 应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2003)10_0998_07

重建极性连续统理论的基本定律和原理(Ⅱ)——微态连续统理论和偶应力理论*

戴天民

(辽宁大学 数学系和数学应用中心,沈阳 110036)

(我刊原编委戴天民来稿)

摘要: 重建微态连续统理论和偶应力理论的动量和动量矩均衡定律以及能量守恒定律,并由这些定律自然地推导出相应的局部和非局部均衡方程• 这些结果可由耦合型微极连续统理论过渡和归结而得到• 把推导出的结果和传统的质量和微惯性守恒定律以及熵不等式结合在一起就构成微态连续统理论和偶应力理论的基本均衡定律和方程体系• 还弄清了以前的各种连续统理论的不完整性层次• 最后,给出了几种特殊情形•

关 键 词: 微极连续统; 偶应力理论; 耦合型的; 基本均衡定律; 均衡方程
中图分类号: O33 文献标识码: A

引 言

本文是前文[1]的直接延续• 在[1]中我们扩充了在[2]中提出的耦合型能量守恒定律的结果,把传统的质量守恒定律、微惯性守恒定律、熵不等式和重新建立的动量均衡定律、角动量均衡定律、能量守恒定律结合在一起构成微极连续统理论的较为完整的基本均衡定律体系,并由此体系可以自然地推导出相应的局部和非局部均衡方程•

本文的目的就是在这样较为完整的微极连续统理论的基本均衡定律和方程的基础上,通过自然的过渡和归结来重新建立较为完整的微态连续统理论和偶应力理论的基本均衡定律和方程体系•

1964 年 Eringen 提出简单微流体理论,其中首次提出微惯性守恒定律• 同年 Eringen 和 Suhubi[3, 4] 建立起简单微弹性固体的非线性理论• 1966 年 Eringen[5] 正式把这类理论命名为微态连续统力学• 这种连续统是由可以承受经典运动和变形的物质粒子的集合• 按着他在新近出版的专著[6]中,把微连续统进行了分类,把微态、微伸缩、微极和经典连续统分别称为带有可变形方向子的、只具有伸缩(无微应力)方向子的、具有刚性方向子的和不带方向子的连续统•

* 收稿日期: 2002_04_11; 修订日期: 2003_05_09
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10072024);辽宁省教育委员会基础研究基金资助项目(990111001)
作者简介: 戴天民(1931—),男,满族,辽宁开原人,教授,博士,博士生导师,已发表专著译著 12 部和论文 60 余篇(E_mail: tianmin_dai@yahoo.com.cn)•

在微态连续统理论中存在着与微极连续统理论类似的问题. 第一个问题就是动量均衡定律和方程与经典连续统的相同. 这一明显的理论缺陷一直存在至今. 另一个明显的理论缺陷就是从传统的能量守恒定律不能直接推导出运动方程, 相反, 还必须利用运动方程才能推导出局部能量均衡方程. 有些学者曾采用不同方法力图证明传统的非耦合型的能量守恒定律的完整性. 例如, Soós[7]就是采用对动量方程点乘以速度 v_i 和对角动量方程点乘以表征相对微角速度的回转张量 ν_{ij}, 并应用线性本构方程后得到带有微结构的热弹性物质的非耦合型的能量守恒定律如下:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho\left[e+\frac{1}{2}\rho(v_iv_i+i_{ij}\nu_{ki}\nu_{kj})\right]\mathrm{d}v = \int_A (t_{ij}v_j+t_{ijk}\nu_{jk})n_i\,\mathrm{d}a+\int_V \rho(f_iv_i+l_{ij}\nu_{ij})\,\mathrm{d}v, \tag{1}$$

式中 e, $\nu_{ij}=-\varepsilon_{ijl}\nu_l$, t_{ijk} 和 l_{ij} 分别为内能密度, 回转张量, 应力矩张量和体力矩张量. 又例如, 微态连续统理论的创建者 Eringen 本人可能也觉得这确是个问题, 遂于 1992 年重新研究了该理论并在[8]中从下列全局能量守恒定律

