应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2003) 11_1126_07

非线性时滞差分方程的持续生存和渐近性质*

李万同

(兰州大学 数学系, 兰州 730000)

(我刊原编委林宗池推荐)

摘要: 研究了一类非线性时滞差分方程解的渐近性质, 得到了方程持续生存和全局吸引的充分条件· 这些结果可应用于一类非线性时滞差分方程和时滞离散 Logistic 模型, 并包含了一些已知的结果·

关 键 词: 全局吸引; 高阶非线性差分方程; 持续生存; 时滞
中图分类号: O175.1 文献标识码: A

引 言

本文的目的是研究非线性时滞差分方程

$$x_{n+1} = \frac{bx_n^p}{1 + ax_{n-k}^q} \quad (q > 0,\ a > 0,\ b > 0,\ n = 0, 1, \cdots) \tag{1}$$

解的渐近性质, 这里我们总是假设 k 是一个正整数, $p > 0$ 是一个实数·

所谓方程(1) 的解是指一个序列 $\{x_n\}$, $n \geqslant -k$ 当 $n \geqslant 0$ 满足方程(1)· 如果 $a_{-k}, \cdots, a_{-1}$ 及 a_0 是给定的非负数, 则方程(1) 有唯一一个解满足初始条件

$$x_{-i} = a_{-i} \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, k)· \tag{2}$$

如果给定 $a_{-k}, \cdots, a_{-1} \in [0, \infty)$ 和 $a_0 \in (0, \infty)$, 显然, 方程(1) 和(2) 初值问题的解当 $n \geqslant 0$ 时正的· 在本文中我们仅研究方程(1) 的正解· 关于差分方程的一般理论, 可以参考 Agarwal[1], Kocic 和 Ladas[2]·

1993 年, Kocic 和 Ladas[2, p159] 提出如下公开问题:

公开问题· 研究方程

$$x_{n+1} = \frac{bx_n^2}{1 + ax_{n-1}^2} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{3}$$

的全局渐近稳定性, 其中 $b \in (0, \infty)$, 且初值 x_{-1} 和 x_0 是任意正数·

对于如上公开问题, Camouzis, Ladas 和 Rodrigues[3] 及 Zhang, Shi 和 Gai[4] 已经研究了方程(3) 的渐近性质并得到了正平衡态渐近稳定的充分条件·

受如上公开问题的启发, 本文我们将考虑方程(1) 的持续生存和全局吸引性· 所得结果包

* 收稿日期: 2002_03_25; 修订日期: 2003_06_08
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10171040) ; 甘肃省自然科学基金资助项目(ZS011_A25_007_Z) ; 教育部高等学校骨干教师基金资助项目; 教育部高等学校教学科研奖励计划资助项目
作者简介: 李万同(1964—) , 男, 甘肃人, 博士, 教授, 博士生导师(E_mail: wtli@ lzu. edu. cn)·

含原点附近的特征性质, 持续生存和全局吸引性的充分条件及其他形式的渐近性质• 正如期望的那样, 三种情形 $0 < p < 1$, $p = 1$ 和 $p > 1$ 表现出不同的动力性质•

1　情形 $p \leqslant 1$

首先, 我们考虑特殊情形 $p = 1$ 且 $0 < b \leqslant 1$•

引理 1　如果 $p = 1$ 且 $0 < b \leqslant 1$, 则方程(1) 有唯一平衡态 $x = 0$•

证明　方程(1) 的平衡态方程可以写成 $x(b/(1+ax^q) - 1) = 0$• 由于 $0 < b \leqslant 1$, 因此 $x \equiv 0$•　证毕•

定理 1　假设 $p = 1$, $0 < b \leqslant 1$, 且 x_i $(i = 0, -1, \cdots, -k)$ 是任意整数• 则方程(1) 的每个解严格递减且收敛于零•

证明　由于 $0 < b \leqslant 1$, 则 $b/(1+ax_{n-k}^q) < 1$• 由方程(1) 我们有

$$x_{n+1} = x_n \frac{b}{1+ax_{n-k}^q} < x_n \qquad (n = 1, 2, \cdots),$$

因此 $x_{n+1} < x_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 且 $\lim_{n\to\infty} x_n = l \geqslant 0$• 根据引理 1, $l = 0$•　证毕•

