

文章编号: 1000-0887(2003) 11-1191\_06

# 粘弹性运动带动力响应分析<sup>\*</sup>

李映辉<sup>1</sup>, 高庆<sup>1</sup>, 蹇开林<sup>2</sup>, 殷学纲<sup>2</sup>

(1. 西南交通大学 应用力学与工程系, 成都 610031;

2. 重庆大学 工程力学系, 重庆 400044)

(我刊原编委张汝清推荐)

**摘要:** 基于 Kelvin 粘弹性材料本构模型及带运动方程, 建立了运动带非线性动力学分析模型。基于该模型和 Lie 群分析方法推导了匀速运动及简谐运动带线性问题的解析解; 基于该非线性模型的数值仿真讨论了运动带材料参数、带稳态运动速度、扰动速度对系统动态响应的影响。结果表明: 1) 当带匀速运动时, 无论系统是线性还是非线性, 运动带横向振动“频率”都随着带运动稳态速度增加而减小。2) 随着材料粘性增加, 系统耗散能力逐渐增强, 动态响应逐渐减小。3) 当带运动速度简谐波动时, 系统动态响应随扰动速度增大而增大。扰动频率对带横向振动影响较大。

**关键词:** 运动带; 粘弹性; Lie 群; 动力响应

**中图分类号:** TU501; TU511.1.32      **文献标识码:** A

## 引 言

运动带是典型的轴向运动系统, 该系统中常发生大振幅横向振动, 驱动带产生时变张力而出现大振幅的参数振动。Huang 和 Fung 等研究了轴向运动弦三维振动响应及其动力稳定性<sup>[1]</sup>。Perkins 和 Moto 等给出了运动索非平凡极限环稳定的边界条件的解析表达式<sup>[2]</sup>。

但这些对轴向运动系统的研究, 都是基于材料线弹性假设下进行的。由于轴向运动系统通常由粘弹性金属或粘弹性聚合物材料构成, 因此应引入粘弹性本构关系精确描述轴向运动系统的材料性质。同时很多工程设计也需要了解结构的粘弹性行为, 例如: 磁带的蠕变, 导管的振动、带锯的运动等。粘弹性弦、粘弹性索和粘弹性带的动力学特征已引起了人们关注, Fung 和 Huang 等研究了运动粘弹性弦的瞬时运动<sup>[3,4]</sup>, Zhang 和 Zu 讨论了运动带非线性参数振动<sup>[5]</sup>, Li 和 Yin 研究了粘弹性索非线性动力响应<sup>[6]</sup>, Chen 和 Zhang 等研究了粘弹性运动弦的屈曲及混沌行为<sup>[7]</sup>。但目前对粘弹性轴向运动系统的解析解及非线性动力响应的研究未见报道。

本文基于 Kelvin 粘弹性材料本构模型及带运动方程, 建立轴向运动粘弹性带系统非线性动力学模型。推导此类轴向运动系统线性问题的解析解; 研究材料参数、带运动速度等对此类轴向运动系统非线性动力响应的影响。

\* 收稿日期: 2002\_02\_08; 修订日期: 2003\_05\_05

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(59636140)

作者简介: 李映辉(1964—), 男, 四川南江人, 副教授, 博士(E-mail: liyinghui@sina.com)。

## 2 控制方程

粘弹性轴向运动带物理模型如图1, 仅考虑  $y$  方向上横向振动, 忽略体力, 得到运动带在  $y$  方向上的运动方程为

$$\left( \frac{T}{A} + \sigma \right) v_{xx} + v_x \sigma_x = \rho d^2 v / dt^2, \quad (1)$$

其中,  $\sigma$  为带在轴向方向的动应力,  $v$  为  $y$  方向上的横向位移,  $A$  为带横截面面积,  $\rho$  为带单位体积质量,  $T$  为带初始张力,  $x_t = dx/dt$  为带轴向运动速度,  $L$  为带长度。

