应用数学和力学, 第 24 卷 第 11 期(2003 年 11 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2003) 11_1114_04

寻找具有三个任意函数的变系数 KdV_MKdV 方程的类孤波解的新方法*

张解放[1,2], 刘宇陆[2]

(1. 浙江师范大学 非线性物理研究所, 浙江 金华 321004;
2. 上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

(我刊编委刘宇陆来稿)

摘要: 给出了求具有三个任意函数的变系数非线性演化方程的类孤波解的截断展开方法• 这种方法的关键是首先把形式解设为几个待定函数的截断展开形式, 从而可将变系数非线性演化方程转化为一组待定函数的代数方程, 然后进一步给出容易积分的待定函数的常微分方程组, 从而构造出相应的类孤波解•

关 键 词: 变系数; 非线性演化方程; 类孤波解; 截断展开方法
中图分类号: O175 文献标识码: A

引 言

物理系统的数学建模常常导致非线性演化方程• 其中的 KdV 方程

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{1}$$

就是一个在数学和物理学上相当重要的和基本的非线性演化方程的范例• 这不仅因为它在孤子研究的历史上具有重要地位, 而且因为它本身及对它的修正方程在力学乃至物理学其它领域具有应用价值• 不过由于 KdV 方程(1) 是高度理想化的• 如果考虑更实际的地球物理条件(变深度, 存在涡旋和粘性, 流体可压缩等等), 就得到了其他具有变系数的非线性演化方程• 近十多年来, 为了实际物理现象的解释和理论研究的需要, 变系数非线性演化方程的研究引起众多数学和物理学工作者的重视[1~14]• 最近, 闫振亚和张鸿庆[13] 求出了具有三个任意函数的变系数 KdV_MKdV 方程

$$\begin{aligned} &K_0(t)[u_{xxx} - a_1u^2u_x + 2a_2(u_x^2 + uu_{xx})] + a_3h(t)K_0(t)uu_x + \\ &\quad [K_1(t) + K_2(t)x]u_x + K_2(t)u + u_t = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

的精确类孤波解, 其中 a_1, a_2, a_3 为任意常数; $h(t) = \exp\left[-\int_0^t K_2(s)\,\mathrm{d}s\right]$, $K_0(t), K_1(t), K_2(t)$ 为时间的任意函数• 其基本思想是将朱佐农[7] 和刘希强[11] 的变换法进行推广, 将方程(2) 化为三阶非线性常微分方程, 然后通过这个三阶非线性常微分方程获得类孤波解• 本文我们提

* 收稿日期: 2001_04_19; 修订日期: 2003_05_20
基金项目: 浙江省自然科学基金资助项目(100039)
作者简介: 张解放(1959—), 男, 浙江义乌人, 教授, 浙江师范大学研究生学院副院长, 博士(E_mail: jfzhang2002@yahoo.com.cn)•

出一种截断展开方法, 求出方程(2)的精确类孤波解• 使用这种方法, 是假定形式解具有截断展开形式, 以致可把方程(2)转化为一组待定函数的代数方程组, 进而给出含有待定函数且容易积分的一组常微分方程•

1 方程(2)的类孤波解

为了求方程(2)的类孤波解, 我们假定方程(2)具有下列形式的截断展开解

$$u(x,t)=\sum_{i=0}^{N}A_i(t)F^i(\xi),\tag{3}$$

$$F(\xi)=1/(1+\exp\xi),\quad \xi(x,t)=f(t)x+g(t),\tag{4}$$

其中 $A_i(t)(i=1,\cdots,N)$, $f(t)$ 和 $g(t)$ 是时间的待定函数• 如果注意到关系

$$\mathrm{th}\left(\frac{1}{2}\xi\right)=1-2F,\quad \mathrm{sech}^2\left(\frac{1}{2}\xi\right)=4F-4F^2,\quad \frac{1}{1+\mathrm{ch}(\xi)}=2F-2F^2,\tag{5}$$

则截断展开解可以表成为 $\mathrm{th}(0.5\xi)$, $\mathrm{sech}^2(0.5\xi)$ 和 $1/[1+\mathrm{ch}(\xi)]$ 的多项式表示•

