应用数学和力学, 第 24 卷 第 11 期(2003 年 11 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2003) 11_1170_09

一般多值混合隐拟变分不等式的解的存在性与算法*

曾六川

(上海师范大学 数学系, 上海 200234)

(张石生推荐)

摘要: 引入了实 Hilbert 空间中一类新的一般多值混合隐拟变分不等式· 它概括了丁协平教授引入与研究过的熟知的广义混合隐拟变分不等式类成特例· 运用辅助变分原理技巧来解这类一般多值混合隐拟变分不等式· 首先, 定义了具真凸下半连续的二元泛函的新的辅助变分不等式, 并选取了一适当的泛函, 使得其唯一的最小值点等价于此辅助变分不等式的解· 其次, 利用此辅助变分不等式, 构造了用于计算一般多值混合隐拟变分不等式逼近解的新的迭代算法· 在此, 等价性保证了算法能够生成一列逼近解· 最后, 证明了一般多值混合隐拟变分不等式解的存在性与逼近解的收敛性· 而且, 给算法提供了新的收敛判据· 因此, 结果对 M. A. Noor 提出的公开问题给出了一个肯定答案, 并推广和改进了关于各种变分不等式与补问题的早期与最近的结果, 包括最近文献中涉及单值与集值映象的有关混合变分不等式、混合拟变不等式与拟补问题的相应结果·

关 键 词: 一般多值混合隐拟变分不等式; 辅助变分原理的技巧; 存在性; 算法
中图分类号: O177.91 文献标识码: A

引 言

近几年来, 在变分不等式与补问题理论中, 最引入瞩目与最重要的问题之一是如何发展能有效地用于求逼近解的迭代算法· 已熟知, 投影方法是最有效的数值方法之一· 而且, 投影方法在解经典变分不等式与补问题的各种推广形式的问题时, 已发挥了重要作用; 见文[1, 2]· 但不幸的是, 投影方法未能应用于一般混合型变分不等式· 因此, 这个事实促使许多作者去发展辅助原理的技巧来研究各种变分不等式与补问题的解的存在性, 和发展大量的数值方法来解各种变分不等式与补问题·

在此, 我们提醒读者注意到这样一个事实, Noor 在[2~ 4] 等文中多次提到下列公开的问题: 如何把辅助原理的技巧推广到用于解拟变分不等式问题是一个未解决的难题· 这需要进一步研究的努力· 2000 年, Ding[5] 已成功地解决了 Noor 在[2~ 4] 等文中多次提及的这个公开的难题· 他在文[5] 中考虑并研究了一类广义混合隐拟变分不等式· 运用辅助变分原理的技

* 收稿日期: 2001_07_19; 修订日期: 2003_06_19
基金项目: 高等学校优秀青年教师教学和科研奖励基金资助项目; 上海市教委重点学科经费资助项目; 上海市高等学校科学技术发展基金资助项目
作者简介: 曾六川(1965—) , 男, 湖南人, 教授, 博士生导师, 已发表论文 70 余篇
(E_mail: zenglc@hotmail.com).

巧，他建立了关于广义混合隐拟变分不等式的解的几个存在定理，并提出了求逼近解的新的迭代算法，也给出了此算法的收敛判据•　受 Ding[5] 的启发，本文研究了 Hilbert 空间中一类一般多值混合隐拟变分不等式的解的存在性与算法•　所得结果改进和推广了一些早期与最近的结果，也包括 Ding[5] 的那些结果•　而且，本文结果也肯定地回答了 Noor[2~4] 所提及的如上公开的难题•

1　预备知识

设 H 是实 Hilbert 空间，其范数与内积分别为 $\|\cdot\|$ 与 $\langle\cdot,\cdot\rangle$•　设 $g:H\to H$ 是单值映象•　设 2^H 是 H 的所有非空子集族•　设 $K:H\to 2^H$ 是集值映象，使得对每个 $x\in H$，$K(x)$ 是 H 的闭凸子集•　设 $CB(H)$ 是 H 的所有非空有界闭子集族•　设 $T,A:H\to CB(H)$ 是集值映象，$N:H\times H\to H$ 是单值映象•　又设 $b:H\times H\to \mathbf{R}$ 是实函数，满足条件：

1) $b(x,y)$ 依第一个变量是线性的；

2) $b(x,y)$ 依第二个变量是凸的；

3) $b(x,y)$ 是有界的，即，存在常数 $\nu>0$ 使得
$$b(x,y)\leqslant \nu\|x\|\|y\|;$$

4) 对一切 $x,y,z\in H$，
$$b(x,y)-b(x,z)\leqslant b(x,y-z)•$$

我们考虑下列问题：求 $\hat{x}\in H$，$\hat{u}\in T(\hat{x})$ 及 $\hat{v}\in A(\hat{x})$ 使得
$$g(\hat{x})\in K(\hat{x}),\langle N(\hat{u},\hat{v}),y-g(\hat{x})\rangle\geqslant$$
$$b(g(\hat{x}),g(\hat{x}))-b(g(\hat{x}),y)\qquad(\forall y\in K(\hat{x}))•\tag{1}$$
问题(1)称为一般多值混合隐拟变分不等式问题(GMMIQVIP)•

