应用数学和力学,第 24 卷 第 11 期(2003 年 11 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2003) 11_1151_06

瞬时点源分数阶超常扩散的浓度分布*

段俊生[1], 徐明瑜[2]

(1. 天津商学院 基础部, 天津 300134;
2. 山东大学 数学与系统科学学院, 济南 250100)

(戴世强, 吴望一推荐)

摘要: 利用质量守恒条件、解的时空相似性、Mellin 变换以及 Fox 函数理论, 给出 n 维空间中($n = 1, 2, 3$) 瞬时点源分数阶超常扩散浓度分布的 Fox 函数表示及解析表达式, 并讨论其渐近性质•

关 键 词: 瞬时点源; 超常扩散; 分数阶微积分; Fox 函数; Mellin 变换
中图分类号: O175.6 文献标识码: A

引 言

近来年, 分数阶微积分的理论和应用日益受到人们的关注, 特别是利用分数阶微积分可建立一类超常扩散模型• 将经典的扩散方程中的对时间的一阶导数代之以 $\alpha(0 < \alpha \leqslant 1)$ 阶分数阶导数而得到的积分微分方程称为分数阶超常扩散方程• 再加上定解条件构成了超常扩散模型• 分数阶超常扩散模型可用来描述某些不纯介质中的扩散、生物组织中的扩散以及分形介质中的扩散问题[1~5]• 文[6~10]研究了一些含分数阶导数的微分方程的求解问题, 但涉及的超常扩散模型的物理背景是不明显的•

本文在瞬时点源分数阶超常扩散质量守恒的物理背景下, 用相似变量的方法和 Fox 函数求出浓度分布, 从而得到分数阶超常扩散方程的基本解•

1 分数阶超常扩散模型及其相似性解

设在某种无界的静止介质中, $t = 0$ 时刻引入一确定质量 M 的点源, 并由于介质的某种特殊性而使浓度分布满足分数阶超常扩散方程及其相应定解条件:

$$\frac{\partial^{\lambda} c}{\partial t^{\lambda}} = D^{\lambda}\left(\frac{\partial^{2} c}{\partial r^{2}} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial c}{\partial r}\right) \qquad (0 < \lambda \leqslant 1, r > 0), \tag{1}$$

$$t = 0 \text{时}, c(r, t) = 0 \qquad (r > 0), \tag{2}$$

$$r \to \infty \text{时}, c(r, t) \to 0 \qquad (t > 0), \tag{3}$$

$$\int_0^{\infty} \omega_n r^{n-1} c \, \mathrm{d}r = M, \tag{4}$$

其中 $c = c(r, t)$ 为浓度, D 为常数, $\omega_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$, $n = 1, 2$ 和 3 分别对应于一维, 二维和

* 收稿日期: 2001_07_04; 修订日期: 2003_07_02
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10272067); 教育部博士点基金资助项目(1999042211)
作者简介: 段俊生(1965—), 男, 呼和浩特人, 副教授, 博士(E_mail: duanjssdu@sina.com)•

三维的情形，表达式

$$\frac{\partial^\lambda c}{\partial t^\lambda} = \frac{\partial}{\partial t}[\varphi_{1-\lambda}(t) * c(r, t)] = \frac{\partial}{\partial t}\left[\int_0^t \frac{(t-\tau)^{-\lambda}}{\Gamma(1-\lambda)} c(r, \tau)\,\mathrm{d}\tau\right] \tag{5}$$

中的算子 $\partial^\lambda / \partial t^\lambda$ 为 Riemann_Liouville 型 λ 阶微分算子，$\varphi_\lambda(t) = t_+^{\lambda-1}/\Gamma(\lambda)$ 为 $D'(\mathbf{R}_+)$ 中的广义函数• 符号* 表示卷积，$\Gamma(\cdot)$ 为 Gamma 函数•

由广义函数卷积的微分性质知

$$\frac{\partial^\lambda c}{\partial t^\lambda} = \varphi_{-\lambda}(t) * c(r, t)• \tag{6}$$