用 Kelvin 粘弹性本构模型描述材料粘弹性性质, 线性粘弹性微分本构定律为

$$\sigma = E\varepsilon + \eta \dot{\varepsilon} \quad (2)$$

其中,  $E$  为带材料的弹性模量,  $\eta$  为材料动力学粘性,  $\varepsilon$  为  $x$  方向上的 Lagrangian 应变分量, 与位移分量的关系为

$$\varepsilon(x, t) = 0.5 v_x^2(x, t) \quad (3)$$

由方程(1), (2), (3) 得到弹性运动带一般非线性动力学方程为

$$\rho v_t + 2\rho x_t v_{xt} + \rho x_t v_x + \left( \rho x_t^2 - \frac{T}{A} \right) v_{xx} = \frac{3}{2} E v_x^2 v_{xx} + \eta (x_t v_x^2 v_{xxx} + 2x_t v_x v_{xx}^2 + v_x^2 v_{xxt} + 2v_x v_{xx} v_{xt}) \quad (4)$$

边界条件为

$$v(0, t) = v(L, t) = 0$$

方程(4)及边界条件完全描述了粘弹性运动带的横向运动, 当  $\eta = 0$  时, 就得到文献[2]描述的弹性索面外横向振动的控制方程。

定义如下无量纲参数

$$V = v/L, \quad \xi = x/L, \quad \tau = t \sqrt{T/(\rho A L^2)},$$

$$E_e = EA/T, \quad E_v = \eta \sqrt{A/(\rho A L^2)}, \quad c = c(\tau) = x_t \sqrt{\rho A/T}$$

方程(4)及边界条件简化为如下无量纲形式

$$V\tau + 2cV\xi\tau + c\tau\xi + (c^2 - 1)V\xi\xi = 1.5E_e V\xi^2 V\xi\xi + E_v (V\xi^2 V\xi\xi\tau + 2V\xi V\xi\xi V\xi\xi + cV\xi^2 V\xi\xi\xi + 2cV\xi V\xi\xi^2) \quad (5)$$

$$V(0, \tau) = V(1, \tau) = 0 \quad (6)$$

## 2 线性问题的解析解

不计方程(5)的非线性部分得如下线性方程

$$V\xi\xi + 2cV\xi\tau + c\tau\xi + (c^2 - 1)V\xi\xi = 0 \quad (7)$$

文献[5]指出, 当带轴向运动速度  $c(\tau) \geq 1$  时出现分叉不稳定, 因此本文研究中始终假设  $c(\tau) < 1$ 。

应用 Lie 群分析方法, 得到方程(7)的等效算子<sup>[8,9]</sup>

$$Y = \xi_1(\xi, \tau, V) \frac{\partial}{\partial \xi} + \xi_2(\xi, \tau, V) \frac{\partial}{\partial \tau} + \xi_3(\xi, \tau, V) \frac{\partial}{\partial V} + \xi_4(\xi, \tau, V) \frac{\partial}{\partial c} \quad (8)$$

其中, 无穷小量  $\xi_1 = a\xi + h(\tau)$ ,  $\xi_2 = a\tau + b$ ,  $\xi_3 = fV + d\tau + e$ ,  $\xi_4 = dh/d\tau$ , 这里  $a, b, d, e, f$  为常数,  $h$  为  $\tau$  的任意函数。等效算子(8)在  $(\tau, c)$  空间上的投影为

$$P = \xi_2 \partial / \partial \tau + \xi_4 \partial / \partial c, \quad (9)$$

将该投影算子(9)用于  $c = c(\tau)$  得

$$\left[ (a\tau + b) \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{dh}{d\tau} \frac{\partial}{\partial c} \right] [c - c(\tau)] = 0, \quad (10)$$

由方程(10)得到分类关系

$$c(\tau) = \int \frac{1}{a\tau + b} \frac{dh}{d\tau} d\tau. \quad (11)$$

## 2.1 常速度运动

当运动速度  $c$  为常数时,由分类关系(11)得  $h(\tau)$  为常数,这时无穷小量

$$\xi_1 = a\xi + h(\tau), \quad \xi_2 = a\tau + b, \quad \xi_3 = fV + d\tau + e.$$