在许多重要的应用中，$K(x)$ 具有下列形式：
$$K(x)=m(x)+K\qquad(\forall x\in H),\tag{*}$$
其中，$m:H\to H$ 是单值映象，且 K 是 H 的闭凸子集•

易见，只要适当地选择映象 g、m、N、T、A、b 及凸集 K，若干熟知且先前已为许多作者研究与考虑过的广义(强)(混合)变分不等式类，广义(强)(混合)拟变分不等式类，及广义(强)拟补问题类皆可作为特例而得到；见文[1~19]•

后面，我们需要下列定义与结果•

定义 1.1　设 $g:H\to H$ 是单值映象，且 $T:H\to CB(H)$ 是集值映象，则称映象 $N:H\times H\to H$

(ⅰ) 依第一个变量关于 T 是 α_g_强单调的，若存在常数 $\alpha>0$ 使得
$$\langle N(u,\cdot)-N(v,\cdot),g(x)-g(y)\rangle\geqslant\alpha\|g(x)-g(y)\|^2$$
$$(\forall x,y\in H,u\in T(x),v\in T(y))•$$

(ⅱ) 依第一个变量是 β_Lipschitz 连续的，若存在常数 $\beta>0$ 使得
$$\|N(u,\cdot)-N(v,\cdot)\|\leqslant\beta\|u-v\|\qquad(\forall u,v\in H)•$$

类似地，可定义 $N(\cdot,\cdot)$ 依第二个变量的 ξ_Lipschitz 连续性•

定义 1.2　设 $g:H\to H$ 是单值映象，则称映象 $m:H\to H$ 是 σ_g_Lipschitz 连续的，若存在常数 $\sigma>0$ 使得
$$\|m(x)-m(y)\|\leqslant\sigma\|g(x)-g(y)\|\qquad(\forall x,y\in H)•$$

定义 1.3 设 $g:H\to H$ 是单值映象，则称集值映象 $T:H\to CB(H)$ 是

(i) α-g-强单调的，若存在常数 $\alpha>0$ 使得

$$\langle u-v,g(x)-g(y)\rangle\geqslant\alpha\|g(x)-g(y)\|^2$$
$$(\forall x,y\in H,u\in T(x),v\in T(y));$$

(ii) γ-g-H-Lipschitz 连续的，若存在常数 $\gamma>0$ 使得

$$H(T(x),T(y))\leqslant\gamma\|g(x)-g(y)\|\qquad(\forall x,y\in H),$$

其中，$H(\cdot,\cdot)$ 是 $CB(H)$ 上的 Hausdorff 距离．

注 1.1 如果 $g\equiv I$ 恒等映象，则上述定义 1.1、定义 1.2 及定义 1.3 分别化为 Ding[5] 的定义 2.1、定义 2.2 及定义 2.3．另一方面，定义 1.1、定义 1.2 及定义 1.3 本质上归功于李红梅与丁协平[6] 及 Chang-Huang[19]．

为了解 GMMIQVIP(1)，我们考虑下列辅助变分不等式问题：对任给的 $x\in H$，$u\in T(x)$ 及 $v\in A(x)$，求 $w=w(x,u,v)\in H$ 使得

$$\begin{aligned}\langle g(w),y-g(w)\rangle\geqslant&\langle g(x),y-g(w)\rangle-\rho\langle N(u,v),y-g(w)\rangle+\\&\rho b(g(x),g(w))-\rho b(g(x),y)\qquad(\forall y\in K(x)),\end{aligned}\tag{2}$$

且 $g(w)\in K(x)$ 是满足(2)的唯一点，其中，$\rho>0$ 是常数．

引理 1.1 设映象 $K:H\to 2^H$ 使得对每个 $x\in H$，$K(x)$ 是映象 $g:H\to H$ 的值域 $g(H)$ 的非空闭凸子集．又设 $T,A:H\to CB(H)$，$N:H\times H\to H$ 及 $b:H\times H\to\mathbf{R}$ 使得对任给的 $x\in H$，泛函 $y\mapsto b(x,y)$ 在 H 上是真凸且下半连续的．则对任给的 $x\in H$，$u\in T(x)$ 及 $v\in A(x)$，存在 $w=w(x,u,v)\in H$ 使得定义如下的泛函 $J:K(x)\to\mathbf{R}$：

$$\begin{cases}J(y)=\dfrac12\langle y,y\rangle+j(y),\\ j(y)=\rho\langle N(u,v),y-g(x)\rangle+\rho b(g(x),y)-\langle g(x),y\rangle\end{cases}\tag{3}$$