引理 2　如果 $p < 1$ 或 $p = 1$ 且 $p > 1$, 则方程(1) 有唯一正的不动点•

证明　如果 $p = 1$, 则由(1) 有 $b/(1+ax^q) = 1$•　由于 $b > 1$ 且 $b/(1+u^q)$ 递减, 则结论成立•　现在假设 $p < 1$•　则方程(1) 的正不动点是方程

$$u^{1-p} = \frac{b}{1+au^q} \tag{4}$$

的解• 定义 $\varphi(u)$ 为

$$\varphi(u) = u^{1-p} - \frac{b}{1+au^q},$$

则函数 $\varphi(u)$ 在区间 $[0, \infty)$ 上连续递增且 $\varphi(0) = -b < 0$•　由于 $\varphi(u) \geqslant u^{1-p} - b$ 使得对充分大的 u, $\varphi(u) > 0$• 因此, (4) 有唯一的正解• 证毕•

引理 3　假设 $p < 1$ 或 $p = 1$ 且 $b > 1$•　对每个 $n \geqslant 0$, 如果 $x_{n-i} \geqslant x$ (或 $x_{n-i} \leqslant x$), $(i = 0, 1, 2, \cdots, k)$, 则 $x_{n+1} \leqslant x_n$ (或 $x_{n+1} \geqslant x_n$)•　当所有不等号为严格时, 结论同样成立•

证明　如果对某些 n, $x_{n-i} \geqslant x$, $(i = 0, 1, 2, \cdots, k)$, 则

$$x_{n+1} \leqslant x_n^p \frac{b}{1+ax^q} = x_n^p x^{1-p} = \left(\frac{x}{x_n}\right)^{1-p} x_n \leqslant x_n•$$

其它情形可类似证明• 证毕•

引理 4　假设 $p < 1$ 或 $p = 1$ 且 $b > 1$•　令 $\{x_n\}$ 是方程(1) 的解使得对某些 $n_0 \geqslant 0$ 或

$$x_n \geqslant x \qquad (n \geqslant n_0), \tag{5}$$

或

$$x_n \leqslant x \qquad (n \geqslant n_0)• \tag{6}$$

则对 $n \geqslant n_0 + k$, 序列 $\{x_n\}$ 是单调的且 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$•

证明　假设式(5) 成立• 情形(6) 可类似证明• 则根据 f 的单调递减性, 对 $n \geqslant n_0 + k$

$$x_{n+1} \leqslant x_n^p \frac{b}{1+ax_{n-k}^q} \leqslant x_n^p \frac{b}{1+ax^q}•$$

由引理 2 有

$$x_{n+1} \leqslant x_n^p \frac{b}{1+ax^q} = x_n^p x^{1-p} = \left(\frac{x}{x_n}\right)^{1-p} x_n \leqslant x_n•$$

这意味着$\{x_n\}$当$n \geqslant n_0 + k$是单调的• 令$l = \lim_{n \to \infty} x_n$, 并假设$l > x$• 则方程(1)两边取极限得

$$l^{1-p} = \frac{b}{1 + al^q}•$$

这与引理2矛盾• 所以x是(3)的唯一正解• 证毕•

定义1 称方程(1)是持续生存的, 如果存在正实数α和β使得对任意正初值$x_0, x_{-1}, \cdots, x_{-k}$, 存在一个整数$n_0 = n_0(x_0, x_{-1}, \cdots, x_{-k}) \geqslant 1$使得对所有$n \geqslant n_0$, $x_n \in [\alpha, \beta]$•

定理2 若$p < 1$或$p = 1$且$b > 1$, 则方程(1)是持续生存的•

证明 我们仅考虑情形$p < 1$, 对于$p = 1$且$b > 1$对任意$n \geqslant 0$, 由于

$$x_{n+1} \leqslant bx_n^p \leqslant b[bx_{n-1}^p]^p = x_{n-1}^{p^2} b^{1+p}•$$

根据递推关系我们有

$$x_{n+1} \leqslant x_0^{p^{n+1}} b^{1+p+\cdots+p^n} = x_0^{p^{n+1}} b^{(1-p^{n+1})/(1-p)} \qquad (n \geqslant 0)• \tag{7}$$