因此常速度系统为有六个任选参数的 Lie 群变换。选择  $a = d = e = 0$ , 其余参数为任意常数,由变换群理论得方程(7)的类解

$$V(\xi, \tau) = Ce^{\alpha\xi + \beta\tau}, \quad (12)$$

其中,  $\alpha, \beta$  为由参数  $b, f$  和  $h$  确定,  $C$  为由边界条件确定的任意常数。

将边界条件(6)代入(12)得到方程(7)的解为

$$V(\xi, \tau) = C \cos[n\pi(1 - c^2)\tau + n\pi c\xi + \theta] \sin n\pi\xi \quad (13)$$

其中,  $C$  和  $\theta$  由初始条件确定。可见对常速运动带, 振动频率随带运动速度增加而减小; 初始相位与运动速度成正比。

## 2.2 简谐速度运动

假设带运动速度为如下简谐函数时

$$c(\tau) = c_0 + c_1 \sin \omega\tau. \quad (14)$$

算子(8)中无穷小量形式为

$$\begin{aligned} \xi_1 &= a\xi + ac_1(\tau \sin \omega\tau + \cos \omega\tau / \omega) + bc_1 \sin \omega\tau + k, \\ \xi_2 &= a\tau + b, \quad \xi_3 = fV + d\tau + e. \end{aligned}$$

选择参数  $b, f$  为任意常数, 其余参数为 0, 得到方程(7)的类解为

$$V(\xi, \tau) = e^{\gamma\tau} \left\{ C_1 \exp \left[ \frac{\gamma}{1+c_0} \left( \xi + \frac{c_1}{\omega} \cos \omega\tau \right) \right] + C_2 \exp \left[ \frac{\gamma}{1-c_0} \left( \xi + \frac{c_1}{\omega} \cos \omega\tau \right) \right] \right\}, \quad (15)$$

其中  $\gamma = f/b$ ,  $C_1$  和  $C_2$  由初始条件确定。

将边界条件(6)代入(15)得到方程(7)的解为

$$\begin{aligned} V(\xi, \tau) &= C \left\{ \cos[n\pi(1 - c_0^2)\tau + n\pi c_0\xi + \theta] \sin n\pi\xi + \right. \\ &\quad \left. \frac{n\pi c_1}{\omega} \cos \omega\tau \left\{ \cos n\pi\xi \cos[n\pi(1 - c_0^2)\tau + n\pi c_0\xi + \theta] - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cos n\pi\xi \sin[n\pi(1 - c_0^2)\tau + n\pi c_0\xi + \theta] \right\} \right\}, \quad (16) \end{aligned}$$

其中,  $C$  和  $\theta$  由初始条件确定。在解表达式(16)中, 第一项为常速运动解, 第二项为速度简谐波动引起的解。可见对以简谐速度运动的带, 横向振动频率随速度的稳态部分增加而减小, 与波动部分无关。但横向振动振幅随波动增加而增大, 同时当速度波动频率很小时, 振动幅可能很大。因此为避免带横向振幅过大, 应保证带尽可能匀速运动。

## 3 非线性问题的解

非线性方程(5)不能得到其精确求解, 令:

$$V(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\tau) \phi_n(\xi), \tag{17}$$

其中,  $\phi_n(\xi) = \sin(n\pi\xi)$  为满足边界条件(6)的模式函数. 由方程(5)和方程(17)得

$$\dot{f}_m + \sum_{i=1}^{\infty} (A_{mij}^{(1)} \dot{f}_i + A_{mij}^{(2)} f_i) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (B_{mijk}^{(1)} f_i f_j f_k + B_{mijk}^{(2)} f_i f_j \dot{f}_k) = 0, \tag{18}$$

