}A_J = \text{const} \tag{42}$$

这些便是文献[13]中的式(35)和式(36)•

3 结　束　语

由上面提出的结果可以通过局部化过程得到较为完整的非局部微极热力物质理论的表面守恒定律• 例如, 我们在[12]中给出的结果是在传统的理论框架下推导出来的, 因此是本文的一种特殊情形•

Kraemer[18]曾指出, 文献[13]导出的 I 型积分是对任何本构定律都适用的相当普遍的守恒定律, 然而它对奇异性并不敏感, 但可用来导出 J 积分的新表示• 本文是对文献[13]的推广, 因此也存在类似的情况• 有关微极热力连续统的路径无关积分问题, 我们将在另文加以专门讨论•

[参　考　文　献]

[1] 戴天民• 重建极性连续统理论的基本定律和原理(I)——微极连续统[J]. 应用数学和力学, 2003, **24**(10): 991—997.

[2] 戴天民. 重建极性连续统理论的基本定律和原理(II)——微态连续统理论和偶应力理论[J]. 应用数学和力学, 2003, **24**(10): 998—1004.

[3] 戴天民. 重建极性连续统理论的基本定律和原理(III)——Noether 定理[J], 应用数学和力学 2003, **24**(10): 1005—1011.

[4] Gross D. Beitrag zu den Dynamischen Problemen der Bruchmechanik [M]. Habilitationsschrift der Universitaet Stuttgart: Verlay der Universiteat Stuttgrat, 1974.

[5] Jaric J. Conservation laws of the J-integral type in micropolar elastostatics [J]. Int J Engng Sci, 1978, **16**: 967—984.

[6] 戴天民. 微极线性弹性动力学的守恒定律和跳变条件[J]. 力学学报, 1981, **13**(5): 271—279.

[7] Fletzer D C. Conservation laws in linear elastodynamics [J]. Arch Rat Mech Anal, 1976, **60**: 329—353.

[8] 金伏生. 非保守场守恒定律及某类连续介质力学的守恒律[J]. 力学学报, 1983, **15**(3): 184—189.

[9] DAI Tian-min. Some path independent integrals for micropolar media [J]. Int J Solids Struct, 1986, **22**(7): 729—735.
[10] Vukobrat M. Conservation laws in micropolar elastodynamics and path-independent integrals [J]. Int J Engng Sci, 1989, **27**(9): 1093—1106.
[11] Jaric J. The energy release rate and the J-integral in nonlocal micropolar field theory [J]. Int J Engng Sci, 1990, **28** (12): 1303—1313.
[12] DAI Tian-min. Generalized surface conservation laws for nonlocal polar thermomechanical continua [A]. In: CHIEN Wei_zang Ed. Proceedings of the 3rd International Conference on Nonlinear Mechanics [C]. Shanghai: Shanghai University Press, 1998, 181—184.
[13] Buggisch H, Gross D, Krueger K H. Einige Erhaltungssaetze der Kontinuumsmechanik vom J-Integral Typ [J]. Ing Archiv, 1981, **50**: 103—111.
[14] Lubarda V A, Markenscoff X. Conservation laws in couple stress elasticity [J]. J Mech Phys Solids, 2000, **48**: 553—564.
[15] Knowles J K, Sternberg E. On a class of conservation laws in linearized and finite elastostatics [J]. Arch Rat Mech Anal, 1972, **44**: 187—211.
[16] Dluzewski P H. Finite deformations of polar elastic media [J]. Int J Solids Struct, 1993, **30**(16): 2277—2285.
[17] 戴天民. 三组非局部极性热力连续统的均衡方程和跳变条件[J]. 中国科学(A辑), 1997, **27**(12): 1106—1110.
[18] Kraemer D. On the applicability of the I-integral in fracture mechanics [J]. Arch Appl Mech, 1993, **63**: 551—555.

Renewal of Basic Laws and Principles for Polar Continuum Theories (Ⅳ)—Surface Couservation Laws

DAI Tian_min
(Department of Mathematics & Center for the Application of Mathematics, Liaoning University, Shenyang 110036, P. R. China)

Abstract: The purpose is to reestablish rather complete surface conservation laws for micropolar thermomechanical continua from the translation and the rotation invariances of the general balance law. The generalized energy-momentum and energy-moment of momentum tensors are presented. The concrete forms of surface conservation laws for micropolar thermomechanical continua are derived. The existing related results are naturally derived as special cases from the results proposed in this paper. The incomplete degrees of the existing surface conservation laws are clearly seen from the process of the deduction. The surface conservation laws for nonlocal micropolar thermomechanical continua may be easily obtained via localization.

Key words: surface conservation law; micropolar thermomechanical continuum; generalized energy-momentum tensor; generalized energy-moment of momentum tensor