应用数学和力学, 第 24 卷 第 11 期(2003 年 11 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2003) 11_1133_08

偏微分方程组的形式解与投影极限*

施惟慧, 沈 臻

(上海大学 理学院, 上海 200072)

(钱伟长推荐)

摘要: 以分层理论为基础, 给出了偏微分方程组形式解的存在性定理以及形式解与 Ehresmann 链的投影极限的关系•

关 键 词: 形式解; Ehresmann 链; 投影极限
中图分类号: O175.29 文献标识码: A

1 引言和问题提出

许多偏微分方程组的初、边值问题适定性研究之所以重要, 是因为它们构成了相关学科的理论基础, 比如, 流体力学中的 Landau_Lifchitz 方程(即粘性、可压流体完备方程组) [1]、Euler 方程(无粘、不可压流体方程组) [1]、混合流体方程组[1]、以及大气动力学中的若干重要模式[1] 等等• 由于这些方程组的实际背景, 它们的初、边值问题的适定性往往是不容置疑的, 留下来要做的好象只是解的形式而已• 但事实上并非如此, 在古典方程中, 为了求得热传导方程在 $\{t = 0\}$ 上初值问题的解, 是用 Fourier 方法完成的• 但所求得的解严格说来只是原来问题的解在极限意义下的一种近似• 用分层理论的术语来说, 对于在 $t = 0$ 在上所置的初始条件(σ, γ) 中 γ 的诱导对应 γ, 有

$$\operatorname{Im}\gamma \subseteq (W_{1,1}(R^2, \mathbf{R}) - S^t_{1,1}(\mathrm{D}) - T_{1,1}(\mathrm{D}))$$

即在 $t = 0$ 上, 热传导方程 $\mathrm{D}: \partial u/\partial t - a^2\partial^2 u/\partial x^2 = f(x, t)$ 的 Cauchy 问题不存在 $C^k(k \geqslant 2)$ 稳定解• 再比如, 流体力学中的 Landau_Lifchitz 方程(这是一个含有 5 个未知函数二阶拟线性偏微分方程组), 它的超平面 $\{t = 0\} \subseteq R^4$ 上的 Cauchy 问题, 也不存在 $C^k(k \geqslant 2)$ 稳定解• 这方面的工作请参看[2]• 再看 Navier_Stokes 方程对于任何 C^∞ 超曲面$(S) \subseteq R^4$(或$(S) \subseteq R^3$), 它的初值、边值或混合问题都不存在 $C^k(k \geqslant 2)$ 稳定解• 正因为如此, 我们才将 Naiver_Stokes 方程称之为不稳定方程• 不仅如此, Navier_Stokes 方程的不稳定性, 还影响了一大类各有背景的方程组初、边值问题的适定性• 比如, 磁流体力学中的磁通量方程、不可压氦_II 完备方程, 以及大气动力学中的若干模式等等, 这方面的工作请参见[3] 、[4]、[5]~ [7]•

因此要完整地分析一个偏微分方程组, 就不能只对某些特定的定解问题进行讨论• 本文介绍应用分层理论, 处理不适定问题的依据存在形式解的条件与寻找方法• 对于那些有实际

---

* 收稿日期: 2001_04_16; 修订日期: 2003_08_20
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19971054, 40175014)
作者简介: 施惟慧(1936—) , 女, 教授, 博士(E_mail: shiweihui@ eastday. com)•

应用背景的方程,当通过它们的某些初、边值问题适定性分析之后,具有重要的理论与实际意义,因为它们给出了为什么必须修正方程的理论根据以及如何修正的基本方法•

设 V, Z 是实 C^∞ 微分流形, $\dim V = n \geqslant 2$, $\dim Z = m$, $D \subseteq J^{k_0}(V, Z)$ 是一个偏微分方程组•