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho\left[e+\frac{1}{2}\rho(v_iv_i+i_{ij}\nu_{ki}\nu_{kj})\right]\mathrm{d}v = \int_A (t_{ij}v_j+t_{ijk}\nu_{jk}+q_i)n_i\,\mathrm{d}a+\int_V \rho(f_iv_i+l_{ij}\nu_{ij}+h)\,\mathrm{d}v \tag{2}$$

出发, 根据上列定律在任意常值速度平移和角速度转动下服从不变性的要求, 经过麻烦的推演, 才给出下列传统的微态连续统理论的动量、角动量和能量均衡方程:

$$t_{ij,i}+\rho(f_i-\dot{v}_i)=0, \tag{3}$$

$$t_{ijk,i}+t_{kj}-s_{kj}+\rho(l_{jk}-\dot{\sigma}_{jk})=0, \tag{4}$$

$$\rho\dot{e}-t_{ij}v_{j,i}-(s_{ij}-t_{ij})\nu_{ji}-t_{ijk}\nu_{jk,i}-q_{i,i}-\rho h=0, \tag{5}$$

式中 $\dot{\sigma}_{jk}=i_{lk}(\dot{\nu}_{il}+\nu_{jm}\nu_{ml})$ 为自旋惯性张量. 为此, 他宣称微态连续统理论的研究已可结束, 只待应用.

实际上, 上述两种方法都未能解决根本问题, 原因是他们所用的全局能量守恒定律是不完整的.

Mindlin 和 Tiersten[9]于 1962 年就给出线性偶应力弹性理论的场方程. Toupin[10]于 1964 年提出偶应力理论. Eringen[11,12]曾指出, 当微转动 φ_i 和 ϕ_i 分别用经典弹性理论的转角 θ_i 和流体力学的涡旋矢量 ω_i 代替时, 则微极弹性理论和微极流体力学就分别归结为偶应力弹性理论和偶应力流体理论. 他还指出这样一来这类理论就变成为经典的弹性理论和流体力学. 但这些观点是从场方程得出来的, 对基本均衡定律和方程并不正确. 由于经典连续统理论和传统的微极连续统理论之间存在着不可逾越的鸿沟, 所以上述的替换关系根本就无从谈起.

实际上, Eringen 的观点还是正确的, 但这只有在我们的[1]中提出的微极连续统理论和[13]中提出的连续统理论之间才能实现这种替换关系.

为连贯起见, 除另作说明外, 本文沿用[1, 2, 13]中的符号和记法. 本文将着重从较为完整的能量守恒定律出发, 论述如何从耦合型微极连续统理论的结果过渡到微态连续统理论的和归结为偶应力理论的相应结果, 并清晰地指出现有有关连续统理论的不完整性层次.

1　微态连续统理论

1.1　耦合型均衡定律和方程

1.1.1　全局能量守恒定律

现把[1,2]中提出的微极连续统理论的耦合型全局能量守恒定律写成下列形式:

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho\left\{e+\frac{1}{2}[(\mathbf{v}+\nu\times\boldsymbol{x})\cdot(\mathbf{v}+\nu\times\boldsymbol{x})+\sigma\cdot\nu]\right\}\mathrm{d}v-\\&\int_A[\boldsymbol{t}_{(n)}\cdot(\mathbf{v}+\nu\times\boldsymbol{x})+\boldsymbol{m}_{(n)}\cdot\nu]\mathrm{d}a-\int_A\boldsymbol{q}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}-\\&\int_V\rho[\boldsymbol{f}\cdot(\mathbf{v}+\nu\times\boldsymbol{x})+\boldsymbol{l}\cdot\nu]\mathrm{d}v-\int_V\rho h\,\mathrm{d}v=0\end{aligned}\tag{6}$$