如果$x_0 > 0$, 则不论x_0取何值, 式(7)右边的极限为

$$\lim_{n \to \infty} x_0^{p^{n+1}} b^{(1-p^{n+1})/(1-p)} = b^{1/(1-p)}•$$

定义$\beta = b^{1/(1-p)}$, 如果$\{x_n\}$是方程(1)为正初值的任何解, 则存在一个正整数n_0使得$x_n \in (0, \beta + 1)$, $n \geqslant n_0$• 进一步, 由于

$$\beta > \left[\frac{b}{1 + \alpha x^q}\right]^{1/(1-p)} = [x^{1-p}]^{1/(1-p)} = x•$$

定义

$$\gamma = \frac{b}{[1 + a(1+\beta)^q](1+\beta)^{1-p}},$$

我们有

$$\gamma < \frac{b}{[1 + \alpha x^q]x^{1-p}} < 1•$$

因此对所有$n \geqslant n_0 + k$, 有

$$x_{n+1} = \frac{b}{[1 + \alpha x_{n-k}^q]x_n^{1-p}} x_n > \frac{b}{[1 + a(1+\beta)^q](1+\beta)^{1-p}} x_n = \gamma x_n• \tag{8}$$

现在考虑两种情形: 情形(Ⅰ)存在一个正整数$N \geqslant n_0 + k$使得$x_N \geqslant x$; 情形(Ⅱ)$x_n < x$, 对所有n成立•

对于(Ⅰ), 不等式(8)意味着

$$x_{N+1} > \gamma x_N \geqslant \gamma x•$$

由归纳法, $x_{N+1} > \gamma^k x$• 如果$n > N + k$且$x_{n-i} \leqslant x$ $(i = 0, 1, \cdots, k)$, 则由引理3有$x_{n+1} \geqslant x_n$• 所以$x_n > \gamma^k x$, $n > N + k$• 证毕•

对于(Ⅱ), 根据引理4, $\{x_n\}$是递增序列, 所以它们一定收敛于x, 这样对充分大的n, 有$x_n \in [\gamma^k x, \beta]$成立• 证毕•

对于$x \in [0, \infty)$, 定义$h(x)$为

$$h(x) = \begin{cases} x^{p^k}\left[\dfrac{b}{1 + \alpha x^q}\right]^{(1-p^k)/(1-p)} & (p < 1), \\ x\left[\dfrac{b}{1 + \alpha x^q}\right]^k & (p = 1)• \end{cases}$$

定理 3　如果在 $p < 1$ 或 $p = 1$ 且 $b > 1$ 的条件下, 方程

$$h^2(x) = h(h(x)) = x \tag{9}$$

在 $[0, x]$ 上有唯一解, 则方程(1) 的不动点 $x > 0$ 是所有正解的全局吸引子.

证明　如果 $\{x_n\}$ 是方程(1) 的任意一个正解, 我们将证明 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. 下面分 3 种情形来考虑.

情形 1　存在一个正整数 N 使得 $x_n \geqslant x$, $n \geqslant N$. 则根据引理 4, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

情形 2　$\{x_n\}$ 最终小于或等于 x. 在这种情况下, 再利用引理 4 有 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

情形 3　$\{x_n\}$ 关于 x 振动. 定义

$$\lambda = \liminf_{n\to\infty} x_n, \quad \mu = \limsup_{n\to\infty} x_n. \tag{10}$$