故方程(1)可写为

$$\int_0^t \frac{(t-\tau)^{-\lambda-1}}{\Gamma(-\lambda)} c(r, \tau)\,\mathrm{d}\tau = D^\lambda\left(\frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial c}{\partial r}\right)• \tag{7}$$

对于问题(1)～(4)，我们寻求如下的时空相似性解

$$c(r, t) = M(Dt)^{-n\lambda/2} f(r^2(Dt)^{-\lambda}), \tag{8}$$

其中 f 为某一待定的一元函数，M 为总质量，相似变量为

$$\xi = r^2(Dt)^{-\lambda}• \tag{9}$$

于是，方程(7)右边可化为

$$D^\lambda\left(\frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial c}{\partial r}\right) = 2MD^\lambda(Dt)^{-n\lambda/2-\lambda}[2\xi f''(\xi) + nf'(\xi)], \tag{10}$$

在(7)的左边作代换 $Z = r^2(D\tau)^{-\lambda}$，可得到

$$\int_0^t \frac{(t-\tau)^{-\lambda-1}}{\Gamma(-\lambda)} c(r, \tau)\,\mathrm{d}\tau = MD^\lambda r^{-n-2}\xi^{1+1/\lambda}\int_0^\infty f(Z) Z^{n/2-1/\lambda-1} g(\xi/Z)\,\mathrm{d}Z, \tag{11}$$

其中

$$g(w) = \begin{cases} (1-w^{1/\lambda})^{-\lambda-1}/[\lambda\Gamma(-\lambda)] & (0 < w < 1), \\ 0 & (w > 1) \end{cases} \tag{12}$$

为广义函数，由(7)，(10)和(11)，方程(1)化为

$$4\xi f''(\xi) + 2nf'(\xi) = \xi^{1/\lambda-n/2}\int_0^\infty f(Z) Z^{n/2-1/\lambda-1} g(\xi/Z)\,\mathrm{d}Z• \tag{13}$$

利用相似变量(9)，定解条件(2)，(3)和(4)化为

$$f(\infty) = 0, \tag{14}$$

$$\int_0^\infty \xi^{n/2-1} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 2/\omega_n• \tag{15}$$

2 解的 Fox 函数表示

在 Mellin 变换

$$f^*(s) = \mathscr{M}\{F(\xi), s\} = \int_0^\infty f(\xi)\xi^{s-1}\,\mathrm{d}\xi \tag{16}$$

之下，问题(13)～(15)化为如下的差分方程及初值：

$$2(2s-n)(s-1)f^*(s-1) = f^*(s)\hat{g}(1/\lambda - n/2 + s), \tag{17}$$

$$f^*(n/2) = 2/\omega_n, \tag{18}$$

其中 $\hat{g}(s) = \int_0^1 \frac{1}{\lambda\Gamma(-\lambda)}(1-w^{1/\lambda})^{-\lambda-1} w^{s-1}\,\mathrm{d}w$• 作代换 $w^{1/\lambda} = u$，由广义函数的积分可得

$$\hat{g}(s) = \frac{\Gamma(\lambda s)}{\Gamma(\lambda s - \lambda)}• \tag{19}$$

将(19)式代入方程(17),可得

$$2(2s-n)(s-1)f(s-1)=\frac{\Gamma(1-n\lambda/2+\lambda s)f(s)}{\Gamma(1-\lambda-n\lambda/2+\lambda s)}. \tag{20}$$

由(18)及(20)可得出

$$\tilde{f}(s)=\frac{4^s}{(4\pi)^{n/2}}\frac{\Gamma(s)\Gamma(1-n/2+s)}{\Gamma(1-n\lambda/2+\lambda s)}. \tag{21}$$

设

$$\tilde{h}(s)=\frac{\Gamma(s)\Gamma(1-n/2+s)}{\Gamma(1-n\lambda/2+\lambda s)}, \tag{22}$$