2 用分层理论求解偏微分方程组的步骤

1) 根据 D 的表达式,确定其本方程 D_* :

$$D_* = \bigcup_i D_i \qquad (i = -1, 0, 1, 2, \dots)•$$

2) 构造 V 到 Z 的 S_典则系统 $E_{l,k}(V, Z)$, $W_{l,k}(V, Z)$

$$E_{l,k}(V, Z) \subseteq G_l^*(TJ^k(V, Z) \times_{J^k(V,Z)} J^{k+1}(V, Z)),$$

$$W_{l,k}(V, Z) = \operatorname{Im} p_1|_{E_{l,k}(V,Z)} \subseteq G_l^*(TJ^k(V, Z))$$

和 D 的 S_典则系统:

$$E_{l,k}(D) = E_{l,k}(V, Z) \cap (G_l^*(TD_k)) \times_{J^k(V,Z)} D_{k+1}),$$

$$W_{l,k}(D) = p_1(E_{l,k}(D)),$$

这里 p_1 代表第一投影:

$$G_l^*(TJ^k(V, Z)) \times_{J^k(V,Z)} J^{k+1}(V, Z) \to G_l^*(TJ^k(V, Z))•$$

3) 对 $\rho_{l,k}: E_{l,k}(D) \to W_{l,k}(V, Z)$ 分层•

设分层结果为:

$$W_{l,k}(V, Z) = W_{l,k}(D) \cup T_{l,k}(D) = (\bigcup_q S^q_{l,k}(D)) \cup T_{l,k}(D),$$

于是得到了若干个形如以下纤维空间:

$$\rho^q_{l,k}: E^q_{l,k}(D) = \rho^{-1}_{l,k}(S^q_{l,k}(D)) \to S^q_{l,k}(D),$$

对于纤维空间 $(E^q_{l,k}(D), S^q_{l,k}(D), \rho^q_{l,k})$, 其纤维的维数等于 q, 这里 $\rho_{l,k} = p_1|_{E_{l,k}(V,Z)}$•

以下设 $l = n-1$, $D \subseteq J^{k_0-1}(V, Z)$ 是一组解析偏微分方程[2]•

4) 设 $(\sigma_0, \gamma_0) \in I_a(\Delta_{n-1}, D)$, 即 (σ_0, γ_0) 是所论方程组 D 的一组解析初始条件,这一对解析嵌入满足以下的条件[2]~[5]:

$$\alpha^{k_0-1}_{-1} \circ \gamma_0 = \sigma_0,$$

$$\gamma_0^* \omega = 0 \qquad (\forall \omega \in I_{k_0-1}(V, Z)),$$

$$\operatorname{Im} \gamma_0 \subseteq D_{k_0-1},$$

如果 γ_0 的诱导对应 $\gamma_0: \Delta_{n-1} \to G^*_{n-1}(TJ^{k_0-1}(V, Z))$ 使得

$$\operatorname{Im} \gamma_0 \subseteq S^t_{n-1,k_0-1}(D) \subseteq W_{n-1,k_0-1}(V, Z), \qquad (*)$$

