

文章编号: 1000-0887(2003) 10-1057-12

参数激励圆柱形容器中的非线性 Faraday 波^{*}

菅永军^{1,2}, 鄂学全¹, 柏威¹

- (1. 中国科学院力学研究所 工程科学部, 北京 100080;
2. 国家海洋局 第一海洋研究所, 山东青岛 266061)

(我刊原编委周显初推荐)

摘要: 在柱坐标系下, 通过奇异摄动理论的多尺度展开法求解势流方程, 研究了垂直强迫激励圆柱形容器中的单一模式水表面驻波模式。假设流体是无粘、不可压且运动是无旋的, 在忽略了表面张力的影响下, 用两变量时间展开法得到一个具有立方项以及底部驱动项影响的非线性振幅方程。对上述方程进行了数值计算, 计算的结果显示了在不同驱动振幅和驱动频率下, 会激发不同自由水表面驻波模式, 从等高线的图像来看, 和以往的实验结果相当吻合。

关键词: 垂直强迫振动; 非线性; Faraday 波; 奇异摄动展开; 振幅方程

中图分类号: O353.2 **文献标识码:** A

引 言

Faraday^[1] 在 1831 年用不同的液体进行了一系列实验, 将上述液体放到垂直振动的水平底板上, 观察到底板上液体出现短而粗的梳齿状的高、低分布的表面驻波, 并指出这些表面波的频率是容器垂直驱动频率的一半, 这就是著名的 Faraday 实验。后人将这种通过垂直激励而形成的具有频率为底部驱动频率一半的表面水波为 Faraday 波。随后 Matthiessen 通过实验发现液体的振动频率与容器的驱动频率是同步的。Rayleigh 对此问题作了更进一步的研究, 他做了大量的实验, 证实了表面驻波的频率是底部垂直激励频率的一半的结论。

1954 年, Benjamin 和 Ursell^[2] 从理想流体的 Euler 方程出发, 将边界条件线性化, 考虑了表面张力的影响, 在普遍的柱形容器中得到了描述自由表面运动的振幅方程, 即 Mathieu 方程, 并用稳定性理论证实了 Faraday, Rayleigh 和 Matthiessen 在实验中所得出的结论在一定的条件下都是可以出现的。在线性理论方面, Benjamin 和 Ursell 给出了 Faraday 波问题较完美的解答。从这以后, 对 Faraday 波问题的研究进入到非线性领域。因为 Faraday 波的不稳定性问题是一个经典的流体力学问题, 通过对它的研究人们可以寻求从有序的层流运动转换到完全无序的混沌运动的基本机理。流动在进入混沌状态之前, 表面波的模态竞争、波幅的变化规律、波结构及其演变过程如何、与激励参数关系如何、在什么样的阈值下进入混沌状态等一系列问题是人们十分关注的问题, 是流体力学的基础性课题。

* 收稿日期: 2002_03_30; 修订日期: 2003_05_16

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19772063, 19772068)