则 $h(z)$ 可用Fox函数表示为

$$h(z)=H_{12}^{20}\left(z\,\middle|\,{(1-n\lambda/2,\ \lambda) \atop (0,1),(1-n/2,1)}\right), \tag{23}$$

这里Fox函数(或称 H 函数) $H_{pq}^{mn}\left(z\,\middle|\,{(a_1,\alpha_1),\cdots,(a_n,\alpha_n),\cdots,(a_p,\alpha_p) \atop (b_1,\beta_1),\cdots,(b_m,\beta_m),\cdots,(b_q,\beta_q)}\right)$ (简记为 $H_{pq}^{mn}(z)$) 可由其Mellin变换来定义[6],[8],[11,12]

$$\tilde{H}_{pq}^{mn}(s)=\mathscr{M}\left\{H_{pq}^{mn}(z),\ s\right\}=\frac{A(s)B(s)}{C(s)D(s)}, \tag{24}$$

其中

$$\begin{cases} A(s)=\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j+\beta_j s);\quad B(s)=\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j-\alpha_j s); \\ C(s)=\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j-\beta_j s);\quad D(s)=\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j+\alpha_j s). \end{cases} \tag{25}$$

整数 m,n,p,q 满足 $0\leqslant n\leqslant p$, $1\leqslant m\leqslant q$, 参数 $\alpha_j(j=1,\cdots,p)$, $\beta_j(j=1,\cdots,q)$ 为正数,(25)式中空积规定为1,并且 $A(s)$ 的极点集合与 $B(s)$ 的极点集合互不相交. 在参数满足条件

$$\mu=\sum_{j=1}^{q}\beta_j-\sum_{j=1}^{p}\alpha_j>0 \tag{26}$$

时,可以证明 H_{pq}^{mn} 除 $z=0$ 以外是解析的,并有如下的级数表达式

$$H_{pq}^{mn}(z)=-\sum_{s\in p(A)}\mathrm{Res}\left[\frac{A(-s)B(-s)}{C(-s)D(-s)}z^s\right], \tag{27}$$

其中 $P(A)$ 表示 $A(-s)$ 的极点构成的集合.

当 $n=0$, $q=m$ 时,Fox函数有如下的渐近公式[6],[12]

$$H_{pq}^{m0}(z)\sim Kz^{(1-\alpha)/\mu}\exp(-\mu\beta^{1/\mu}z^{1/\mu}),\ |z|\to\infty, \tag{28}$$

此处

$$K=(2\pi)^{(m-p-1)/2}\mu^{-1/2}\beta^{(1-\alpha)/\mu}\prod_{k=1}^{p}\alpha_k^{1/2-a_k}\prod_{k=1}^{m}\beta_k^{b_k-1/2}, \tag{29}$$

$$\alpha=\sum_{k=1}^{p}a_k-\sum_{k=1}^{q}b_k+\frac{1}{2}(q-p+1), \tag{30}$$

$$\beta=\prod_{k=1}^{p}\alpha_k^{\alpha_k}\prod_{k=1}^{q}\beta_k^{-\beta_k}, \tag{31}$$

公式(28)在包含在扇形 $|\arg z|<\pi\mu/2$ 中的任一闭子扇形上(顶点在 $z=0$)一致成立.

由Mellin变换公式 $\mathscr{M}\left\{h(z/c),\ s\right\}=c^s\tilde{h}(s)$, $(c>0)$ 以及(21),(22)式,我们有

$$f(\xi)=\frac{1}{(4\pi)^{n/2}}h(\xi/4)=\frac{1}{(4\pi)^{n/2}}H_{12}^{20}\left(\xi/4\,\middle|\,{(1-n\lambda/2,\ \lambda) \atop (0,1),(1-n/2,1)}\right), \tag{32}$$

代入(8)式中,得到浓度分布的Fox函数表示式

$$c(r,t)=\frac{M}{(4\pi)^{n/2}}(Dt)^{-n\lambda/2}H_{12}^{20}\left(\frac{r^2}{4(Dt)^{\lambda}}\left|\begin{matrix}(1-n\lambda/2,\lambda)\\(0,1),(1-n/2,1)\end{matrix}\right.\right). \tag{33}$$

3 浓度分布的级数表达式

在(23)式的 Fox 函数中, $\mu=2-\lambda>0$, 满足条件(26), 下面我们分别对 n 的不同值, 展开 Fox 函数(23), 从而给出浓度分布的级数表达式.