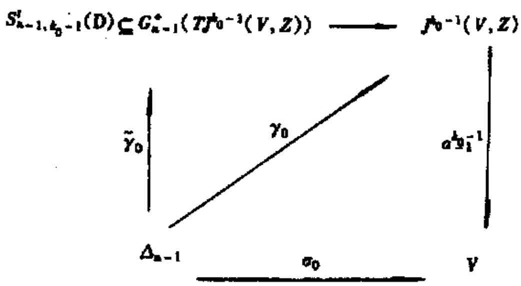

图 1

那么初始条件 (σ_0, γ_0) 是适定的(即 (σ_0, γ_0) 所对应的 Cauchy 问题是适定的) [2]~[5]•

条件(*)等价于 γ_0 是横截层 $S^t_{n-1,k_0-1}(D)$ 的末方程 $E(S^t_{n-1,k_0-1}(d))$ 的一个解[5]•

在初始条件 (σ_0, γ_0) 适定的条件下,则存在解析嵌入序列 $\{\gamma_i\}$ $(i \geqslant 1)$•

$$\gamma_i: \Delta_{n-1} \to J^{k_0+i-1}(V, Z),$$

使得

$$
(*)' \quad \begin{cases} \alpha^{k_0+i-1}_{-1} \circ \gamma_i = \sigma_0, \quad \alpha^{k_0+i-1}_{k_0-1} \circ \gamma_i = \gamma_0, \\ \gamma_i^* \omega = 0 \qquad (\forall \omega \in I_{k_0+i-1}(V, Z)), \\ \operatorname{Im} \gamma_i \subseteq D_{k_0+i-1}. \end{cases}
$$

最后, 求解末方程 $E(S^t_{n-1, k_0+i-1}(\mathrm{D}))$, 即可得到 D 的以收敛幂级数形式表现的解析解. 这个过程可用图 2 表示如下.

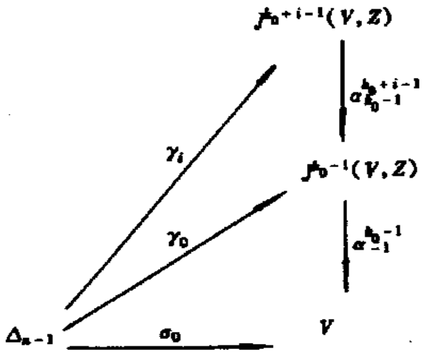

图 2

以上有关结论及证明, 可参见[3]~[5].

3 形式解

由第 2 节可知, 如果 D 的$(n-1, k_0-1)$ 阶横截层非空$S^t_{n-1, k_0-1}(\mathrm{D}) \neq \Phi$, 并且 $\operatorname{Im} \gamma_0 \subseteq S^t_{n-1, k_0-1}(\mathrm{D})$, 则有关初值问题适定并可逐步求出此问题稳定的解析解. 除此之外, 对于给定的(σ_0, γ_0), 还有以下几种可能:

1) $S^t_{n-1, k_0-1}(\mathrm{D}) \neq \Phi$, 但是 $\operatorname{Im} \gamma_0 \subseteq (W_{n-1, k_0-1}(V, Z) - S^t_{n-1, k_0-1}(\mathrm{D}) - T_{n-1, k_0-1}(\mathrm{D}))$, 即 $\operatorname{Im} \gamma_0 \subseteq S^q_{n-1, k_0-1}(\mathrm{D})$.

这时, 如果还能求出嵌入序列$\{\gamma_i\}$, $i \geqslant 1$, 使得$(*)'$ 成立, 则根据 γ_i, 也可求出一组幂级数, 形式上满足方程, 但其收敛性质不明. 这就是相对于(σ_0, γ_0) 的一组形式解;

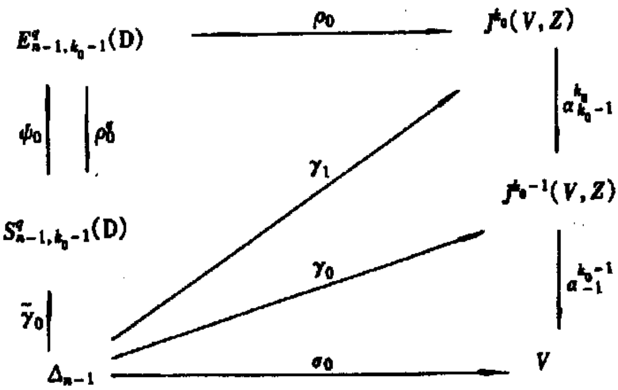

图 3

2) $S^t_{n-1, k_0-1}(\mathrm{D}) = \Phi$, 则 D 只可能存在形式解.