把微角速度矢量 ν, 面力矩矢量 $\boldsymbol{m}_{(n)}$ 和体力矩矢量 $\boldsymbol{l}$ 分别用回转张量 Ω, 面应力矩张量 $\boldsymbol{M}_{(n)}$ 和体力矩张量 $\boldsymbol{L}$ 代替, 并考虑到下列关系式

$$\nu\times\boldsymbol{x}=\varepsilon_{ijk}\nu_j x_k\boldsymbol{g}_i=\Omega_{ik}x_k\boldsymbol{g}_i=\Omega\cdot\boldsymbol{x}\tag{7}$$

和

$$\Sigma\cdot\Omega=\Omega_{ki}i_{ij}\Omega_{kj}=i_{ij}\varepsilon_{kim}\varepsilon_{kjn}\nu_m\nu_n=(i_{mm}\delta_{ij}-i_{ij})\nu_i\nu_j=j_{ij}\nu_i\nu_j=\sigma\cdot\nu,\tag{8}$$

则式(6)就自然地过渡到微态连续统理论的耦合型全局能量守恒定律

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho\left\{e+\frac{1}{2}[(\mathbf{v}+\Omega\cdot\boldsymbol{x})\cdot(\mathbf{v}+\Omega\cdot\boldsymbol{x})+\Sigma\cdot\Omega]\right\}\mathrm{d}v-\\&\int_A[\boldsymbol{t}_{(n)}\cdot(\mathbf{v}+\Omega\cdot\boldsymbol{x})+\boldsymbol{M}_{(n)}:\Omega]\mathrm{d}a-\int_A\boldsymbol{q}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}-\\&\int_V\rho[\boldsymbol{f}\cdot(\mathbf{v}+\Omega\cdot\boldsymbol{x})+\boldsymbol{L}:\Omega]\mathrm{d}v-\int\rho h\,\mathrm{d}v=0\end{aligned}\tag{9}$$

考虑到

$$\begin{aligned}&\int_A[\boldsymbol{t}_{(n)}\cdot(\mathbf{v}+\Omega\cdot\boldsymbol{x})]\mathrm{d}a=\int_A n_i[t_{ij}(v_j+\Omega_{jk}x_k)]\mathrm{d}a=\\&\int_V[t_{ij}(v_j+\Omega_{jk}x_k)]_{,i}\mathrm{d}v=\\&\int_V[t_{ij,i}(v_j+\Omega_{jk}x_k)+t_{ij}(v_{j,i}+\Omega_{jk,i}x_k+\Omega_{jk}\delta_{ki})]\mathrm{d}v=\\&\int_V\left\{(\nabla\cdot\boldsymbol{t})\cdot(\mathbf{v}+\Omega\cdot\boldsymbol{x})+\boldsymbol{t}:[\nabla\mathbf{v}+(\nabla\Omega)\cdot\boldsymbol{x}+\Omega^{\mathrm{T}}]\right\}\mathrm{d}v,\end{aligned}\tag{10}$$

$$\begin{aligned}&\int_A\boldsymbol{M}_{(n)}:\Omega\,\mathrm{d}a=\int_A n_i M_{ijk}\Omega_{jk}\mathrm{d}a=\int_V(M_{ijk}\Omega_{jk})_{,i}\mathrm{d}a=\\&\int_V(t_{ijk,i}\Omega_{ji}+t_{ijk}\Omega_{jk,i})\mathrm{d}v=\int_V[(\nabla\cdot\boldsymbol{M}):\Omega+\boldsymbol{M}\,\vdots\,\nabla\Omega]\mathrm{d}v,\end{aligned}\tag{11}$$