在 $K(x)$ 中有唯一的最小值点 $g(w)$，且 $w\in H$ 是使得 $g(w)$ 为 J 在 $K(x)$ 上唯一的最小值点的充要条件是，$w\in H$ 是辅助变分不等式问题(2)的解，且使得 $g(w)\in K(x)$ 是满足(2)的唯一点．

证明 因泛函 $y\mapsto\langle N(u,v),y-g(x)\rangle$ 是连续且仿射的，又因 $y\mapsto b(x,y)$ 在 $K(x)$ 上是真凸下半连续的，故易见，$j(y)$ 在 $K(x)$ 上是真凸下半连续的，且 $J(y)$ 在 $K(x)$ 上是严格凸且下半连续的泛函．据[20，第 25 页]的定理 2.5，j 以超平面 $\gamma(y)=\langle h,y\rangle+r$ 为下界，其中，$h\in H$，$r\in\mathbf{R}$，所以

$$\begin{aligned}J(y)=&\frac12\langle y,y\rangle+j(y)\geqslant\frac12\|y\|^2+\langle h,y\rangle+r=\\&\frac12\|y+h\|^2-\frac12\|h\|^2+r．\end{aligned}$$

于是推得，

$$\text{当}\quad\|y\|\to\infty\text{时，}J(y)\to\infty．\tag{4}$$

今设 $\{y_n\}\subset K(x)$ 是 J 在 $K(x)$ 上的最小化序列，即

$$\lim_{n\to\infty}J(y_n)=d\quad\text{且}\quad d=\inf_{y\in K(x)}J(y)．$$

我们断言，$\{y_n\}$ 有界．若不真，则存在 $\{y_n\}$ 的子列 $\{y_{n_i}\}$，使得 $\|y_{n_k}\|\geqslant k$，$k=1,2,\cdots$．由(4)，有 $J(y_{n_k})\to\infty$．这与事实 $\lim_{k\to\infty}J(y_{n_k})=d<\infty$ 相悖．因此，存在常数 $r_1>0$ 使得

$$\{y_n\}\subset K(x)\cap B(\theta,r_1)=\{y\in K(x):\|y\|\leqslant r_1\}．$$

据 Weierstrass 定理(见[20, 第 24 页]), 存在 $\omega\in K(x)$ 使得

$$J(\omega)=\min_{y\in K(x)}J(y)\cdot$$

则 J 的严格凸性推得, ω 是 J 在 $K(x)$ 上的唯一的最小值点• 因为 $K(x)\subset g(H)$, 故存在 $w=w(x,u,v)\in H$ 使得 $\omega=g(w)$•

今设 $w=w(x,u,v)\in H$ 使得, $g(w)$ 是 J 在 $K(x)$ 上的唯一最小值点• 下证, w 也是辅助变分不等式(2) 的解• 事实上, 对任意的 $y\in K(x)$ 及 $t\in[0,1]$, 有

$$\begin{aligned}J(g(w))={}&\frac{1}{2}\langle g(w),g(w)\rangle+j(g(w))\leqslant J(g(w)+t(y-g(w)))=\\&\frac{1}{2}\langle g(w)+t(y-g(w)),g(w)+t(y-g(w))\rangle+j(g(w)+t(y-g(w)))\leqslant\\&\frac{1}{2}\langle g(w),g(w)\rangle+\frac{t^2}{2}\langle y-g(w),y-g(w)\rangle+\\&t\langle g(w),y-g(w)\rangle+j(g(w))+t(j(y)-j(g(w)))\cdot\end{aligned}$$

于是, 有

$$\frac{t}{2}\langle y-g(w),y-g(w)\rangle+\langle g(w),y-g(w)\rangle+j(y)-j(g(w))\geqslant 0\cdot$$

在上述不等式中, 令 $t\to 0$, 得到

$$\begin{aligned}&\langle g(w),y-g(w)\rangle+\rho\langle N(u,v),y-g(x)\rangle+\rho b(g(x),y)-\langle g(x),y\rangle-\\&\quad\rho\langle N(u,v),g(w)-g(x)\rangle-\rho b(g(x),g(w))+\langle g(x),g(w)\rangle\geqslant 0\cdot\end{aligned}$$

所以, 有

$$\begin{aligned}&\langle g(w),y-g(w)\rangle\geqslant\langle g(x),y-g(w)\rangle-\rho\langle N(u,v),y-g(w)\rangle+\\&\quad\rho b(g(x),g(w))-\rho b(g(x),y)\qquad\forall y\in K(x)\cdot\end{aligned}\tag{5}$$