现将上述问题分析如下:

1) *存在形式解的充要条件*

首先, D 的典则分层具有如下性质[2]~[5]:

对于自然对应 $g = g_{n-1, k-1}$,

$$g: W_{n-1, k}(V, Z) \to W_{n-1, k-1}(V, Z),$$

如果 $S^t_{n-1, k-1}(\mathrm{D}) \neq \Phi$, 则恒有

$$g^{-1}(S^t_{n-1, k-1}(\mathrm{D})) \subseteq S^t_{n-1, k}(\mathrm{D}),$$

但是, 对于 $S^q_{n-1, k-1}(\mathrm{D})$, 则有

$$g^{-1}(S^q_{n-1,k-1}(\mathrm{D}))\subseteq S^q_{n-1,k}(\mathrm{D})\cup T_{n-1,k}(\mathrm{D})\cdot$$

现在假设对于给定的初始条件 (σ_0,γ_0)，有

$$\mathrm{Im}\,\gamma_0\subseteq S^{\varepsilon}_{n-1,k_0-1}(\mathrm{D}),$$

那么，为从 γ_0 出发去寻找 γ_1，事实上就是要求存在 ρ^q_0 的截口 ϕ_0,

$$\phi_0: S^q_{n-1,k_0-1}(\mathrm{D})\to E^q_{n-1,k_0-1}(\mathrm{D})\cdot$$

如果 ϕ_0 存在，则可定义

$$\gamma_0=\rho_0\circ\phi_0\circ\gamma_0,$$

并使得 $\mathrm{Im}\,\gamma_1\subseteq S^q_{n-1,k_0}(\mathrm{D})\cdot$

这些对应之间的关系如图 3 所示•

ρ_0 代表第二投影对应 p_2 在 $E^q_{n-1,k_0-1}(\mathrm{D})$ 上的限制:

$$p_2: G^*_{n-1}(TJ^{k_0-1}(V,Z))\times_{J^{k_0-1}(V,Z)}J^{k_0}(V,Z)\to J^{k_0}(V,Z)\cdot$$

这样得到的 γ_1 满足以下条件:

$$\alpha^{k_0-1}_{-1}\circ\gamma_1=\sigma_0,\quad \alpha^{k_0}_{k_0-1}\circ\gamma_1=\gamma_0,$$

$$\gamma_1^*\,\omega=0\qquad(\forall\,\omega\in I_{k_0}(V,Z)),$$

$$\mathrm{Im}\,\gamma_1\subseteq \mathrm{D}_{k_0},$$

$$\mathrm{Im}\,\gamma_1\subseteq S^q_{n-1,k_0}(\mathrm{D})\cdot$$

然后，从 γ_1 出发，重复上述过程，如果找到得 ρ^q_1 的截口 ϕ_1，则可定义

$$\gamma_2=\rho_1\circ\phi_1\circ\gamma_1,$$

并使得

$$\mathrm{Im}\,\gamma_1\subseteq S^q_{n-1,k_0-1}(\mathrm{D})\cdot$$

这样求得的 γ_2 满足与 γ_1 类似的条件:

$$\alpha^{k_0+1}_{-1}\circ\gamma_2=\sigma_0,\quad \alpha^{k_0+1}_{k_0-1}\circ\gamma_2=\gamma_0,\quad \alpha^{k_0+1}_{k_0}\circ\gamma_2=\gamma_1,$$

$$\gamma_2^*\,\omega=0\qquad(\forall\,\omega\in I_{k_0+1}(V,Z)),$$

$$\mathrm{Im}\,\gamma_2\subseteq \mathrm{D}_{k_0},$$

$$\mathrm{Im}\,\gamma_2\subseteq S^q_{n-1,k_0+1}(\mathrm{D})\cdot$$

因此，可将上述过程得以继续的条件归结如下:

如果对 $(\sigma_i,\gamma_i)\,(i\geqslant 0)$ 成立以下条件

(i) $\mathrm{Im}\,\gamma_i\subseteq S^q_{n-1,k_0+i-1}(\mathrm{D})$,

(ii) 存在 $\rho_i(=\rho^q_i)$ 的截口 ϕ_i,

$$\phi_i: S^q_{n-1,k_0+i-1}(\mathrm{D})\to E^q_{n-1,k_0+i-1}(\mathrm{D}),$$

则可定义

$$\gamma_{i+1}=\rho_i\circ\phi_i\circ\gamma_i,\quad \Delta_{n-1}\to J^{k_0+i}(V,Z),$$