则式(9)可整理成下列形式:

$$\begin{aligned}&\int_V\Big\{\Big\{\rho[(\mathbf{v}+\Omega\cdot\boldsymbol{x})^{\cdot}-\boldsymbol{f}]-\nabla\cdot\boldsymbol{t}\Big\}\cdot\mathbf{v}+\Big\{[\rho(\dot{\Sigma}-\boldsymbol{L})-\nabla\cdot\boldsymbol{M}-\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}]+\\&[\rho[(\mathbf{v}+\Omega\cdot\boldsymbol{x})^{\cdot}-\boldsymbol{f}]-\nabla\cdot\boldsymbol{t}]\boldsymbol{x}\Big\}:\Omega+\Big\{\rho\dot{e}-\boldsymbol{t}:[\nabla\mathbf{v}+\\&(\nabla\Omega)\cdot\boldsymbol{x}]-\boldsymbol{M}\,\vdots\,\nabla\Omega-\nabla\cdot\boldsymbol{q}-\rho h\Big\}\Big\}\mathrm{d}v=0\end{aligned}\tag{12}$$

1.1.2　均衡方程

根据广义 Piola 定理[14,15,16], 由上式可得下列各均衡方程.

A.　动量均衡方程

局部动量均衡方程

$$\rho[(\mathbf{v}+\Omega\cdot\boldsymbol{x})^{\cdot}-\boldsymbol{f}]-\nabla\cdot\boldsymbol{t}=\mathbf{0}, \tag{13a}$$

非局部动量均衡方程

$$\rho[(\mathbf{v}+\Omega\cdot\boldsymbol{x})^{\cdot}-\boldsymbol{f}]-\nabla\cdot\boldsymbol{t}=\rho\hat{\boldsymbol{f}}; \tag{13b}$$

B. 角动量均衡方程

局部角动量均衡方程

$$\rho[(\dot{\Sigma}-\boldsymbol{L})-\nabla\cdot\boldsymbol{M}-\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}]+\boldsymbol{s}=\mathbf{0}, \tag{14a}$$

式中 $\boldsymbol{s}$ 是一称之为应力平均量的对称张量[8],

非局部角动量均衡方程

$$\rho[(\dot{\Sigma}-\boldsymbol{L})-\nabla\cdot\boldsymbol{M}-\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}]+\boldsymbol{s}=\rho(\hat{\boldsymbol{L}}-\hat{\boldsymbol{f}}\,\boldsymbol{x}); \tag{14b}$$

C. 能量均衡方程

局部能量均衡方程

$$\rho\dot{e}=\boldsymbol{t}:[\nabla\mathbf{v}+(\nabla\Omega)\cdot\boldsymbol{x}]+\boldsymbol{M}\vdots\nabla\Omega+\nabla\cdot\boldsymbol{q}+\rho h, \tag{15a}$$

非局部能量均衡方程

$$\rho\dot{e}=\boldsymbol{t}:[\nabla\mathbf{v}+(\nabla\Omega)\cdot\boldsymbol{x}]+\boldsymbol{M}\vdots\nabla\Omega+\nabla\cdot\boldsymbol{q}+\rho h-\\ \rho[\hat{\boldsymbol{f}}\cdot\mathbf{v}+(\hat{\boldsymbol{L}}-\hat{\boldsymbol{f}}\,\boldsymbol{x}):\Omega]+\rho\hat{h}\cdot \tag{15b}$$

我们导出的这些均衡方程连同传统的质量守恒方程、微惯性守恒方程和熵不等式[17]一起就构成微态连续统理论的较为完整的基本均衡方程体系•

1.2 半耦合型均衡定律和方程

1.2.1 全局能量守恒定律

式(9)可以改写成下列形式:

$$\int_V\rho\left\{e+[(\mathbf{v}+\Omega\cdot\boldsymbol{x})^{\cdot}]\cdot(\mathbf{v}+\Omega\cdot\boldsymbol{x})+\dot{\Sigma}\cdot\Omega\right\}\mathrm{d}v-\\ \int_A[\boldsymbol{t}_{(n)}\cdot(\mathbf{v}+\Omega\cdot\boldsymbol{x})+\boldsymbol{M}_{(n)}:\Omega]\mathrm{d}a-\int_A\boldsymbol{q}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}-\\ \int_V\rho[\boldsymbol{f}\cdot(\mathbf{v}+\Omega\cdot\boldsymbol{x})+\boldsymbol{L}:\Omega]\mathrm{d}v-\int\rho h\,\mathrm{d}v=0\cdot \tag{9*}$$