这就证明了, $w=w(x,u,v)$ 是辅助变分不等式问题(2) 的解•

反之, 假设 w 是辅助变分不等式(2) 的解• 由(5) 得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}[\langle y,y\rangle-\langle g(w),g(w)\rangle]=\\&\quad\frac{1}{2}[\langle g(w)+y-g(w),g(w)+y-g(w)\rangle-\langle g(w),g(w)\rangle]=\\&\quad\langle g(w),y-g(w)\rangle+\frac{1}{2}\langle y-g(w),y-g(w)\rangle\geqslant\langle g(w),y-g(w)\rangle\geqslant\\&\quad\langle g(x),y\rangle-\langle g(x),g(w)\rangle-\rho\langle N(u,v),y-g(w)\rangle+\\&\quad\rho b(g(x),g(w))-\rho b(g(x),y)=\\&\quad\langle g(x),y\rangle-\langle g(x),g(w)\rangle-\rho\langle N(u,\\&\quad v),y-g(x)\rangle+\rho\langle N(u,v),g(w)-g(x)\rangle+\\&\quad\rho b(g(x),g(w))-\rho b(g(x),y)\qquad\forall y\in K(x)\cdot\end{aligned}$$

由此即得, $J(y)\geqslant J(g(w))\quad\forall y\in K(x)$• 所以, $J(g(w))=\min_{y\in K(x)}J(y)$• 这就结束了证明•

2 解的存在性与算法

受 Ding[5, 算法 3. 1] 的启发, 我们提出下列新的迭代算法, 来求一般多值混合隐拟变分不等式问题(1) 的逼近解•

算法 2. 1 迭代算法

(i) 在第 $n=0$ 步, 先取某 $x_0\in H$, $u_0\in T(x_0)$ 及 $v_0\in A(x_0)$• 据引理 1. 1, 再取辅助

变分不等式(2) 的解 $x_1 = w(x_0, u_0, v_0) \in H$, 使得 $g(x_1) \in K(x_0) \subset g(H)$ 是满足(2) 的唯一点• 又据文[21], 存在 $u_1 \in T(x_1)$ 与 $v_1 \in A(x_1)$ 使得

$$\|u_1 - u_0\| \leqslant (1+1)H(T(x_1), T(x_0)),$$
$$\|v_1 - v_0\| \leqslant (1+1)H(A(x_1), A(x_0))\text{•}$$

(ii) 在第 n 步, 取 $x_n = w(x_{n-1}, u_{n-1}, v_{n-1}) \in H$, $u_n \in T(x_n)$ 及 $v_n \in A(x_n)$, 解辅助变分不等式(2), 其中, x_n 使得 $g(x_n) \in K(x_{n-1}) \subset g(H)$ 是满足(2) 的唯一点, 据引理 1.1, 再取辅助变分不等式(2) 的解 $x_{n+1} = w(x_n, u_n, v_n) \in H$, 使得 $g(x_{n+1}) \in K(x_n) \subset g(H)$ 是满足(2) 的唯一点, 又据文[21], 存在 $u_{n+1} \in T(x_{n+1})$ 与 $v_{n+1} \in A(x_{n+1})$ 使得

$$\|u_{n+1} - u_n\| \leqslant (1+(1+n)^{-1})H(T(x_{n+1}), T(x_n)),$$
$$\|v_{n+1} - v_n\| \leqslant (1+(1+n)^{-1})H(A(x_{n+1}), A(x_n))\text{•}$$

(iii) 若对给定的 $\varepsilon > 0$, $\|g(x_{n+1}) - g(x_n)\| \leqslant \varepsilon$, 则停算• 否则, 转(ii)•

定理 2.1 设 $g: H \to H$ 是具有闭值域 $g(H)$ 的单值映象, $K: H \to 2^H$ 是集值映象, 使得每个 $K(x)$ 是 $g(H)$ 的子集, 且具有形式(*)• 设 $T, A: H \to CB(H)$ 分别是 γ_H_Lipschitz 连续的与 μ_H_Lipschitz 连续的• 设 $N(\cdot, \cdot): H \times H \to H$ 依第一个变量关于 T 是 α_g_强单调的, 且依第一个变量是 β_Lipschitz 连续的• 设 $N(\cdot, \cdot): H \times H \to H$ 依第二个变量是 ξ_Lipschitz 连续的• 设 $m: H \to H$ 是 σ_g_Lipschitz 连续的, 且 $b: H \times H \to \mathbf{R}$ 满足条件: 1) ~ 4)• 假设存在常数 $\rho > 0$ 使得

$$\begin{cases} k = \mu\xi + \nu, \ \rho k + 2\sigma < 1, \ \alpha > k + \sqrt{(\beta^2\gamma^2 - k^2)4\sigma(1-\sigma)}, \\ \left|\rho - \dfrac{\alpha - k}{\beta^2\gamma^2 - k^2}\right| \leqslant \dfrac{\sqrt{(\alpha-k)^2 - (\beta^2\gamma^2 - k^2)4\sigma(1-\sigma)}}{\beta^2\gamma^2 - k^2}\text{•} \end{cases} \tag{6}$$