并使得 $\mathrm{Im}\,\gamma_{i+1}\subseteq S^q_{n-1,k_0+i}(\mathrm{D})\cdot$

同时 γ_{i+1} 满足以下条件

$$\alpha^{k_0+i}_{-1}\circ\gamma_{i+1}=\sigma_0,\quad \alpha^{k_0+i}_{k_0-1}\circ\gamma_{i+1}=\gamma_0,\quad \alpha^{k_0+i}_{k_0+i-1}\circ\gamma_{i+1}=\gamma_i,$$

$$\gamma^*_{i+1}\,\omega=0\qquad(\forall\,\omega\in I_{k_0+i}(V,Z)),$$

$\mathrm{Im}.\ \gamma_{i+1} \subseteq D_{k_0+i}$,

$\mathrm{Im}.\ \gamma_{i+1} \subseteq S^q_{n-1,k_0+i}(D)$•

于是有以下定理:

定理 1 设 $D \subseteq J^{k_0}(V, Z)$ 是一个 k_0 阶(C^∞ 或 C^ω) 偏微分方程组, (σ_0, γ_0) 是 D 的一组初始条件(C^∞ 或 C^ω), 并且

$\mathrm{Im}\,\gamma_0 \subseteq S^q_{n-1,k_0-1}(D)$•

那么, 存在相对于 (σ_0, γ_0) 的形式解的充要条件是:

存在(C^∞ 或 C^ω) 嵌入序列 $\{\gamma_i\}$ $(i \geqslant 1)$,

$\gamma_i: \Delta_{n-1} \to J^{k_0+i-1}(V, Z)$,

使得对任何 $i \geqslant 1$, 有

$\alpha^{k_0+i-1}_{-1} \circ \gamma_i = \sigma_0,\ \alpha^{k_0+i-1}_{k_0-1} \circ \gamma_i = \gamma_0,\ \alpha^{k_0+i-1}_{k_0+i-2} \circ \gamma_i = \gamma_{i-1}$,

$\gamma_i^*\omega = 0 \qquad (\forall\, \omega \in I_{k_0+i}(V, Z))$,

$\mathrm{Im}\,\gamma_i \subseteq D_{k_0+i-1}$,

$\mathrm{Im}\,\gamma_i \subseteq S^q_{n-1,k_0+i-1}(D)$•

根据定理 1 求得了 $\{\gamma_i\}$, $(i \geqslant 1)$ 之后, 相应问题的以幂级数表达的形式解即被完全确定•

2) 形式解与投影极限

形式解的概念与计算基础是投影极限, 现叙述如下:

设 X_* 是一个由实 C^∞ 微分流形序列 $\{X_k\}$ 及连续可微对应(或同态) $\{f_k\}$ 组成的链:

$$X_*:\ \cdots \to X_k \xrightarrow{f_k} X_{k-1} \to \cdots \to X_1 \xrightarrow{f_1} X_0 \xrightarrow{f_0} X_{-1}$$

并设所有的 f_k 取最大秩•

此外, 对每个 $k \geqslant 0$, 在 X_k 上给出由 Pfaff 形式生成的微分理想子代数 I_k, 使得成立

$f_k^*(I_{k-1}) \subseteq I_k \qquad$ (f_k^* 代表 f_k 的诱导对应)•

将满足上述条件的链 X_* 称为关于 I_* 的 Ehresmann 链[4]•

设 V, Z 是两个实 C^∞ 微分流形• 记

$X_k = J^k(V, Z) \qquad (k \geqslant 0),\ X_{-1} = V$,

$f_k = \alpha^k_{k-1}: J^k(V, Z) \to J^{k-1}(V, Z) \qquad$ (α^k_{k-1}, 典则对应),

I_k 是 $J^k(V, Z)$ 的 Cartan_Ehresmann 理想子代数• 于是就有了一个 Ehresmann 链, 记为 $J_*(V, Z)$,

$$J_*(V, Z):\ \cdots \to J^k(V, Z) \xrightarrow{\alpha^k_{k-1}} J^{k-1}(V, Z) \to \cdots \to J^0 \to (V, Z) \xrightarrow{\alpha^0_{-1}} J^{-1}(V, Z)•$$