作者简介: 菅永军(1974—), 男, 内蒙古巴彦淖尔盟人, 博士(E-mail: jianyongjun@yahoo.com.cn)。

目前在理论方面研究无粘、不可压流体的无旋运动的 Faraday 波动力学主要有 3 种方法, 它们应该是等价的。第一种方法是经典的摄动法, 将有关的参数以小参数的形式展开, 获得流体自由表面的振幅方程; 第二种方法是由 Miles^[3] 提出的基于变分原理的平均拉格朗日方法, 将经典水波运动方程的 Lagrange 函数通过压力来表示, 而不是经典力学中的动能与势能的差。第三种方法是由 Meron 和 Procaccia^[4] 提出的一种新的方法, 是将正则理论和中心流形理论相结合。Larza 和 Putteman^[5] 用多重尺度法从水波的基本方程出发, 在狭长的矩形容器中导出了一个带有立方项的非线性 Schrödinger 方程, 得到了非传播孤立波解。但他们没有考虑水槽强迫振动的影响, 虽然用了多重尺度法, 但只是凭经验写出速度势。周显初^[6] 用多重尺度法对非传播孤立波做了更为严格的推导, 并且仔细考虑了水槽强迫振动的影响和液体的表面张力, 得到一个类似于 Larza 和 Putteman 的非线性 Schrödinger 方程。此方程包括一个表示系统振动激励的共轭项, 意味着系统通过外驱动不断有能量加入, 对 Larza 和 Putteman 的方程进行了修正。1984 年, Miles^[7,8] 用变分法在对狭长矩形槽中的孤立波问题做了更完善的理论分析, 得到一个带共轭项的非线性 Schrödinger 方程, 后来被称为 Miles 方程。为了与振动激励项相平衡而获得稳定解, Miles 还引入了一个耗散项, 从理论上较好地定性解释了非传播孤立波的一些现象。

在圆柱形容器中的驻波形成问题和在矩形容器中是有很大的不同的, 因为径向波自中心向外扩展, 故它在传播时不再能维持它的形状和振幅, 这和槽长方向较长的矩形容器中所形成的孤立波有明显的区别。正是由于这些原因, 使得圆柱形容器中的表面波图谱有更丰富的表现形式。鄂学全和高宇欣^[9,10,11] 对垂直微幅振荡流体表面波的图谱进行了实验显示, 他们改进了 Faraday 实验装置, 获得了非常精美的表面波幅图谱。

为了在非线性的领域中考察规则的、不规则的或者是混沌的表面波运动, Ciliberto & Gollub^[12]、Nayfeh^[13]、Feng & Sethna^[14]、Nagata^[15]、Edwards & Fauve^[16] 等从实验和理论方面讨论了 Faraday 波的模式竞争和混沌行为。Umecki & Kambe^[17] 用 Lagrange 方法将 Miles 方程修正到四阶, 并且解释了一些模式竞争现象。

本文用两变量的摄动展开法, 在柱坐标系下导出一个类似于非线性 Schrödinger 方程并含有驱动项影响的非线性自由面振幅方程, 并对此方程在一定的频率范围内进行了数值计算, 获得了水表面驻波的流谱图案, 与实验结果^[9,10,11] 符合较好。

1 数学模型

考虑如图 1 所示的圆柱形容器中, 盛有高度为 h 的水, 当容器受到如图 1 所示的垂直强迫周期性驱动时, 液体的自由表面就会出现驻波。Faraday 实验是盛着流体的容器整体上下垂直振动, 这里的模型是容器底部振动但侧壁不动, 其周围缝隙用乳胶膜粘贴密封, 不漏水。容器中的流体表面波是由流体底部激励产生的。由于这里考虑的是理想流体, 故壁面和流体之间不存在剪切力, 这种情况下, 数学模型的建立和以往 Faraday 问题的模型是一致的。

1.1 控制方程

在柱坐标系 (r^*, θ, z^*) 下, 以运动底部为参照系, 将 $z^* = 0$ 的平面作为静自由面, 假设

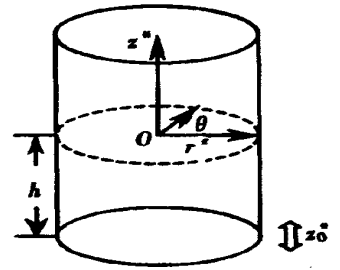


图 1 垂直振动充液圆柱形容器的物理模型

流体是无粘、不可压且运动是无旋的, 则存在速度势函数 $\phi^*(r^*, \theta, z^*, t^*)$, 在忽略液体表面张力的情况下, 流体运动的速度势满足如下的控制方程:

$$\frac{\partial^2 \phi^*}{\partial (r^*)^2} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial \phi^*}{\partial r^*} + \frac{1}{(r^*)^2} \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial (z^*)^2} = 0$$

$$-h \leq z^* \leq \eta^*(r^*, \theta, t^*), \tag{1}$$

和边界条件:

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial t^*} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi^*}{\partial r^*} \right)^2 + \frac{1}{(r^*)^2} \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial z^*} \right)^2 \right] + (g - \ddot{z}_0^*) \eta^* = 0$$

$$z^* = \eta^*(r^*, \theta, t^*), \tag{2}$$

$$\frac{\partial \eta^*}{\partial t^*} + \frac{1}{(r^*)^2} \frac{\partial \phi^*}{\partial \theta} \frac{\partial \eta^*}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi^*}{\partial r^*} \frac{\partial \eta^*}{\partial r^*} - \frac{\partial \phi^*}{\partial z^*} = 0$$

$$z^* = \eta^*(r^*, \theta, t^*), \tag{3}$$

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial r^*} = 0 \quad r^* = R^*, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial z^*} = 0 \quad z^* = -h, \tag{5}$$

这里 $\eta^*(r^*, \theta, t^*)$ 是流体的自由面位移, g 是重力加速度, $z_0^* = A^* \cos(2\omega_0^* t^*)$ 是垂直方向的外驱动, A^* 和 $2\omega_0^*$ 分别是底部驱动的振幅和角频率, \ddot{z}_0^* 是 z_0^* 的关于时间 t^* 的二阶导数, h 是水深, R^* 是圆柱容器的内半径. 流体的相对运动可以看作容器的底部是静止的, 而重力加速度为 $g - \ddot{z}_0^*$.

1.2 方程的无量纲化和泰勒展开

将(2)、(3)两式在 $z_0^* = 0$ 点进行泰勒展开, 忽略4阶小量, 且以水深 h 为长度尺度, 将原方程和相应的边界条件进行如下无量纲化:

$$\begin{cases} z = z^*/h, r = r^*/h, R = R^*/h, \eta = \eta^*/h, t = t^* \sqrt{g/h}, \\ \phi = \phi^*/(h \sqrt{gh}), \omega_0 = \omega_0^* \sqrt{h/g}, A = A^*/h. \end{cases} \tag{6}$$

则原方程转化为如下的控制方程:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad 0 < r < R, -1 < z < 0, \tag{7}$$

和边界条件:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] + [1 + f \cos(2\omega_0 t)] \eta + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial z} \eta +$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) \eta + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \phi}{\partial t \partial z^2} \eta^2 = 0 \quad z = 0, \tag{8}$$

(其中 $f = 4A\omega_0^2$, 假设 f 是二阶小量, 即 $f = \varepsilon^2 f_0$, ε 是一个与驱动振幅有关的小参数)

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial \eta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \eta + \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} \eta \frac{\partial \eta}{\partial r} +$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial z} \eta \frac{\partial \eta}{\partial \theta} - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \phi}{\partial z^3} \eta^2 = 0 \quad z = 0, \tag{9}$$

$$\partial \phi / \partial r = 0 \quad r = R, \tag{10}$$

$$\partial \phi / \partial z = 0 \quad z = -1. \tag{11}$$

1.3 两时间尺度摄动展开

引入慢变时间尺度 τ , 令 $\tau = \varepsilon^2 t$, 则:

$$\partial/\partial t = \partial/\partial t + \varepsilon^2 \partial/\partial \tau + \dots \quad (12)$$

将速度势 $\phi(r, \theta, z, t)$ 和自由表面 $\eta(r, \theta, t)$ 以小参数 ε 展开:

$$\begin{cases} \phi(r, \theta, z, t, \tau) = \varepsilon \phi_1 + \varepsilon^2 \phi_2 + \varepsilon^3 \phi_3 + \dots, \\ \eta(r, \theta, t, \tau) = \varepsilon \eta_1 + \varepsilon^2 \eta_2 + \varepsilon^3 \eta_3 + \dots \end{cases} \quad (13)$$

将(12)~(13)代入无量纲方程(7)~(11)中, 并比较方程两边的 ε 的次数, 可得 ε 的一次近似方程:

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} = 0 \quad 0 < r < R, -1 < z < 0, \quad (14)$$

及边界条件:

$$\partial \phi_1 / \partial t + \eta_1 = 0 \quad z = 0, \quad (15)$$

$$\partial \eta_1 / \partial t - \partial \phi_1 / \partial z = 0 \quad z = 0, \quad (16)$$

$$\partial \phi_1 / \partial r = 0 \quad r = R, \quad (17)$$

$$\partial \phi_1 / \partial z = 0 \quad z = -1. \quad (18)$$

比较方程(7)~(11)两边的 ε^2 的次数, 可得 ε 的二次近似方程:

$$\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_2}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z^2} = 0 \quad 0 < r < R, -1 < z < 0, \quad (19)$$

和对应的边界条件:

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \eta_2 = - \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t \partial z} \eta_1 - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right)^2 \right] = H_1(\eta_1, \phi_1) \quad z = 0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial t} - \frac{\partial \phi_2}{\partial z} = - \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \frac{\partial \eta_1}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \frac{\partial \eta_1}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} \eta_1 = H_2(\eta_1, \phi_1) \quad z = 0, \quad (21)$$

$$\partial \phi_2 / \partial r = 0 \quad r = R, \quad (22)$$

$$\partial \phi_2 / \partial z = 0 \quad z = -1. \quad (23)$$

比较方程(7)~(11)两边的 ε^3 的次数, 可得 ε 的三次近似方程:

$$\frac{\partial^2 \phi_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_3}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial z^2} = 0 \quad 0 < r < R, -1 < z < 0, \quad (24)$$

和相应的边界条件:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_3}{\partial t} + \eta_3 = & - \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t \partial z} \eta_1 - \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t \partial z} \eta_2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial z^2 \partial t} \eta_1^2 - \frac{\partial \phi_1}{\partial \tau} - \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \frac{\partial \phi_2}{\partial r} - \\ & \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial r \partial z} \eta_1 - \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \frac{\partial \phi_2}{\partial z} - \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \theta \partial z} \eta_1 \right] - \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} \eta_1 - \\ & f_0 \eta_1 \cos(2\omega_0 t) = H_3(\eta_1, \phi_1, \eta_2, \phi_2) \quad z = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_3}{\partial z} - \frac{\partial \eta_3}{\partial t} = & - \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z^2} \eta_1 - \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} \eta_2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial z^3} \eta_1^2 + \frac{\partial \eta_1}{\partial \tau} + \frac{\partial \eta_2}{\partial r} \frac{\partial \phi_1}{\partial r} + \frac{\partial \eta_1}{\partial r} \frac{\partial \phi_2}{\partial r} + \\ & \frac{\partial \eta_1}{\partial r} \eta_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial \eta_1}{\partial \theta} \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} + \frac{\partial \eta_2}{\partial \theta} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} + \frac{\partial \eta_1}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \theta \partial z} \eta_1 \right] = \end{aligned}$$

$$H_4(\eta_1, \phi_1, \eta_2, \phi_2) \quad z = 0, \quad (26)$$

$$\frac{\partial \phi_3}{\partial r} = 0 \quad r = R, \quad (27)$$

$$\frac{\partial \phi_3}{\partial z} = 0 \quad z = -1. \quad (28)$$

2 方程的求解以及振幅方程的推导

2.1 一阶方程的求解

由(15)、(16) 消去 η_1 得:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial z} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} = 0 \quad z = 0. \quad (29)$$

令 $\phi_1 = (\Phi_1(r, z, \tau)e^{i\Omega t} + \Phi_1(r, z, \tau)e^{-i\Omega t}) \cos m\theta$, 其中 Φ_1 为 ϕ_1 的复共轭, i 是虚数单位. 将 ϕ_1 代入方程(14) ~ (18), 并利用(29), 则 Φ_1 满足下列方程:

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} \Phi_1 + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} = 0 \quad 0 < r < R, \quad -1 < z < 0, \quad (30)$$

和边界条件:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} - \Omega^2 \Phi_1 = 0 \quad z = 0, \quad (31)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = 0 \quad r = R, \quad (32)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = 0 \quad z = -1. \quad (33)$$

令: $\Phi_1 = p(\tau)R(r)Z(z)$, 将 Φ_1 代入(30) ~ (33), 用分离变量法, 得:

$$\phi_1 = J_m(\lambda r) \cosh[\lambda(z+1)] [p(\tau)e^{i\Omega t} + p(\tau)e^{-i\Omega t}] \cos m\theta, \quad (34)$$

$$\eta_1 = -i\Omega J_m(\lambda r) \cosh \lambda [p(\tau)e^{i\Omega t} - p(\tau)e^{-i\Omega t}] \cos m\theta, \quad (35)$$

其中 $\lambda = \lambda_{mn}$ 为 m 阶的第一类 Bessel 函数 $J_m(r)$ 满足方程 $\left. \frac{dJ_m(\lambda_{mn}r)}{dr} \right|_{r=R} = 0$ 时的第 n 个零点,

$p(\tau)$ 表示慢变复振幅. 将(34) 代入(31) 得色散关系:

$$\Omega^2 = \lambda_{mn} \tanh \lambda_{mn} = \Omega_{mn}^2. \quad (36)$$

上式中 Ω_{mn} 称为水表面波的自然频率.

2.2 二阶方程的求解

由(20)、(21) 两式消去 η_2 , 可得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} + \frac{\partial \phi_2}{\partial z} &= \frac{\partial H_2(\eta_1, \phi_1)}{\partial t} - H_1(\eta_1, \phi_1) = -\frac{\partial^3 \phi_1}{\partial t^2 \partial z} \eta_1 - \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t \partial z} \frac{\partial \eta_1}{\partial t} - \\ &\left[\frac{\partial \phi_1}{\partial r} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial r \partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \theta \partial t} + \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z \partial t} \right] + \\ &\frac{\partial \phi_1}{\partial r} \frac{\partial \eta_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \frac{\partial \eta_1}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} \eta_1 \quad z = 0. \end{aligned} \quad (37)$$

将(34)、(35) 代入(37) 中有:

$$\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} + \frac{\partial \phi_2}{\partial z} = [W_1(r) + W_2(r) \cos 2m\theta] [p^2(\tau)e^{2i\Omega t} - p^2(\tau)e^{-2i\Omega t}]$$

$$z = 0, \quad (38)$$

其中:

$$\begin{cases} W_2(r) = \frac{1}{2}i\Omega\mathcal{N}_m^2(\lambda)[\lambda - \Omega^2\sinh(2\lambda)] + \\ \quad i\Omega\mathcal{N}[1 + \cosh(2\lambda)]J_{m+1}(\lambda)\left[\frac{m}{r}J_m(\lambda) - \frac{1}{2}\mathcal{N}_{m+1}(\lambda)\right], \\ W_1(r) = W_2(r) - \frac{i\Omega m^2}{r^2}J_m^2(\lambda)[1 + \cosh(2\lambda)]. \end{cases} \quad (39)$$

$$\text{令 } \phi_2 = B_{m, G_l}(r, z) \cos 2m\theta [p^2(\tau)e^{2i\Omega t} - p^2(\tau)e^{-2i\Omega t}], \quad (40)$$

将(40)代入(19)~(23)和(38)中,可得 $B_{m, G_l}(r, z)$ 满足方程:

$$\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B}{\partial r} - \frac{4m^2}{r^2}B + \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} = 0 \quad 0 < r < R, -1 < z < 0, \quad (41)$$