由定理 2 有,

$$0 < \lambda \leqslant \mu < \infty.$$

现在证明 $\lambda = x = \mu$. 根据(10), 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在一个正整数 N_ε, 使得对所有 $n \geqslant N_\varepsilon$ 有

$$\lambda - \varepsilon \leqslant x_n \leqslant \mu + \varepsilon. \tag{11}$$

令

$$\{x_{s+1}, x_{s+2}, \cdots, x_{s+t}\}$$

和

$$\{x_{s+t+1}, \cdots, x_{s+t+q}\}$$

分别表示 $\{x_n\}$ 的负半环和正半环, 其中 $s > N_\varepsilon + k$. 如果

$$x_{s+j_1} = \min_{1\leqslant i\leqslant t}\{x_{s+i}\}$$

$1 \leqslant j_1 \leqslant t$, 则由引理 3 有 $j_1 \leqslant k$. 同理, 如果

$$x_{s+t+j_2} = \min_{1\leqslant i\leqslant q}\{x_{s+t+i}\}$$

$1 \leqslant j_2 \leqslant q$, 则由引理 3 有 $j_2 \leqslant k$.

现在假设 $p < 1$, 利用式(11), 我们有

$$x_{s+j_1} = x^p_{s+j_1-1}\frac{b}{1 + a x^q_{s+j_1-1-k}} \geqslant$$

$$\left[x^p_{s+j_1-2}\frac{b}{1 + a x^q_{s+j_1-2-k}}\right]^p \frac{b}{1 + a(\mu + \varepsilon)^q} \geqslant$$

$$x^{p^2}_{s+j_1-2}\left[\frac{b}{1 + a(\mu + \varepsilon)^q}\right]^{1+p},$$

注意到 $x_s \geqslant x$, 进行 j_1 步后得

$$x_{s+j_1} \geqslant x^{p^{j_1}}\left[\frac{b}{1 + a(\mu + \varepsilon)^q}\right]^{(1-p^{j_1})/(1-p)}, \tag{12}$$

由于 $j_1 \leqslant k$, 则 $1 > p \geqslant p^{j_1} \geqslant p^k$. 这样

$$1 \leqslant \frac{1 - p^{j_1}}{1 - p} \leqslant \frac{1 - p^k}{1 - p}. \tag{13}$$

改写式(12) 的右边为

$$x\left[\frac{b}{[1 + a(\mu + \varepsilon)^q]x^{1-p}}\right]^{(1-p^{j_1})/(1-p)} =$$

$$x\left[\frac{1+ax^q}{1+a(\mu+\varepsilon)^q}\right]^{(1-p^{j_1})/(1-p)}.$$

注意到上式右边括号中比值小于 1, 则由式(12) 和式(13) 有

$$x_{s+j_1} \geqslant x\left[\frac{1+ax^q}{1+a(\mu+\varepsilon)^q}\right]^{(1-p^k)/(1-p)} =$$

$$x^{p^k}\left[\frac{b}{1+a(\mu+\varepsilon)^q}\right]^{(1-p^k)/(1-p)}.$$

简单计算易知

$$x_{s+t+j_2} \leqslant x^{p^k}\left[\frac{b}{1+a(\lambda-\varepsilon)^q}\right]^{(1-p^k)/(1-p)}.$$

令 ε 递减趋于零, 我们有

$$x_{s+j_1} \geqslant x^{p^k}\left[\frac{b}{1+a\mu^q}\right]^{(1-p^k)/(1-p)}$$

和

$$x_{s+t+j_2} \leqslant x^{p^k}\left[\frac{b}{1+a\lambda^q}\right]^{(1-p^k)/(1-p)}$$

对充分大的 s 成立. 由于半环的选择是任意的, 所以有

$$\begin{cases} \lambda \geqslant x^{p^k}\left[\dfrac{b}{1+a\mu^q}\right]^{(1-p^k)/(1-p)}, \\ \mu \leqslant x^{p^k}\left[\dfrac{b}{1+a\lambda^q}\right]^{(1-p^k)/(1-p)}, \end{cases} \tag{14}$$

根据 $h(x)$ 的定义, $h(x)=x$. 给定 $\lambda \leqslant x$, 如果等式成立, 则由式(14) 知, $\mu \leqslant x$. 现在假设 $\lambda < x$. 考虑到 h 的递减性有

$$h^2(\lambda) = h(h(\lambda)) \leqslant h(\mu) \leqslant \lambda. \tag{15}$$

另一方面, $h^2(x)=x$, 且由式(8), 它是方程 $h^2(x)=x$ 在$[0, x]$ 上的唯一解. 因为

$$h^2(0) = x^{p^k}\left[\frac{b[h(0)]^{p-1}}{1+a[h(0)]^q}\right]^{(1-p^k)/(1-p)} > 0,$$

所以 $h^2(x) > x$, $x < x$. 特别, $h^2(\lambda) > \lambda$, 这与(15) 矛盾.