则存在 $x \in H$, $u \in T(x)$ 及 $v \in A(x)$, 是 GMMIQVIP(1) 的解• 而且, 序列 $\{g(x_n)\}$、$\{u_n\}$ 及 $\{v_n\}$ 分别强收敛到 $g(x)$、u 及 v, 其中, 序列 $\{x_n\}$、$\{u_n\}$ 及 $\{v_n\}$ 由算法 2.1 生成•

证明 先证, 对任给的 $x \in H$, $u \in T(x)$ 及 $v \in A(x)$, 辅助变分不等式(2) 有解 $w = w(x, u, v) \in H$, 使得 $g(w) \in K(x) \subset g(H)$ 是满足(2) 的唯一点• 易见, 泛函

$$y \mapsto \langle N(u, v), y - g(x)\rangle$$

是连续且仿射的• 由 b 的假设 2) ~ 4) 推得, 泛函 $y \mapsto b(x, y)$ 也是凸连续的• 据引理 1.1, 辅助变分不等式(2) 有解 $w = w(x, u, v) \in H$, 使得 $g(w) \in K(x) \subset g(H)$ 是满足(2) 的唯一点• 于是, 算法 2.1 就定义好了• 由算法 2.1 得知, $\{x_n\}$、$\{u_n\}$、$\{v_n\}$ 及 $\{w_n\}$ 满足下列条件: 对一切 $n \geqslant 0$,

$$\begin{cases} x_{n+1} = w_n = w(x_n, u_n, v_n), \\ u_n \in T(x_n), \ v_n \in A(x_n), \ g(w_n) \in K(x_n) \subset g(H), \\ \|u_{n+1} - u_n\| \leqslant (1+(1+n)^{-1})H(T(x_{n+1}), T(x_n)), \\ \|v_{n+1} - v_n\| \leqslant (1+(1+n)^{-1})H(A(x_{n+1}), A(x_n)), \end{cases} \tag{7}$$

且

$$\begin{aligned} \langle g(w_n), y - g(w_n)\rangle \geqslant{} & \langle g(x_n), y - g(w_n)\rangle - \rho\langle N(u_n, v_n), y - g(w_n)\rangle + \\ & \rho b(g(x_n), g(w_n)) - \rho b(g(x_n), y) \qquad \forall y \in K(x_n)\text{•} \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \langle g(w_{n+1}), y - g(w_{n+1})\rangle \geqslant{} & \langle g(x_{n+1}), y - g(w_{n+1})\rangle - \\ & \rho\langle N(u_{n+1}, v_{n+1}), y - g(w_{n+1})\rangle + \rho b(g(x_{n+1}), g(w_{n+1})) - \end{aligned}$$

$$\rho b(g(x_{n+1}),y) \qquad (\forall y\in K(x_{n+1})).\tag{9}$$

在不等式(8)的两边加上 $\langle -m(x_n),y-g(w_n)\rangle$，然后，取

$$y=g(w_{n+1})-m(x_{n+1})+m(x_n)\in K(x_n),$$

可得

$$\begin{aligned}&\langle g(w_n)-m(x_n),g(w_{n+1})-m(x_{n+1})+m(x_n)-g(w_n)\rangle\geqslant\\&\quad\langle g(x_n)-m(x_n),g(w_{n+1})-m(x_{n+1})+m(x_n)-g(w_n)\rangle-\\&\quad\rho\langle N(u_n,v_n),g(w_{n+1})-m(x_{n+1})+m(x_n)-g(w_n)\rangle+\\&\quad\rho b(g(x_n),g(w_n))-\rho b(g(x_n),g(w_{n+1})-m(x_{n+1})+m(x_n)).\end{aligned}\tag{10}$$

在不等式(9)的两边加上 $\langle -m(x_{n+1}),y-g(w_{n+1})\rangle$，然后，取

$$y=g(w_n)-m(x_n)+m(x_{n+1})\in K(x_{n+1}),$$

可得

$$\begin{aligned}&\langle g(w_{n+1})-m(x_{n+1}),g(w_n)-m(x_n)+m(x_{n+1})-g(w_{n+1})\rangle\geqslant\\&\quad\langle g(x_{n+1})-m(x_{n+1}),g(w_n)-m(x_n)+m(x_{n+1})-g(w_{n+1})\rangle-\\&\quad\rho\langle N(u_{n+1},v_{n+1}),g(w_n)-m(x_n)+m(x_{n+1})-g(w_{n+1})\rangle+\\&\quad\rho b(g(x_{n+1}),g(w_{n+1}))-\rho b(g(x_{n+1}),g(w_n)-m(x_n)+m(x_{n+1})).\end{aligned}\tag{11}$$