考虑这个 Ehresmann 链的投影极限 $J^\infty(V, Z) \subseteq \prod_{k \geqslant -1} J^k(V, Z)$

$J^\infty(V, Z) = \varprojlim J^k(V, Z)$•

根据定义, $\{\theta_k\} \in J^\infty(V, Z)$, 当且仅当

$\alpha^k_{k-1}(\theta_k) = \theta_{k-1} \qquad (k \geqslant 0)$•

设 $D \subseteq J^{k_0}(V, Z)$ 是一个(C^∞ 或 C^ω) 偏微分方程组, (σ_0, γ_0) 是 D 的一组(C^∞ 或 C^ω) 初始条件, $\{\gamma_i\}_{i \geqslant 1}$ 是根据定理 1 求得的(C^∞ 或 C^ω) 嵌入序列• 则对 $\xi \in \Delta_{n-1}$, (($\xi_1, \dots \xi_{n-1}$) 是 ξ 的重心坐标)• 根据 (σ_0, γ_0) 和 $\{\gamma_i\}_{i \geqslant 1}$, 就可定义序列 $\{\theta_i\}$ 如下:

$$(\alpha_{-1}^{k_0-1}\circ\gamma_0)(\xi)=\sigma_0(\xi)=\theta_{-1}\in D_{-1}\subseteq V,$$
$$(\alpha_0^{k_0-1}\circ\gamma_0)(\xi)=\theta_0\in D_0\subseteq J^0(V,Z),$$
$$(\alpha_{k_0-2}^{k_0-1}\circ\gamma_0)(\xi)=\theta_{k_0-2}\in D_{k_0-2}\subseteq J^{k_0-2}(V,Z),$$
$$\gamma_0(\xi)=\theta_{k_0-1}\in D_{k_0-1}\subseteq J^{k_0-1}(V,Z),$$
$$\gamma_i(\xi)=\theta_i\in D_{k_0+i-1}\subseteq J^{k_0+i-1}(V,Z)\qquad(i\geqslant 1).$$

根据$\{\gamma_i\}$的性质，即可知
$$\{\theta_i\}\in J^{\infty}(V,Z).$$
因此，可叙述如下定理：

定理 2 设(σ_0,γ_0)是(C^{∞}或C^{ω})偏微分方程组$D\subseteq J^{k_0}(V,Z)$的一组初始条件(C^{∞}或C^{ω}). 那么，相对于(σ_0,γ_0)，D存在形式解的充要条件是：

存在$\{\theta_i\}\in J^{\infty}(V,Z)$，使得

1) $\theta_i\in D_i\subseteq J^i(V,Z)\qquad(i\geqslant -1)$,

2) $$\begin{aligned}&\theta_{-1}=\sigma_0(\xi)=(\alpha_{-1}^{k_0-1}\circ\gamma_0)(\xi),\\&\theta_0=(\alpha_0^{k_0-1}\circ\gamma_0)(\xi),\\&\vdots\\&\theta_{k_0-2}=(\alpha_{k_0-2}^{k_0-1}\circ\gamma_0)(\xi),\\&\theta_{k_0-1}=\gamma_0(\xi),\\&(\xi\in\Delta_{n-1}).\end{aligned}$$

4 例

1) 无粘、不可压等熵流体的 Euler 方程

方程原型如下[1]：
$$\begin{cases}\dfrac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}=-\dfrac{1}{\rho}\nabla p+F(\boldsymbol{x},t),\\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{u}=0,\end{cases}$$
$(\boldsymbol{x},t)=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in R^4$，未知函数组是$\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,u_3)$和$\rho>0$是常数.