(i) $n=1$ 或 3 时, 在 Fox 函数(23)中,

$$\begin{cases}A(-s)=\Gamma(-s)\Gamma(1-n/2-s),\ B(-s)=1,\\ C(-s)=1,\ D(-s)=\Gamma(1-n\lambda/2-\lambda s).\end{cases} \tag{34}$$

$$P(A)=\{s\mid s=k,k=0,1,2,\dots\}\cup\{s\mid s=k+1-n/2,k=0,1,2,\dots\}. \tag{35}$$

容易看到 $A(-s)$ 的每一个极点都是单极点, 由公式(27),

$$H_{12}^{20}\left(z\left|\begin{matrix}(1-n\lambda/2,\lambda)\\(0,1),(1-n/2,1)\end{matrix}\right.\right)=-\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\operatorname*{Res}_{s=k}\left[\frac{\Gamma(-s)\Gamma(1-n/2-s)}{\Gamma(1-n\lambda/2-\lambda s)}z^s\right]+\operatorname*{Res}_{s=k+1-n/2}\left[\frac{\Gamma(-s)\Gamma(1-n/2-s)}{\Gamma(1-n\lambda/2-\lambda s)}z^s\right]\right\}, \tag{36}$$

计算出留数, 可得

$$H_{12}^{20}\left(z\left|\begin{matrix}(1-n\lambda/2,\lambda)\\(0,1),(1-n/2,1)\end{matrix}\right.\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left[\frac{\Gamma(1-n/2-k)}{\Gamma(1-n\lambda/2-k\lambda)}z^k+\frac{\Gamma(n/2-1-k)}{\Gamma(1-\lambda-\lambda k)}z^{k+1-n/2}\right], \tag{37}$$

将(37)式代入(33), 得浓度分布的级数表达式为

$$c(r,t)=\frac{M}{[4\pi(Dt)^{\lambda}]^{n/2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left[\frac{\Gamma(1-n/2-k)}{\Gamma(1-n\lambda/2-k\lambda)}\left(\frac{r^2}{4(Dt)^{\lambda}}\right)^k+\frac{\Gamma(n/2-1-k)}{\Gamma(1-\lambda-\lambda k)}\left(\frac{r^2}{4(Dt)^{\lambda}}\right)^{k+1-n/2}\right]. \tag{38}$$

(ii) $n=2$ 时, 在 Fox 函数(23)中,

$$\begin{cases}A(-s)=\Gamma(-s)\Gamma(-s),\ B(-s)=1,\\ C(-s)=1,\ D(-s)=\Gamma(1-\lambda-\lambda s).\end{cases} \tag{39}$$

$$P(A)=\{s\mid s=k,k=0,1,2,\dots\}. \tag{40}$$

容易看出, $A(-s)$ 的每一个极点都是二阶极点, 应用公式(27), 得

$$H_{12}^{20}\left(z\left|\begin{matrix}(1-\lambda,\lambda)\\(0,1),(0,1)\end{matrix}\right.\right)=-\sum_{k=0}^{\infty}\operatorname*{Res}_{s=k}\left[\frac{\Gamma(-s)\Gamma(-s)}{\Gamma(1-\lambda-\lambda s)}z^s\right], \tag{41}$$

这里

$$\operatorname*{Res}_{s=k}\left[\frac{\Gamma(-s)\Gamma(-s)}{\Gamma(1-\lambda-\lambda s)}z^s\right]=\lim_{s\to k}\frac{d}{ds}\left[(s-k)^2\frac{\Gamma(-s)\Gamma(-s)}{\Gamma(1-\lambda-\lambda s)}z^s\right]. \tag{42}$$