其中, 当  $m = 1, 2, \dots$ , 时,

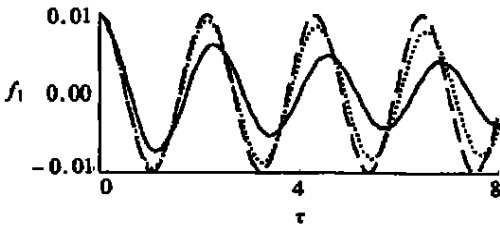
$$\begin{aligned} A_{mi}^{(1)} &= 2\xi b_{mi}, \quad A_{mi}^{(2)} = \xi_{\tau} b_{mi} + (\xi_{\tau}^2 - 1) c_{mi}, \\ B_{mijk}^{(1)} &= - \left( 0.5E_e + 2\xi_{\tau} E_v \right) d_{mijk} - \xi_{\tau} E_v e_{mijk}, \\ B_{mijk}^{(2)} &= - E_v (d_{mijk} + 2d_{mikj}), \quad b_{mi} = \int_0^1 \phi_m \phi_i d\xi \\ c_{mi} &= \int_0^1 \phi_m \phi_i d\xi, \quad d_{mijk} = \int_0^1 \phi_m \phi_i \phi_j \phi_k d\xi, \quad e_{mijk} = \int_0^1 \phi_m \phi_i \phi_j \dot{\phi}_k d\xi. \end{aligned}$$

取方程(18)的前两阶近似得到如下二阶非线性微分方程组

$$\begin{aligned} \dot{f}_1 - \frac{16}{3} \dot{f}_2 + (1 - c^2) \pi^2 f_1 - \frac{8}{3} c f_2 - E_e \pi^4 \left[ \frac{3}{4} f_1^3 + 6 f_1 f_2^2 \right] + \\ c E_v \pi^4 \left[ \frac{224}{15} f_1^2 \dot{f}_2 + \frac{2816}{105} f_2^3 \right] - E_v \pi^4 \left[ \frac{3}{2} f_1^2 \dot{f}_2 + 4 f_1 \dot{f}_2^2 + 8 f_1 f_2 \dot{f}_2 \right] = 0, \tag{19} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{f}_2 + \frac{16}{3} \dot{f}_1 + \frac{8}{3} c f_1 + 4(1 - \xi_{\tau}^2) \pi^2 f_2 - E_e \pi^4 \left[ 16 f_1^2 f_2 + 12 f_2^3 \right] + \\ c E_v \pi^4 \left[ \frac{16}{15} f_1^3 + \frac{3904}{105} f_1 f_2^2 \right] - E_v \pi^4 \left[ 4 f_1^2 \dot{f}_1 + 24 f_1 \dot{f}_1^2 + 8 f_1 f_2 \dot{f}_1 \right] = 0. \tag{20} \end{aligned}$$

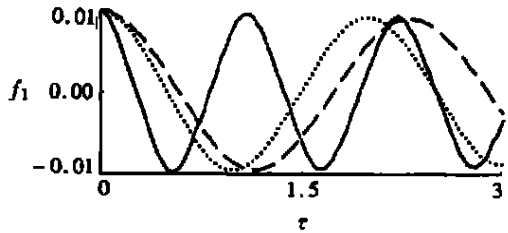
下面用四阶 Runge\_Kutta 对方程(19)、(20)数值积分, 分析材料参数和带稳态速度和扰动速度对带横向振动响应的影响.



---  $E_v = 0$ , - -  $E_v = 10$ , - ·  $E_v = 50$

图2 粘性参数对动态响应的影响

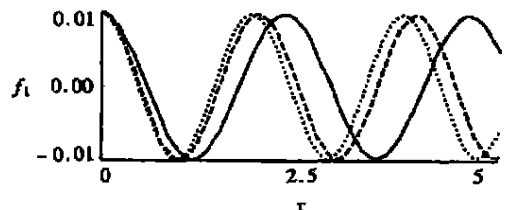
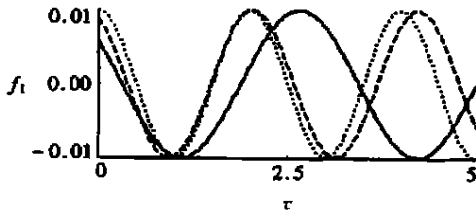
( $E_e = 400, c_0 = 0.5$ )