对于 $p=1$, 其证明是类似的, 只要注意到 $p^k = 1$ 且 $\dfrac{1-p^k}{1-p} = 1+p+\cdots+p^{k-1} = k$. 证毕.

如果 $p=1$, $b>1$ 且 $q=1$, 则方程(1) 变为时滞 Logistic 方程

$$x_{n+1} = \frac{bx_n}{1+ax_{n-k}} \qquad (b>1,\ a>0,\ n=0, 1, \cdots). \tag{16}$$

应用定理 3 于方程(16), 我们有下面的结果, 它是 Kocic 和 Ladas[5] 的推论 2.

推论 1 如果 $p=1$, $b>1$, $q=1$, 且 $k \leqslant b/(b-1)$, 则方程(16) 的每个解$\{x_n\}$ 满足$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = (b-1)/a$.

2 情形 $p>1$

定理 4 如果 $p>1$, 则原点是渐近稳定的且吸引初值在$[0, \beta)$ 中的方程(1) 的每个轨道,

其中

$$\beta = b^{-1/(p-1)}.$$

证明 注意到

$$x_{n+1} = x_n^p \frac{b}{1+ax_{n-k}^q} \leqslant bx_n^p \leqslant x_{n-1}^{p^2} b^{1+p}.$$

利用归纳法得

$$x_{n+1} \leqslant x_0^{p^{n+1}} b^{(p^{n+1}-1)/(p-1)} = \beta\left(\frac{x_0}{\beta}\right)^{p^{n+1}}.$$

所以, 如果初值(特别是 x_0) 在区间$[0, \beta)$ 内, 则该解一定收敛于零. 由于序列$\left\{(x_0/\beta)^{p^{n+1}}\right\}$ 的单调递减性, 稳定性是显然的. 证毕.

定理 5 假设 S 是方程(1)所有不动点的集合, 且设 φ 是函数:

$$\varphi(u) = u^{p-1} \frac{b}{1+au^q} \qquad (u \geqslant 0).$$

(a) 如果 $p > 1$ 且 S 是非空集, 则 $x = \inf S > 0$ 是不稳定点; 事实上, 在 x 的每个邻域内, 存在初值产生的解收敛于零.

(b) 如果 $p > 1$, S 非空有界集, 且对所有 $u > \sup S$ 有 $\varphi(u) \geqslant 1$, 则 $x = \sup S$ 是方程(1) 的不稳定点, 且在 x 的每个邻域内存在初值产生的单调递增的无界解.

证明 (a) 因为 S 是方程 $\varphi(u) = 1$ 的所有解集且 φ 连续, $\varphi(0) = 0$, 所以 $x = \inf S$ 是方程(1) 的正不动点. 现在令 $x_0 \in (0, x)$ 且 $x_{-k}, \cdots, x_{-1} \geqslant x_0$ 则

$$x_1 = x_0^p \frac{b}{1+ax_{-k}^q} \leqslant x_0^p \frac{b}{1+ax_0^q} = x_0\varphi(x_0) < x_0,$$

因此, $x_1 < x_0 < x$ 且 $x_{-k+1}, \cdots, x_0 \geqslant x_1$. 由此利用数学归纳法, 序列$\{x_n\}$ 在区间$(0, x)$ 上是单调递减的且收敛于零. 由于 $x_{-k}, \cdots, x_{-1}, x_0$ 可以选择到任意接近 x, 这也证明 x 是不稳定的.

(b) 选取 $x_0 > x$, $x_{-k}, \cdots, x_{-1} < x_0$ 且注意到

$$x_1 = x_0^p \frac{b}{1+ax_{-k}^q} > x_0^p \frac{b}{1+ax_0^q} = x_0\varphi(x_0) > x_0,$$

使得 $x_1 > x_0 > x_{-1}, \cdots, x_{-k}, x$. 由归纳法, 当 $x_n > \sup S$, $n \geqslant 1$ 时$\{x_n\}$ 单调递增. 所以 $\{x_n\}$ 是无界的. 由于 $x_0, x_{-1}, \cdots, x_{-k}$ 可以选择任意接近 x, 这也证明 x 是不稳定的. 证毕.