把不等式(10)与(11)相加，利用 $b(\cdot,\cdot)$ 的假设，有

$$\begin{aligned}&\langle g(w_n)-g(w_{n+1})-m(x_n)+m(x_{n+1}),g(w_n)-\\&\quad g(w_{n+1})-m(x_n)+m(x_{n+1})\rangle\leqslant\\&\quad\langle g(x_n)-g(x_{n+1})-m(x_n)+m(x_{n+1}),g(w_n)-\\&\quad g(w_{n+1})-m(x_n)+m(x_{n+1})\rangle+\\&\quad\rho\langle N(u_n,v_n),g(w_{n+1})-m(x_{n+1})+m(x_n)-g(w_n)\rangle+\\&\quad\rho\langle N(u_{n+1},v_{n+1}),g(w_n)-m(x_n)+m(x_{n+1})-g(w_{n+1})\rangle+\\&\quad\rho[b(-g(x_n),g(w_n))-b(-g(x_n),g(w_{n+1})-m(x_{n+1})+m(x_n))+\\&\quad b(g(x_{n+1}),g(w_n)-m(x_n)+m(x_{n+1}))-b(g(x_{n+1}),g(w_{n+1}))]\leqslant\\&\quad\{\|m(x_n)-m(x_{n+1})\|+\|g(x_n)-g(x_{n+1})-\rho(N(u_n,v_n))-\\&\quad N(u_{n+1},v_n))\|+\rho\|N(u_{n+1},v_{n+1})-N(u_{n+1},v_n)\|+\rho\nu\|g(x_n)-\\&\quad g(x_{n+1})\|\}\|g(w_n)-g(w_{n+1})-m(x_n)+m(x_{n+1})\|.\end{aligned}\tag{12}$$

由(12)推得

$$\begin{aligned}&\|g(w_n)-g(w_{n+1})\|\leqslant\\&\quad 2\|m(x_n)-m(x_{n+1})\|+\|g(x_n)-g(x_{n+1})-\\&\quad\rho(N(u_n,v_n)-N(u_{n+1},v_n))\|+\\&\quad\rho\|N(u_{n+1},v_{n+1})-N(u_{n+1},v_n)\|+\rho\nu\|g(x_n)-g(x_{n+1})\|.\end{aligned}\tag{13}$$

因 $N(\cdot,\cdot)$ 依第一个变量关于 T 是 α_g_强单调的，且依第一个变量是 β_Lipschitz 连续的；又因 T 是 γ_$\underline{gH}$_Lipschitz 连续的，所以，利用 Ding[5]的方法，有

$$\begin{aligned}&\|g(x_n)-g(x_{n+1})-\rho[N(u_n,v_n)-N(u_{n+1},v_n)]\|^2=\\&\quad\|g(x_n)-g(x_{n+1})\|^2-2\rho\langle N(u_n,v_n)-N(u_{n+1},v_n),g(x_n)-\\&\quad g(x_{n+1})\rangle+\rho^2\|N(u_n,v_n)-N(u_{n+1},v_n)\|^2\leqslant\\&\quad\|g(x_n)-g(x_{n+1})\|^2-2\rho\alpha\|g(x_n)-\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&g(x_{n+1})\|^2+\rho^2\beta^2\|u_n-u_{n+1}\|^2\leqslant\\&(1-2\rho\alpha)\|g(x_n)-g(x_{n+1})\|^2+\\&\rho^2\beta^2[(1+(1+n)^{-1})H(T(x_n),T(x_{n+1}))]^2\leqslant\\&[1-2\rho\alpha+\rho^2\beta^2\gamma^2(1+(1+n)^{-1})^2]\|g(x_n)-g(x_{n+1})\|^2.\end{aligned}\tag{14}$$

利用 $N(\cdot,\cdot)$ 依第二个变量的 ξ_Lipschitz 连续性及 A 的 μ_g_H_Lipschitz 连续性, 有

$$\begin{aligned}&\|N(u_{n+1},v_{n+1})-N(u_{n+1},v_n)\|\leqslant\\&\xi\|v_n-v_{n+1}\|\leqslant\xi(1+(1+n)^{-1})H(A(x_n),A(x_{n+1}))\leqslant\\&\xi\mu(1+(1+n)^{-1}\|g(x_n)-g(x_{n+1})\|.\end{aligned}\tag{15}$$

由于 m 是 σ_g_Lipschitz 连续的, 故有

$$\|m(x_n)-m(x_{n+1})\|\leqslant\sigma\|g(x_n)-g(x_{n+1})\|.\tag{16}$$

由(13)~(16)推得

$$\begin{aligned}&\|g(w_n)-g(w_{n+1})\|\leqslant\Big\{\sqrt{1-2\rho\alpha+\rho^2\beta^2\gamma^2(1+(1+n)^{-1})^2}+\\&\rho[\mu\xi(1+(1+n)^{-1})+\nu]+2\sigma\Big\}\|g(x_n)-g(x_{n+1})\|=\\&(t_n(\rho)+\rho k_n+2\sigma)\|g(x_n)-g(x_{n+1})\|=\\&\theta_n\|g(x_n)-g(x_{n+1})\|,\end{aligned}$$