设$F_1=x_2$，$F_2=0$，$F_3=t$. 于是可求出两组形式解如下：
$$U^{(1)}:\begin{cases}u_1^{(1)}=x_2t,\\u_2^{(1)}=0,\\u_3^{(1)}=\dfrac{1}{2}t^2,\\p^{(1)}=t\left(a_1+\dfrac{a_2}{2}t\right)\qquad(a_1,a_2\text{ 是任意实常数}).\end{cases}$$
$$U^{(2)}:\begin{cases}u_1^{(2)}=x_2t-\dfrac{1}{2\rho}t^2,\\u_2^{(2)}=0,\\u_3^{(2)}=\dfrac{1}{2}t^2,\\p^{(2)}=t\left(x_1+\dfrac{b}{2}t\right)\qquad(b\text{ 是任意实常数}).\end{cases}$$

它们满足同样的初始条件:

$$u_i^{(1)}|_{t=0} = u_i^{(2)}|_{t=0} = 0,\ (i = 1, 2, 3), \qquad p^{(1)}|_{t=0} = p^{(2)}|_{t=0} = 0•$$

2) 粘性、不可压流体的 Naviev_Stokes 方程

方程原型如下[1]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = -\dfrac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\boldsymbol{u} + F(\boldsymbol{x}, t), \\ \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0, \end{cases}$$

$(\boldsymbol{x}, t) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4$, 未知函数组是$(u_1, u_2, u_3, p)$, $\rho > 0$, $\nu > 0$ 是常数•

设 $F_1 = t^2$, $F_2 = 0$, $F_3 = x_1x_2$• 在超平面$\{t = 0\} \subseteq R^4$ 上给出如下初始条件:

$$u_i|_{t=0} = 0\ (i = 1, 2, 3),\ p|_{t=0} = p_0(\text{常数})•$$

则至少可求出满足上述初始条件的两组形式解如下:

$$U^{(1)}: \begin{cases} u_1^{(1)} = \dfrac{1}{3}t^3, \\ u_2^{(1)} = 0, \\ u_3^{(1)} = x_1x_2t - \dfrac{1}{15}x_2t^5, \\ p^{(1)} = p_0 + p_1 + \dfrac{p_2}{2}t^2 + \dfrac{p_3}{6}t^3 \qquad (p_i\ \text{是任意实常数})• \end{cases}$$

$$U^{(2)}: \begin{cases} u_1^{(2)} = \dfrac{1}{3}t^3, \\ u_2^{(2)} = -\dfrac{\nu^2}{6\rho}t^3, \\ u_3^{(2)} = x_1x_2t - \dfrac{\nu^2}{6\rho}t^3 + \dfrac{t^5}{30}\left(\dfrac{\nu^2}{\rho}x_1 - 2x_2\right) - \dfrac{\nu^2}{405\rho}t^9, \\ p^{(2)} = p_0 + p_1t + \dfrac{\nu^2}{2}(x_2 + x_3)t^2• \end{cases}$$

更多的例子, 可参见[5], [8]•

注:

1) 关于 Euler 方程的整体分析, 请参看[2]• 相对于超平面$\{t = 0\} \subseteq R^4$ 上初值问题的形式解的计算方法, 请参看[8]•

2) Navier_Stokes 方程的任意初值或混合问题, 都是不适定的(C^k 意义下, $k \geqslant 2$)• 本文中的例 2 虽然给出了这个方程的两组准确解, 但它们仍然是 Navier_Stokes 方程的不稳定解, 这个事实从解的不唯一性可得到一种例证• 关于 Navier_Stokes 方程的整体分析, 请参看[2], [5]•