3 一些应用

本节将考虑方程

$$x_{n+1} = \frac{bx_n^2}{1+x_{n-k}^2} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{17}$$

的渐近性质, 其中 $b > 0$, k 是正整数.

令 $\beta = 1/b$. 由定理 4, 我们有下面的推论.

推论 2 原点是渐近稳定的且吸引式(17) 初值在 $[0, \beta)$ 的每个轨道, 这里 $\beta = 1/b$.

注 1 如果 $k = 1$, 则推论 2 包含了 Zhang, Shi 和 Gai[4]的引理 6.1 和 6.2 的结果, 也包含了 Camouzis, Ladas 和 Rodrigues[3] 的定理 3.5 的结果.

由[4] 的引理 2.1 和 2.2 我们知道, 如果 $0 < b < 2$, 则方程(17) 有唯一非负平衡解零; 如

果 $b > 2$, 则方程(17) 有三个非负平衡解: 0, $x_1 = (b - \sqrt{b^2 - 4})/2$ 及 $x_2 = (b + \sqrt{b^2 - 4})/2$, 这里 $1/b < x_1 < 1$, $1 < x_2 < b$• 令 S 是方程(17) 所有正不动点的集合, φ是函数:

$$\varphi(u) = \frac{bu}{1 + u^2} \qquad (b > 2,\ u \geqslant 0)$$

则 $S = \{x_1, x_2\}$ 是非空的, $x_1 = \inf S > 1/b > 0$ 且 $x_2 = \sup S > 1$• 根据定理 5(a), 我们有下面的结果•

推论 3 如果 $b > 2$, 则 x_1 是不稳定不动点; 事实上, 在 x_1 的每个领域内, 存在初值产生的解单调收敛于零•

注 2 如果 $k = 1$, 则我们的结果改进和推广了 Zhang, Shi 和 Gai[4] 引理 6.3, 定理 6.1(1) 和(iii)•

注 3 对于更一般的方程

$$x_{n+1} = \frac{bx_n^p}{1 + a_1 x_{n-k_1} + a_2 x_{n-k_2}^2 + \cdots + a_q x_{n-k_q}^q} \qquad (n = 0, 1, \cdots),$$

这里 $p > 0$, $b > 0$, q 是正整数, $a_i > 0$ $(i = 1, \cdots, q)$, 本文的结果还是成立的•

[参 考 文 献]

[1] Agarwal R P. Difference Equations and Inequalities[M]. New York: Dekker, 1992.

[2] Kocic V L, Ladas G. Global Behavior of Nonlinear Difference Equations of Higher Order With Applications[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1993.

[3] Camouzis E, Ladas G, Rodrigues I W. On the rational recursive $x_{n+1} = \beta x_n^2/(1 + x_{n-1}^2)$ [J]. Computers Math Appl, 1994, **28**(1): 37—43.

[4] ZHANG De_cun, SHI Bao, GAI Ming_jiu. On the rational recursive sequence $x_{n+1} = bx_n^2/(1 + x_{n-1}^2)$ [J]. Indian J Pure Appl Math, 2001, **32**(5): 657—663.

[5] Kocic V L, Ladas G. Global attractivity in nonlinear delay difference equations [J]. Proc Amer Math Soc, 1992, **115**(4): 1083—1088.

Permanence and Asymptotic Properties of Nonlinear Delay Difference Equations

LI Wan_tong

(Department of Mathematics, Lanzhou University, Lanzhou 730000, P. R. China)

Abstract: The asymptotic behavior of a class of nonlinear delay difference equation was studied. Some sufficient conditions are obtained for permanence and global attractivity. The results can be applied to a class of nonlinear delay difference equations and to the delay discrete Logistic model and some known results are included.

Key words: global attractivity; higher order nonlinear difference equation; permanence; delay