---  $E_e = 10$ , - -  $E_e = 100$ , - ·  $E_e = 1000$

图3 弹性参数对动态响应的影响

( $E_v = 50, c_0 = 0.5$ )



-  $c = 0.6$ , ---  $c = 0.3$ , - ·  $c = 0$ ,

(a) 线性解析解 ( $C = 0.01, \xi = 0.5, n = 1, \theta = 0$ ); (b) 非线性数值解 ( $E_e = 400, E_v = 10$ )

图4 稳态速度对动态响应的影响

### 3.1 材料参数的影响

图2给出了粘性参数对系统动态响应的影响,其中弹性参数  $E_e = 400$ , 运动速度  $c = 0.5$  为常数。初始条件为:  $f_1(0) = 0.01$ ,  $f_{\lambda}(0) = 0$ ,  $f_2(0) = 0$ ,  $f_{\lambda}(0) = 0$ 。可见,随着粘性  $E_v$  增大,系统振幅减小,耗散能力增强。同时振动频率减小。

图3给出了弹性参数对系统动态响应的影响,其中粘性参数  $E_v = 50$ , 运动速度及初始条件为同上。可见,随着弹性  $E_e$  增大,系统振动频率增加,振动幅值的变化很小。

### 3.2 带运动速度的影响

#### 3.2.1 稳态速度的影响

图4(a)和图4(b)分别给出了当带以不同速度匀速运动时系统线性动态响应和非线性动态响应。基于表达式(13)的线性解析解中问题中的参数  $C = 0.01$ ,  $\xi = 0.5$ ,  $n = 1$ ,  $\theta = 0$ ; 基于方程(19)和(20)的非线性数值解中弹性参数  $E_e = 400$ , 粘性参数  $E_v = 10$ , 初始条件为:  $f_1(0) = 0.01$ ,  $f_{\lambda}(0) = 0$ ,  $f_2(0) = 0$ ,  $f_{\lambda}(0) = 0$ 。可见非线性振动“频率”随带运动速度增加而减小,与线性问题的分析解结果类似。

#### 3.2.2 扰动速度的影响

假设带运动速度为稳态速度与简谐变化速度的叠加,即:

$$c(\tau) = c_0 + c_1 \sin \omega \tau, \quad (21)$$

其中,  $c_0$  为稳态速度,  $c_1$  为扰动速度的振幅,  $\omega$  为扰动速度的频率。因方程(19)和(20)中含有速度平方项  $c^2$  和加速度  $c\tau$ :

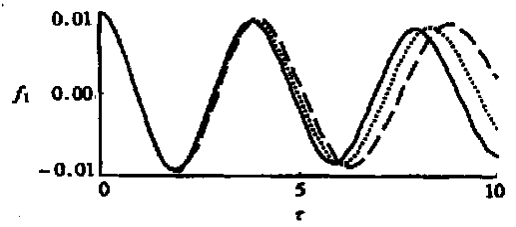
$$c^2 = c_0^2 + 0.5c_1^2 + 2c_0c_1 \sin \omega \tau - 0.5c_1^2 \cos 2\omega \tau$$

因此在扰动速度频率  $\omega$  和  $2\omega$  处系统出现参数共振。在参数不稳定区域内,主参数不稳定区域最大。下面分析主参数共振情况的动态响应,图5中给出了在主参数共振情况下扰动速度对动态响应的影响,其中弹性参数  $E_e = 400$ , 粘性参数  $E_v = 50$ , 稳态速度  $c_0 = 0.9$ , 扰动速度频率为  $\omega = \pi \sqrt{1 - c_0^2}$ , 初始条件为:  $f_1(0) = 0.01$ ,  $f_{\lambda}(0) = 0$ ,  $f_2(0) = 0$ ,  $f_{\lambda}(0) = 0$ 。可见,当带运动速度扰动部分  $c_1$  增大时,系统振动振幅增加,而振动频率几乎不随扰动速度的变化而变化,这与线性解析解结果类似。