通过领头项分析, 可知 $N=1$ 因此可令

$$u(x,t)=A_0(t)+A_1(t)F•\tag{6}$$

从(6)式, 我们可得

$$u_t=A_{0t}+A_{1t}F+A_1\xi_tF^2-A_1\xi_tF,\tag{7}$$

$$u_x=A_1\xi_xF^2-A_1\xi_xF,\tag{8}$$

$$u_{xx}=2A_1\xi_x^2F^3-3A_1\xi_x^2F^2+A_1\xi_x^2F,\tag{9}$$

$$u_{xxx}=6A_1\xi_x^3F^4-12A_1\xi_x^3F^3+7A_1\xi_x^3F^2-A_1\xi_x^3F,\tag{10}$$

把(6)~(10)式代入方程(2), 并比较 F 的相同幂次项的系数, 得到

$$F^4:\ 6K_0A_1\xi_x^3-a_1K_0A_1^3\xi_x-2a_2K_0A_1^2\xi_x^2=0,\tag{11}$$

$$F^3:\ 12K_0A_1\xi_x^3-a_1K_0A_1^3\xi_x-2a_2K_0A_1^2\xi_x^2+4a_2K_0A_0A_1\xi_x^2-$$
$$a_3hK_0A_1^2\xi_x+2a_1K_0A_0A_1^2\xi_x=0,\tag{12}$$

$$F^2:\ A_1\xi_t+K_2xA_1\xi_x+K_1A_1\xi_x+7K_0A_1\xi_x^3-a_1K_0A_0^2A_1\xi_x+2a_1K_0A_0A_0^2\xi_x+$$
$$6a_2K_0A_0A_1\xi_x+a_3hK_0A_0A_1\xi^2-a_3hK_0A_1^2\xi_x=0,\tag{13}$$

$$F:\ A_{1t}-A_1\xi_t+K_2A_1-K_2xA_1\xi_x-K_1A_1\xi_x-a_3K_0A_0A_1\xi_x-$$
$$2a_2K_0A_0A_1\xi_x^2+a_1K_0A_0^2A_1\xi_x-K_0A_1\xi_x^3=0,\tag{14}$$

$$F^0:\ A_{0t}+K_2A_0=0•\tag{15}$$

从(11)和(12)式, 可求得

$$A_1=(6\xi_x^2+4a_2A_0\xi_x)/(a_3h-2a_1A_0),\tag{16}$$

组合(13)和(14)式, 并考虑(16)式, 有

$$A_{1t}+K_2A_1=0,\tag{17}$$

也就是

$$A_1(t)=c_1\exp\left(-\int_0^tK_2(s)\,\mathrm{d}s\right),\tag{18}$$

其中 c_1 是一个待定常数• 这是为了和从(16)式得到的结果相一致•

从(13)式, 我们有

$$\xi_t=-K_2x\xi_x-K_1\xi_x-7K_0\xi_x^3+a_1K_0A_0^2\xi_x-2a_1K_0A_0A_1\xi_x-$$
$$6a_2K_0A_0\xi_x^2-a_3hK_0A_0\xi_x+a_3hK_0A_1\xi_x•\tag{19}$$

因为

$$\xi_x=f(t),\quad \xi_t=f_t(t)x+g_t(t),\tag{20}$$

因此

$$f_t(t) = K_2(t)f(t), \tag{21}$$

$$g_t(t) = -K_1\xi_x - 7K_0\xi_x^3 + a_1K_0A_0^2\xi_x - 2a_1K_0A_0A_1\xi_x - 6a_2K_0A_0\xi_x^2 - a_3hK_0A_0\xi_x + a_3hK_0A_1\xi_x. \tag{22}$$

解(22)式导出

$$f(t) = \lambda\exp\left(-\int_0^t K_2(s)\,\mathrm{d}s\right), \tag{23}$$

其中 λ 是任意积分常数.

根据(15),可得

$$A_0(t) = c_0\exp\left(-\int_0^t K_2(s)\,\mathrm{d}s\right), \tag{24}$$

其中 c_0 是任意积分常数.

把(18),(23)和(24)式代入(22)式,经一些计算后可得

$$g_t(t) = \int_0^t\left\{-\lambda K(\tau)l(\tau) - \left[K_0(\tau)\lambda^2 + 2a_2c_0K_0(\tau)\lambda - a_1c_0^2K_0(\tau) + a_3c_0K_0(\tau)\right]\lambda^3(\tau)\right\}\mathrm{d}\tau, \tag{25}$$

其中
$$l(\tau) = \exp\left(-\int_0^\tau K_2(s)\,\mathrm{d}s\right), \tag{26}$$

把(23)式、(24)式和 $h(t)$ 代入(16),并和(18)式比较,容易导得

$$c_1 = (6\lambda^2 + 4a_2c_0\lambda)/(a_3 - 2a_1c_0). \tag{27}$$

于是,我们就可构造出方程(2)的类孤波解如下

$$u(x,t) = c_0l(t) + c_1l(t)F = l(t)\left\{\frac{2c_0 + c_1}{2} - \frac{c_1}{2}\mathrm{th}\left[\frac{1}{2}\lambda(t)x + \frac{1}{2}g(t)\right]\right\}, \tag{28}$$

其中 c_1, $l(t)$ 和 $g(t)$ 分别由(27)、(26)和(25)式确定. 解(28)与文献[10]给出的结果不同,是本文首先给出的.