3) Euler 方程和 Navier_Stokes 方程在$\{t = 0\} \subseteq R^4$ 上的初值问题虽然都不适定, 但它们的解空间构造却完全不同• 用分层理论的术语来说, Euler 方程的横截层非空, 因而除了不稳定的形式解以外, 它还具有稳定解, 因此 Euler 方程是稳定方程• 而 Navier_Stokes 方程的横截层是空集, 因此, 它的任何初、边值(或混合)问题都是不适定的• 虽然也可找到某些初值问题以有限形式表现的形式解(如本文的例 2), 但从

$$\rho:\ E_{n-1,k}(D) \to W_{n-1,k}(R^4, R^4)$$

的分层以及各个层的末方程可知, 对所有初始条件集合$\{(\sigma, \gamma)\}$, 使得相对应的初值问题不存在任何解(包括形式解在内), 即陷阱 $T_{n-1,k}(D)$ 是 $W_{n-1,k}(R^4, R^4)$ 中的稠密开集, 而存在形式解的那些初始条件的集合, 是 $W_{n-1,k}(R^4, R^4)$ 中的稀疏集[2]• 力学意义下的初值问题(即在$\{t = 0\}$ 上给初始条件), 或者无解, 或者解不唯一• 所以 Navier_Stokes 方程是一个坏方程[4][5]• 另外, 从流体力学角度以及方程的表现式上看, 当粘性系数

$\nu = 0$时, Navier_Stokes 方程就是 Eluer 方程, 但是这两类方程解空间本质上的差异, 使得不可能期望从其中一个去研究另外一个, 也就是说, 如果某个方程(组) 依赖与若干个参数, 在一般情况下, 这些参数的变化(包括极限过程) 会使方程的性质发生根本的改变• Navier_Stokes 方程与 Euler 方程之间的关系和解空间的不同构造就是一个很好的例子•

4) 文中形式解的例子都是多项式, 这只是为了说明问题而无任何实际意义• 事实上, 只要在一阶(对 Euler 方程) 或二阶(对 N_S 方程) 连续可微函数中讨论相类问题, 并不需要再附加其它条件(比如速降), 而问题的结论是不变的•

[参 考 文 献]

[1] Landau E, Lifchitz L. M canique des Fluides [M]. Moscou: Mir. 1971.

[2] SHI Wei_hui. Solutions Analystiques de Quelques Équations aux D riv es Partielles en M canique Des Fluides [M]. Paris: Hermann, 1992.

[3] SHIH Wei_shu. Une M thode Él mentaire pour L' tude Des quations aux D riv es Partiells [M]. Paris: Diagrammes 16, 1986.

[4] Wilsom D, Trotmann L. Singularities of Maps, and Applications to Differential Equations [M]. Paris: Hermann, 1997.

[5] 施惟慧, 陈达段, 何幼桦. 分层理论与非线性偏微分方程基础[M]. 上海: 上海大学出版社, 2001.

[6] SHI Wei_hui, CHEN Da_duan. On the instability of incompressible Helium_Ⅱ Complete equation[A]. In: CHIEN Wei_zang Ed. Proceeding of the 3rd International Conference on Nonlinear Mechanics [C]. Shanghai, 1998.

[7] 陈达段, 刘晓明, 施惟慧. 关于强迫耗散非线性系统的稳定性[J]. 应用数学和力学, 1996, **17**(6): 515—523.

[8] 沈臻. 关于不可压、无粘流体的 Euler 方程初值问题的适定性(Ⅰ), (Ⅱ)[J]. 应用数学和力学, 2003, **24**(5): 484—504.

Formal Solutions and Projective Limit of P. D. E

SHI Wei_hui, SHEN Zhen

(Science College, Shanghai Universiey, Shanghai 200072, P. R. China)

Abstract: The existence theorems of formal solutions of PDE are given. And the relationship between formal solutions and projective limit of Ehresmann chain is shown based on stratification theory.

Key words: formal solution; Ehresmann chain; projective limit