其中

$$\theta_n=t_n(\rho)+\rho k_n+2\sigma,\quad k_n=\mu\xi(1+(1+n)^{-1})+\nu,$$
$$t_n(\rho)=\sqrt{1-2\rho\alpha+\rho^2\beta^2\gamma^2(1+(1+n)^{-1})^2}.$$

于是推得

$$\begin{aligned}&\|g(x_{n+1})-g(x_{n+2})\|=\|g(w_n)-g(w_{n+1})\|\leqslant\\&\theta_n\|g(x_n)-g(x_{n+1})\|.\end{aligned}\tag{17}$$

令 $\theta=t(\rho)+\rho k+2\sigma$, $t(\rho)=\sqrt{1-2\rho\alpha+\rho^2\beta^2\gamma^2}$, 且 $k=\mu\xi+\nu$, 则有 $t_n(\rho)\to t(\rho)$, $k_n\to k$ 且 $\theta_n\to\theta(n\to\infty)$. 由(6)推得 $\theta<1$. 因此, 存在 $\theta_0<1$ 且 $n_0>0$ 使得 $\theta_n\leqslant\theta_0<1$, $\forall n\geqslant n_0$. 从而, 由(17)推得, $\{g(x_n)\}$ 是 $g(H)$ 中的 Cauchy 序列, 而且易见, 存在 $x\in H$ 使得 $g(x_n)\to g(x)\ (n\to\infty)$. 由于 T 与 A 都是 g_H_Lipschitz 连续的, 故由(7)可得

$$\begin{aligned}&\|u_{n+1}-u_n\|\leqslant(1+(1+n)^{-1})H(T(x_{n+1}),T(x_n))\leqslant\\&(1+(1+n)^{-1})\gamma\|g(x_{n+1})-g(x_n)\|,\\&\|v_{n+1}-v_n\|\leqslant(1+(1+n)^{-1})H(A(x_{n+1}),A(x_n))\leqslant\\&(1+(1+n)^{-1})\mu\|g(x_{n+1})-g(x_n)\|.\end{aligned}$$

所以, $\{u_n\}$ 与 $\{v_n\}$ 也是 Cauchy 序列. 令 $u_n\to u$ 且 $v_n\to v\ (n\to\infty)$. 注意到 $u_n\in T(x_n)$. 因此, 有

$$\begin{aligned}&d(u,T(x))\leqslant\|u-u_n\|+d(u_n,T(x_n))+H(T(x_n),T(x))\leqslant\\&\|u-u_n\|+\gamma\|g(x_n)-g(x)\|\to0\ (n\to\infty).\end{aligned}$$

于是有 $u\in T(x)$. 类似地, 可得 $v\in A(x)$. 据引理1.1, 可设 $w=w(x,u,v)$ 是辅助变分不等式(2)的解, 使得 $g(w)\in K(x)\subset g(H)$ 是满足(2)的唯一点, 即

$$\begin{aligned}&\langle g(w),y-g(w)\rangle\geqslant\langle g(x),y-g(w)\rangle-\rho\langle N(u,v),y-g(w)\rangle+\\&\rho b(g(x),g(w))-\rho b(g(x),y)\qquad(\forall y\in K(x)).\end{aligned}\tag{18}$$

令证, $g(x)=g(w)$. 利用(8)、(18)及如同证明(13)的一样证明, 可得

$$\begin{aligned}\|g(w_n)-g(w)\| \leqslant & 2\|m(x_n)-m(x)\|+\\ & \|g(x_n)-g(x)-\rho(N(u_n,v_n)-N(u,v_n))\|+\\ & \rho\|N(u,v)-N(u,v_n)\|+\rho\nu\|g(x_n)-g(x)\| \leqslant\\ & (2\sigma+1+\rho\nu)\|g(x_n)-g(x)\|+\rho\beta\|u_n-u\|+\rho\xi\|v_n-v\| \to 0\end{aligned}$$

$(n\to\infty)$• 因而,有 $g(x_{n+1})=g(w_n)\to g(w)$ $(n\to\infty)$• 由于 $g(x_n)\to g(x)$ $(n\to\infty)$ 故有 $g(x)=g(w)$• 而且易见 $g(x)\in K(x)$• 令由(18)推得

$$\langle N(u,v),y-g(x)\rangle \geqslant b(g(x),g(x))-b(g(x),y) \qquad (\forall y\in K(x))\text{•}$$

所以, $x\in H$, $u\in T(x)$ 及 $v\in A(x)$ 是GMMIQVIP(1)的解•

注 2.1 若 $g\equiv I$ 恒等映象,则由定理 2.1 立即推得 Ding[5]的定理 3.1 成立•

[参 考 文 献]

[1] Harker P T, Pang J S. Finit_dimensional variational inequatlity and nonlinear complementarity problems: a survey of theory, algorithms and applications[J]. Math Programming, 1990, **48**(2): 161—220.