在上式中取 $(\Omega\cdot\boldsymbol{x})^{\cdot}=\mathbf{0}$, 就是我们在[15, 16]中给出的半耦合型全局能量守恒定律• 由此定律可得下列各均衡方程•

1.2.2 均衡方程

A. 动量均衡方程

局部动量均衡方程

$$\rho(\dot{\mathbf{v}}-\boldsymbol{f})-\nabla\cdot\boldsymbol{t}=\mathbf{0}, \tag{16a}$$

非局部动量均衡方程

$$\rho(\dot{\mathbf{v}}-\boldsymbol{f})-\nabla\cdot\boldsymbol{t}=\rho\hat{\boldsymbol{f}}; \tag{16b}$$

B. 角动量均衡方程

局部角动量均衡方程

$$\rho[(\dot{\Sigma}-\boldsymbol{L})-\nabla\cdot\boldsymbol{M}-\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}]+\boldsymbol{s}=\mathbf{0}, \tag{17a}$$

非局部角动量均衡方程

$$\rho[(\dot{\boldsymbol{\Sigma}}-\boldsymbol{L})-\nabla\cdot\boldsymbol{M}-\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}]+\boldsymbol{s}=\rho(\hat{\boldsymbol{L}}-\hat{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{x});\tag{17b}$$

C. 能量均衡方程

局部能量均衡方程

$$\rho\dot{e}=\boldsymbol{t}:[\nabla\mathbf{v}+(\nabla\boldsymbol{\Omega})\cdot\boldsymbol{x}]+\boldsymbol{M}\vdots\nabla\boldsymbol{\Omega}+\nabla\cdot\boldsymbol{q}+\rho h,\tag{18a}$$

非局部能量均衡方程

$$\rho\dot{e}=\boldsymbol{t}:[\nabla\mathbf{v}+(\nabla\boldsymbol{\Omega})\cdot\boldsymbol{x}]+\boldsymbol{M}\vdots\nabla\boldsymbol{\Omega}+\nabla\cdot\boldsymbol{q}+\rho h-\rho[\hat{\boldsymbol{f}}\cdot\mathbf{v}-(\hat{\boldsymbol{L}}-\hat{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{x}):\boldsymbol{\Omega}]+\rho\hat{h}。\tag{18b}$$

这里的结果是从全局能量守恒定律自然地推导出来的, 没用任何附加的要求。

1.3 非耦合型的均衡定律和方程

在式(9)* 取 $\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 即得传统的非耦合型全局能量守恒定律[8]:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V\rho\left[e+\frac{1}{2}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}+\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{\Omega})\right]\mathrm{d}v-\int_A(\boldsymbol{t}_{(n)}\cdot\mathbf{v}+\boldsymbol{M}_{(n)}:\boldsymbol{\Omega})\mathrm{d}a-\int_A\boldsymbol{q}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}-\int_V\rho(\boldsymbol{f}\cdot\mathbf{v}+\boldsymbol{L}:\boldsymbol{\Omega})\mathrm{d}v-\int\rho h\,\mathrm{d}v=0。\tag{2}$$

由上式只能推导出下列非耦合型的"运动方程"和"能量均衡方程":

$$\rho(\dot{\mathbf{v}}-\boldsymbol{f})-\nabla\cdot\boldsymbol{t}=\mathbf{0},\tag{19}$$

$$\rho(\dot{\boldsymbol{\Sigma}}-\boldsymbol{L})-\nabla\cdot\boldsymbol{m}=\mathbf{0};\tag{20}$$

$$\rho\dot{e}=\boldsymbol{t}:\nabla\mathbf{v}+\boldsymbol{M}\vdots\nabla\boldsymbol{\Omega}。\tag{21}$$