2 结束语

值得指出的是,方程(2)中的 a_1, a_2 不能同时取为零,否则(11)式就不满足. 当 a_1, a_2 同时为零,方程(2)变为变系数 KdV 方程

$$\gamma(t)u_{xxx} - 3c\gamma(t)K_0(t)uu_x + [\alpha(t) + \beta(t)x]u_x + 2\beta(t)u + u_t = 0, \tag{29}$$

这已在文献[11]中所讨论,其中的系数也作了变更.

对(29)式,根据领头项分析,它的类孤波解已用本文类似的方法给出[14].

总之,利用截断展开法可给出具有三个任意函数的变系数 KdV_MKdV 方程的精确类孤波解. 如果变更 $K_0(t)$, $K_1(t)$, $K_2(t)$, 则可给出不同变系数非线性演化方程的类孤波解. 本文给出的这种是十分有效的,可容易推广到其他更广泛的一类变系数非线性演化方程. 对于高维的变系数的非线性演化方程的有关工作正在研究中.

[参 考 文 献]

[1] Chen Z X, Guo B Y, Xiang L W. Complete integrablity and analytic solutions of a KdV_type equation [J]. Journal of Mathematical Physics, 1990, **31**(12): 2851—2855.

[2] 楼森岳, 阮航宇. 变系数 KdV 方程和变系数 MKdV 方程的无穷多守恒律[J]. 物理学报, 1992, **41**

(2): 182—187.
[3] 朱佐农. 含外力项的广义 KdV 的类孤波解[J]. 物理学报, 1992, **41**(10): 1561—1565.
[4] 李翊神, 朱国城. 一个谱可变演化方程的对称[J]. 科学通报, 1986, **31**(19): 1449—1453.
[5] Gazeau J P, Winternitz P. Symmetries of variable coefficient KdV equations[J]. Journal of Mathematical Physics, 1992, **33**(12): 4087—4102.
[6] 楼森岳. 推广的 Boussinesq 方程和 KdV 方程—Painlevé 性质, Bäcklund 变换和 Lax 对[J]. 中国科学(A 辑), 1991, **21**(6): 622—631.
[7] ZHU Zuo_nong. On the KdV_type equation with variable coefficients[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1995, **28**(19): 5673—5684.
[8] 阮航宇, 陈一新. 寻找变系数非线性方程精确解的新方法[J]. 物理学报, 2000, **49**(2): 177—180.
[9] 文双春, 徐文成, 郭旗, 等. 变系数非线性 Schördinger 方程孤子的演化[J]. 中国科学(A 辑), **27**(10): 949—953.
[10] XU Bao_zhi, ZHAO Shen_qi. Inverse scattering transformation for the variable coefficient sine_Gordon type equations[J]. Applied Mathematics_JCU, Ser B, 1994, **9**(3): 331—337.
[11] LIU Xi_qiang. Exact solution of the variable coefficient KdV and SG type equations[J]. Applied Mathematics_JCU, Ser B, 1998, **13**(1): 25—30.
[12] ZHEN Yu_kun, Chan W L. Bäcklund transformation for the non_isospectral and variable coefficient nonlinear Schördinger equation[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1989, **22**(5): 441—449.
[13] 闫振亚, 张鸿庆. 具有三个任意函数的变系数 KdV_MKdV 方程的精确类孤子解[J]. 物理学报, 1999, **48**(11): 1957—1961.
[14] 张解放, 陈芳跃. 截断展开方法和广义变系数 KdV 方程新的类孤波解[J]. 物理学报, 2001, **50**(9): 1648—1650.

New Truncated Expansion Method and Soliton_Like Solution of Variable Coefficient KdV_MKdV Equation With Three Arbitrary Functions

ZHANG Jie_fang[1,2], LIU Yu_lu[2]
(1. Institute of Nonlinear Physics, Zhejiang Normal University,
Jinhua, Zhejiang 321004, P. R. China;
2. Institute of Shanghai Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University,
Shanghai 200072, P. R. China)

Abstract: The truncated expansion method for finding explicit and exact soliton_like solution of variable coefficient nonlinear evolution equation was described. The crucial idea of the method was first the assumption that coefficients of the truncated expansion formal solution are functions of time satisfying a set of algebraic equations, and then a set of ordinary different equations of undetermined functions that can be easily integrated were obtained. The simplicity and effectiveness of the method by application to a general variable coefficient KdV_MKdV equation with three arbitrary functions of time is illustrated.

Key words: variable coefficient; nonlinear evolution equation; soliton_like solution; truncated expansion method