[2] Noor M A, Noor K I, Rassias T M. Some aspects of variational inequalities[J]. J Comput Appl Math, 1993, **47**: 285—312.

[3] Noor M A. General algorithm for variational inequalities I[J]. Math Japonica, 1993, **38**: 47—53.

[4] Noor M A. Some recent advances in variational inequalities_Part Ⅰ: Basic concepts[J]. New Zealand J Math, 1997, **26**: 53—80.

[5] DING Xie_ping. Existence and algorithm of solutions for generalized mixed implicit quasi_variational inequalities[J]. Appl Math Comput, 2000, **113**: 67—80.

[6] 李红梅, 丁协平. 广义强非线性拟补问题[J]. 应用数学和力学, 1994, **15**(4): 289—296.

[7] Cohen G. Auxiliary problem principle extended to variational inequalities[J]. J Optim Theory Appl, 1988, **59**: 325—333.

[8] DING Xie_ping. General algorithm of solutions for nonlinear variational inequalities in Banach spaces [J]. Computer Math Appl, 1997, **34**: 131—137.

[9] Noor M A. Nonconvex functions and variational inequalities[J]. J Optim Theory Appl, 1995, **87**: 615—630.

[10] Noor M A. Multivalued strongly nonlinear quasivariational inequalities[J]. Chin J Math, 1995, **23**: 275—286.

[11] Noor M A. On a class of multivalued variational inequalities[J]. J Appl Math Stochastic Anal, 1998, **11**: 79—93.

[12] Noor M A. Auxiliary principle for generalized mixed variational_like inequalities[J]. J Math Anal Appl, 1997, **215**: 75—85.

[13] Chang S S, Huang N J. Genralized strongly nonlinear quasi_complementarity problems in Hilbert spaces[J]. J Math Anal Appl, 1991, **158**, 194—202.

[14] ZENG Lu_chuan. Iterative algorithms for finding approximate solutions for general strongly nonlinear variational inequalities[J]. J Math Anal Appl, 1994, **187**: 352—360.

[15] ZENG Lu_chuan. Completely generalized strongly nonlinear quasi_complementarity problems in Hilbert spaces[J]. J Math Anal Appl, 1995, **193**: 706—714.

[16] ZENG Lu_chuan. Iterative algorithm for finding approximate solutions to completely generalized strongly nonlinear quasi_variational inequalities[J]. J Math Anal Appl, 1996, **201**: 180—194.

[17] ZENG Lu_chuan. On a general projection algorithm for variational inequalities[J]. J Optim theory

Appl, 1998, **97**(1): 229—235.

[18] DING Xie_ping. A new class of generalized strongly nonlinear quasivariational inequalities and quasi_complementarity problems[J]. *Indian J Pure Appl Math*, 1994, **25**: 1115—1128.

[19] Chang S S, Huang N J. Generalized multivalued implicit complementarity problem in Hilbert space [J]. *Math Japonica*, 1991, **36**(6): 1093—1100.

[20] Pascali D, Sburlan S. *Nonlinear Mappings of Monotone Type*[M]. The Netherlands: Sijthoff & Noordhoof, 1978: 24—25.

[21] Nadler S B, Jr. Multi_valued contraction mappings[J]. *Pacific J Math*, 1969, **30**: 475—487.

Existence and Algorithm of Solutions for General Multivalued Mixed Implicit Quasi_Variational Inequalities

ZENG Lu_chuan

(Department of Mathematics, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, P.R.China)

Abstract: A new class of general multivalued mixed implicit quasi_variational inequalities in a real Hilbert space was introduced, which includes the known class of generalized mixed implicit quasi_variational inequalities as a special case, introduced and studied by Ding Xie_ping. The auxiliary variational principle technique was applied to solve this class of general multivalued mixed implicit quasi_variational inequalities. Firstly, a new auxiliary variational inequality with a proper convex, lower semicontinuous, binary functional was defined and a suitable functional was chosen so that its unique minimum point is equivalent to the solution of such an auxiliary variational inequality. Secondly, this auxiliary variational inequality was utilized to construct a new iterative algorithm for computing approximate solutions to general multivalued mixed implicit quasi_variational inequalities. Here, the equivalence guarantees that the algorithm can generate a sequence of approximate solutions. Finally, the existence of solutions and convergence of approximate solutions for general multivalued mixed implicit quasi_variational nequalities are proved. Moreover, the new convergerce criteria for the algorithm were provided. Therefore, the results give an affirmative answer to the open question raised by M. A. Noor, and extend and improve the earlier and recent results for various variational inequalities and complementarity problems including the corresponding results for mixed variational inequalities, mixed quasi_variatoinal inequalities and quasi_complementarity problems involving the single_valued and set_valued mappings in the recent literature.

Key words: general multivalued mixed implicit quasi_variational inequality; auxiliary variational principle technique; existence; algorithm