面对这一现实, Eringen[8] 于 1992 年在要求式(2)在任意常值速度平移和角速度转动下服从不变性的情况下, 才给出式(3)、式(4)和式(5)。 这里式(3)和式(4)与我们的式(16a)和式(17a)相同, 但式(5)和我们的式(18a)之间却存在着本质的差异。

2 偶应力理论

2.1 耦合型的均衡定律和方程

把微角速度矢量 $\boldsymbol{\nu}$ 用宏角速度 $\boldsymbol{\theta}$ 代替, 并令 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{\theta}$ 为宏自旋矢量, 则微极连续统理论的式(6)即归结为偶应力理论的全局能量守恒定律:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V\rho\left\{e+\frac{1}{2}[(\mathbf{v}+\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{x})\cdot(\mathbf{v}+\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{x})+\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\theta}]\right\}\mathrm{d}v-\int_A[\boldsymbol{t}_{(n)}\cdot(\mathbf{v}+\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{x})+\boldsymbol{m}_{(n)}\cdot\boldsymbol{\theta}]\mathrm{d}a-\int_V\rho[\boldsymbol{f}\cdot(\mathbf{v}+\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{x})+\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{\theta}]\mathrm{d}v=0。\tag{22}$$

这正是我们在[13]中提出的连续统理论的全局能量守恒定律。

由此定律可以自然地推导出动量、角动量和能量均衡方程。 可见, Eringen 在[11, 12]中表达的偶应力理论即成为"经典"连续统理论的观点是正确的, 但这个"经典"连续统理论必须是我们在[2]中提出的结果。

2.2 特殊情形

2.2.1 半耦合型的情形

式(22)可改写成下列形式:

$$\int_V\rho\left\{e+(\mathbf{v}+\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{x})\cdot[\dot{\mathbf{v}}+(\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{x})^{\cdot}]+\dot{\boldsymbol{S}}\cdot\boldsymbol{\theta}\right\}\mathrm{d}v-$$

$$\int_A [\boldsymbol{t}_{(n)} \cdot (\mathbf{v} + \theta \times \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{m}_{(n)} \cdot \theta] \mathrm{d}a -$$

$$\int_V \rho[\boldsymbol{f} \cdot (\mathbf{v} + \theta \times \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{l} \cdot \theta] \mathrm{d}v = 0. \tag{22}^*$$

现取 $(\theta \times \boldsymbol{x})^{\cdot} = \mathbf{0}$ 和 $\dot{S} \cdot \theta = \mathbf{0}$, 并令 $\theta = \nabla \times \mathbf{v}$, 则上式就归结为我们在[18]中给出的结果•

2.2.2　非耦合型的情形

在式(22)中令 $\theta \times \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, 即得经典连续统力学的全局能量守恒定律

$$\int_V \rho\left(e + \frac{1}{2}\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}\right) \mathrm{d}v - \int_A \boldsymbol{t}_{(n)} \cdot \mathbf{v}\, \mathrm{d}a - \int_V \rho \boldsymbol{f} \cdot \mathbf{v}\, \mathrm{d}v = 0. \tag{23}$$

在上式中并不出现转动因素, 因此就无从谈起由偶应力理论变成为经典连续统理论•

3　结 束 语

本文已经实现了从微极连续统理论的基本均衡定律和方程自然地过渡到微态连续统理论的和归结为偶应力理论的结果这一事实• 同时, 还清晰地分析了现有其它有关连续统理论结果的不完整性的层次•

[参　考　文　献]

[1] 戴天民. 重建极性连续统理论的基本定律和原理(Ⅰ)——微极连续统[J]. 应用数学和力学, 2003, **24**(10): 991—997.