经过冗长的计算过程, 最后可得到

$$\operatorname*{Res}_{s=k}\left[\frac{\Gamma(-s)\Gamma(-s)}{\Gamma(1-\lambda-\lambda s)}z^s\right]=\frac{\ln z+\lambda\Psi(1-\lambda-\lambda k)-2\Psi(1+k)}{(k!)^2\Gamma(1-\lambda-\lambda k)}z^k, \tag{43}$$

其中 $\Psi(z)=d(\ln\Gamma(z))/dz$ 为 Psi 函数, 由(33), (41) 和(43), 可得 $n=2$ 时的浓度分布的级数表达式

$$c(r,t)=\frac{M}{4\pi(Dt)^{\lambda}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2\Psi(1+k)-\lambda\Psi(1-\lambda-\lambda k)-\ln\frac{r^2}{4(Dt)^{\lambda}}}{(k!)^2\Gamma(1-\lambda-\lambda k)}\left(\frac{r^2}{4(Dt)^{\lambda}}\right)^{k}\cdot \tag{44}$$

4 渐近性态及结果讨论

(i) 当 $\lambda=1$ 时, 利用 Fox 函数的性质[12], (23) 式可简化为

$$H_{12}^{20}\left(z\,\middle|\,{}^{(1-n/2,1)}_{(0,1),(1-n/2,1)}\right)=H_{01}^{10}(z\mid(0,1))=\exp(-z), \tag{45}$$

因而浓度分布表示式(33)成为(也可从解析表达式(38), (44)得到):

$$c(r,t)=\frac{M}{(4\pi Dt)^{n/2}}\exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right)\cdot \tag{46}$$

从而得到了经典的瞬时点源扩散模型的解• 因此, 经典的扩散模型是分数阶超常扩散模型的一个特例• λ 越接近于 1 时, 扩散越接近于经典的扩散模型•

(ii) 利用(33), (28) ~ (31) 可得如下的渐近性态($n=1, 2$ 或 3):

$t\to 0(r>0)$ 或 $r\to\infty(t>0)$ 时

$$c(r,t)\sim\frac{MK}{((4\pi(Dt)^{\lambda})^{n/2}}\left(\frac{r^2}{4(Dt)^{\lambda}}\right)^{(1-\alpha)/\mu}\exp\left[-\mu\beta^{1/\mu}\left(\frac{r^2}{4(Dt)^{\lambda}}\right)^{1/\mu}\right], \tag{47}$$

其中 $\mu=2-\lambda$, $\alpha=n(1-\lambda)/2+1$, $\beta=\lambda^{\lambda}$, $K=\mu^{-1/2}\beta^{n(\lambda-1)/(2\mu)}\lambda^{(n\lambda-1)/2}$•

当 $\lambda=1$ 时, 浓度分布(46) 为初等函数, 是人们熟知的解; 对于 $0<\lambda<1$, 利用(38) 和(44), 分别对不同的 n, 我们又可得到

$$n=1:\ t\to\infty(r>0)\text{ 时},\ c(r,t)\sim\frac{M}{2D^{\lambda/2}\Gamma(1-\lambda/2)}t^{-\lambda/2}, \tag{48}$$

$$r\to+0(t>0)\text{ 时},\ c(r,t)\sim\frac{M}{2(Dt)^{\lambda/2}\Gamma(1-\lambda/2)}, \tag{49}$$

$$n=2:\ t\to\infty(r>0)\text{ 时},\ c(r,t)\sim\frac{M\lambda}{4\pi D^{\lambda}\Gamma(1-\lambda)}\frac{\ln t}{t^{\lambda}}, \tag{50}$$

$$r\to+0(t>0)\text{ 时},\ c(r,t)\sim\frac{M}{2\pi(Dt)^{\lambda}\Gamma(1-\lambda)}\cdot\ln(1/r), \tag{51}$$

$$n=3:\ t\to\infty(r>0)\text{ 时},\ c(r,t)\sim\frac{M}{4\pi D^{\lambda}\Gamma(1-\lambda)r}\cdot t^{-\lambda}, \tag{52}$$

$$r\to+0(t>0)\text{ 时},\ c(r,t)\sim\frac{M}{4\pi\Gamma(1-\lambda)(Dt)^{\lambda}}\cdot r^{-1}\cdot \tag{53}$$