## 4 结 论

本文基于 Kelvin 粘弹性微分本构定律,建立了粘弹性轴向运动带非线性动力学模型。给出了该类轴向运动带系统线性问题的解析解;讨论了该类动力系统中材料参数、带运动速度等对非线性动态响应的影响。基于上述分析,得到如下结论:

- 1) 当带匀速运动时,无论系统是线性还是非线性,运动带横向振动“频率”都随着带运动稳态速度增加而减小。
- 2) 随着材料粘性增加,系统耗散能力逐渐增强,动态响应逐渐减小。
- 3) 当带运动速度简谐波动时,系统动态响应随扰动速度增大而增大。扰动频率对带横向振动影响较大。



—  $c_1 = 0.03c_0$ , ---  $c_1 = 0.06c_0$ ,  
- · -  $c_1 = 0.09c_0$ .

图5 扰动速度对动态响应的影响  
( $E_e = 400$ ,  $E_v = 50$ ,  $c_0 = 0.9$ ,  $\omega = 0.125$ )

## [参 考 文 献]

- [1] Huang J S, Fung R F. Dynamic stability of a moving string undergoing three\_dimension vibration[J]. International Journal of Mechanics Science, 1995, **37**(1): 145—159.
- [2] Perkins N C, Mote C D. Three\_dimensional vibration of traveling elastic cables[J]. Journal of Sound and Vibration, 1987, **114**(2): 325—340.
- [3] Fung R F, Huang J S, Chen Y C, et al. Nonlinear dynamic analysis of the viscoelastic string with a harmonically varying transport speed[J]. Computer & Structure, 1996, **61**(1): 125—141.
- [4] Fung R F, Huang J S, Chen Y C. The transient amplitude of the viscoelastic travelling string: an integral constitutive law[J]. Journal Sound and Vibration, 1997, **201**(2): 153—167.
- [5] Zhang L, Zu J W. Nonlinear vibration of parametrically excited moving belts[J]. Journal of Applied Mechanics, 1999, **66**(2): 396—409.
- [6] LI Ying\_hui, GAO Qing, YIN Xue\_guang. Nonlinear vibration analysis of viscoelastic cable with small sag[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2001, **14**(4): 317—323.
- [7] CHEN Li\_qun, ZHANG Neng\_hui, Zu J W. Bifurcation and chaos of an axially moving viscoelastic string[J]. Mechanics Research Communications, 2002, **29**(2/3): 81—90.
- [8] Ozkaya E, Pakdemirli M. Group theoretic approach to axially accelerating beam problem[J]. Acta Mechanica, 2002, **155**(1): 111—123.
- [9] Ozkaya E, Pakdemirli M. Lie group theory and analytical solutions for the axially accelerating string problem[J]. Journal of Sound & Vibration, 2000, **230**(4): 729—742.

## Dynamic Responses of Viscoelastic Axially Moving Belt

LI Ying\_hui<sup>1</sup>, GAO Qing<sup>1</sup>, JIAN Kai\_lin<sup>2</sup>, YIN Xue\_gang<sup>2</sup>

(1. Department of Applied Mechanics and Engineering,

Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, P. R. China;

2. Department of Engineering Mechanics, Chongqing University,

Chongqing 400044, P. R. China)

**Abstract:** Based on the Kelvin viscoelastic differential constitutive law and the motion equation of the axially moving belt, the nonlinear dynamic model of the viscoelastic axial moving belt was established. And then it was reduced to be a linear differential system which the analytical solutions with a constant transport velocity and with a harmonically varying transport velocity were obtained by applying Lie group transformations. According to the nonlinear dynamic model, the effects of material parameters and the steady\_state velocity and the perturbed axial velocity of the belt on the dynamic responses of the belts were investigated by the research of digital simulation. The result shows: 1) The nonlinear vibration frequency of the belt will become small when the velocity of the belt increases. 2) Increasing the value of viscosity or decreasing the value of elasticity leads to a decreasing in vibration frequencies. 3) The most effects of the transverse amplitudes come from the frequency of the perturbed velocity when the belt moves with harmonic velocity.

**Key words:** moving belt; viscoelasticity; Lie group; dynamic response