[2] DAI Tian_min. On basic laws and principles for continuum field theories[A]. In: CHIEN Wei_zang Ed. Proceedings of the 4th International Conference on Nonlinear Mechanics[C]. Shanghai: Shanghai University Press, 2002, 29—41.

[3] Eringen A C, Suhubi E R. Nonlinear theory of sinple microelastic solids_Ⅰ[J]. Int J Engng Sci, 1964, **2**: 189—203•

[4] Eringen A C, Sububi E R. Nonlinear theory of simple microelastic solids_Ⅱ[J]. Int J Engng Sci, 1964, **2**: 389—404.

[5] Eringen A C. Mechanics of micromorphic materials[A]. In: Gortler H Ed. Proc 11th Int Congr Appl Mech[C]. Berlin: Springer_Verlag, 1966, 131—138.

[6] Eringen A C. Microcontinuum Field Theories[M]. New York: Springer_Verlag, 1999.

[7] Soós E. Uniqueness theorems for homogeneous, isotropic, simple elastic and thermoelastic materials having a microstructure[J]. Int J Engng Sci, 1969, **7**: 257—268.

[8] Eringen A C. Balance laws of micromorphic continua revisited[J]. Int J Engng Sci, 1992, **30**(6): 805—810.

[9] Mindlin R D, Tiersten H E. Effects of couple stresses in linear elasticity[J]. Arch Rat Mech Anal, 1962, **11**: 415—448.

[10] Toupin R A. Theories of elasticity with couple stresses[J]. Arch Rat Mech Anal, 1964, **17**: 85—112.

[11] Eringen A C. Linear theory of micropolar elasticity[J]. Journal of Mathematics and Mechanics, 1996, **15**(6): 909—923.

[12] Eringen A C. Theory of micropolar fluids[J]. Journal of Mathematics and Mechanics, 1966, **15**(1): 1—18.

[13] DAI Tian_min. New laws and principles for continuum mechanics_Part Ⅰ: Balance laws and equations[A]. In: CHIEN Wei_zang Ed. Proceedings of the 4th International Conference on Nonlinear

Mechanics[C]. Shanghai: Shanghai University Press, 2002, 206—209.
[14] Stojanovic R. On the principle of virtual work in the theory of oriented elastic media[J]. Z Angew Math Mech, 1973, **53**: T79—T82.
[15] 戴天民. 带有微结构的连续统中新的能量守恒定律和 C-D 不等式[J]. 应用数学和力学, 2001, **22**(2): 119—126.
[16] 戴天民. 广义连续统场论中新的功能及功率能率原理[J]. 应用数学和力学, 2001, **22**(11): 1111—1118.
[17] A C 爱林根, C B 卡法达. 微极场论[M]. 戴天民 译. 南京: 江苏科学技术出版社, 1982, 17—23.
[18] 戴天民. 不带微结构的连续统中新的能量守恒定律和 C-D 不等式[J]. 应用数学和力学, 2001, **22**(2): 111—118.

Renewal of Basic Laws and Principles for Polar Continuum Theories (Ⅱ)—Micromorphic Continuum Theory and Couple Stress Theory

DAI Tian-min
(Department of Mathematics & Center for the Application of Mathematics, Liaoning University, Shenyang 110036, P. R. China)

Abstract: The purpose is to reestablish the balance laws of momentum, angular momentum and energy and to derive the corresponding local and nonlocal balance equations for micromorphic continuum mechanics and couple stress theory. The desired results for micromorphic continuum mechanics and couple stress theory are naturally obtained via direct transitions and reductions from the coupled conservation law of energy for microplar continuum theory, respectively. The basic balance laws and equations for micromorphic continuum mechanics and couple stress theory are constituted by combining these results derived here and the traditional conservation laws and equations of mass and microinertia and the entropy inequality. The incomplete degrees of the former related continuum theories are clarified. Finally, some special cases are conveniently derived.

Key words: micromorphic continuum; couple stress theory; coupled; basic balance law; balance equation