(iii) 当 $n>3$ 时, (33) 式仍然是相应的瞬时点源分数阶超常扩散定解问题(1) ~ (4) 的解• 当 n 为奇数时, 解的解析表达式仍是(38) 式; 当为 n 偶数时, 应用公式(27), 在解的级数展开式中要计算二阶极点处的留数, 可类似于 $n=2$ 时的情形导出结果• 此外, 本文得到的结果在 $M=1$ 时可作为分数阶超常扩散方程的基本解, 从而有较大的理论意义和实用价值•

[参 考 文 献]

[1] Giona M, Roman H E. Fractional diffusion equation for transport phenomena in random media[J]. Physica A, 1992, **185**(1): 87—97.

[2] REN Fu_yao, LIANG Jin_rong, WANG Xiao_tian. The determination of the diffusion kernel on fractals and fractional diffusion equation for transport phenomena in random media[J]. Physics Letters A, 1999, **252**(3): 141—150.

[3] West B J, Grigolini P, Metzler R, et al. Fractional diffusion and Levy stable processes[J]. Physical Review E, 1997, **55**(1): 99—106.

[4] Nigmatullin R R. The realization of the generalized transfer equation in a medium with fractal geometry[J]. Phys Status Solidi B, 1986, **133**(1): 425—430.

[5] ZENG Qiu_hua, LI Hou_qiang. Diffusion equation for disordered fractal media[J]. Fractals, 2000, **8**(1): 117—121.

[6] Wyss W. The fractional diffusion equation[J]. J Math Phys, 1986, **27**(11): 2782—2785.

[7] Mainardi F. Fractional relaxation_oscillation and fractional diffusion_wave phenomena[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 1996, **7**(9): 1461—1477.

[8] Schneider W R, Wyss W. Fractional diffusion and wave equations[J]. J Math Phys, 1989, **30**(1): 134—144.

[9] Gorenflo R, Luchko Y, Mainardi F. Wright functions as scale_invariant solutions of the diffusion_wave equation[J]. J Comp Appl Math, 2000, **118**(1): 175—191.

[10] Mainardi F, Gorenflo R. On Mittag_Leffler_type function in fractional evolution processes[J]. J Comp Appl Math, 2000, **118**(2): 283—299.

[11] Glockle W G, Nonnenmacher T F. Fox function representation of non_debye relaxation processes[J]. J Stat Phys, 1993, **71**(3/4): 741—757.

[12] Mathai A M, Saxena R K. The H_Function with Applications in Statistics and Other Disciplines [M]. New Delhi: Wiley Eastern Limited, 1978.

The Concentration Distribution of Fractional Anomalous Diffusion Caused by an Instantaneous Point Source

DUAN Jun_sheng[1], XU Ming_yu[2]

(1. Department of Basic Sciences, Tianjin University of Commerce, Tianjin 300134, P.R. China;

2. Institute of Mathematics and Systematical Science, Shandong University, Jinan 250100, P. R. China)

Abstract: The Fox function expression and the analytic expression for the concentration distribution of fractional anomalous diffusion caused by an instantaneous point source in n_dimensional space(n = 1, 2 or 3) are derived by means of the condition of mass conservation, the time_space similarity of the solution, Mellin transform and the properties of the Fox function. And the asymptotic behaviors for the solutions are also given.

Key words: instantaneous point source; anomalous diffusion; fractional calculus; Fox function; Mellin transform