和边界条件:

$$\frac{\partial B}{\partial z} - 4\Omega^2 B = G_l(r) \quad z = 0, \quad (42)$$

$$\frac{\partial B}{\partial r} = 0 \quad r = R, \quad (43)$$

$$\frac{\partial B}{\partial z} = 0 \quad z = -1. \quad (44)$$

由(41)式,令 $B_{m, G_l}(r, z)$ 满足如下的 Bessel 函数展开:

$$B_{m, G_l}(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \cosh[\lambda_{(2m)k}(z+1)] J_{2m}(\lambda_{(2m)k}r), \quad (45)$$

将(45)代入(42)~(44)式有:

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k \cosh[\lambda_{(2m)k}] [\lambda_{(2m)k} \tanh(\lambda_{(2m)k}) - 4\Omega^2] J_{2m}(\lambda_{(2m)k}R) = G_l(r), \quad (46)$$

令

$$\begin{cases} \Omega_{(2m)k}^2 = \lambda_{(2m)k} \operatorname{tanh}(\lambda_{(2m)k}), \quad \Delta_{(2m)k} = \Omega_{(2m)k}^2 - 4\Omega^2, \\ N_{(2m)k} = \int_0^R r J_{2m}^2(\lambda_{(2m)k}r) dr = \frac{(R^2 \lambda_{(2m)k}^2 - 4m^2) J_{2m}^2(\lambda_{(2m)k}R)}{2\lambda_{(2m)k}^2}, \end{cases} \quad (47)$$

则系数 d_k 可以表示为:

$$d_k = \frac{\int_0^R G_l(r) J_{2m}(\lambda_{(2m)k}r) r dr}{\Delta_{(2m)k} \cosh(\lambda_{(2m)k}) N_{(2m)k}} = \frac{2\lambda_{(2m)k}^2 \int_0^R G_l(r) J_{2m}(\lambda_{(2m)k}r) r dr}{\Delta_{(2m)k} \cosh(\lambda_{(2m)k}) (R^2 \lambda_{(2m)k}^2 - 4m^2) J_{2m}^2(\lambda_{(2m)k}R)}. \quad (48)$$

由(40)易得二阶解 $\phi_2(r, \theta, z, t, \tau)$ 的表达式为:

$$\phi_2 = [B_{0, W_1}(r, z) + B_{m, W_2}(r, z) \cos 2m\theta] [p^2(\tau)e^{2i\Omega t} - p^2(\tau)e^{-2i\Omega t}], \quad (49)$$

其中:

$$\left\{ \begin{aligned} B_{0, w_1}(r, z) &= \sum_{k=1}^{\infty} d_{k, 0} \cosh[\lambda_{(0)k}(z + 1)] J_0(\lambda_{(0)k} r), \\ d_{k, 0} &= \frac{2 \lambda_{(0)k}^2 \int_0^R W_1(r) J_0(\lambda_{(0)k} r) r dr}{\Delta_{(0)k} \cosh(\lambda_{(0)k}) R^2 \lambda_{(0)k}^2 J_0^2(\lambda_{(0)k} R)}, \\ B_{m, w_2}(r, z) &= \sum_{k=1}^{\infty} d_{k, m} \cosh[\lambda_{(2m)k}(z + 1)] J_{(2m)}(\lambda_{(2m)k} r), \\ d_{k, m} &= \frac{2 \lambda_{(2m)k}^2 \int_0^R W_2(r) J_{2m}(\lambda_{(2m)k} r) r dr}{\Delta_{(2m)k} \cosh(\lambda_{(2m)k}) (R^2 \lambda_{(2m)k}^2 - 4m^2) J_{2m}^2(\lambda_{(2m)k} R)}. \end{aligned} \right. \quad (50)$$

由(20)可知 η_2 的表达式为:

$$\begin{aligned} \eta_2 = & [p^2(\tau) e^{2i\Omega} + p^2(\tau) e^{-2i\Omega}] [K_1(r) + K_3(r) + K_2(r) - \\ & 2i \Omega B_{0, w_1}(r, 0)] + (-K_1(r) + K_2(r) - 2i \Omega B_{m, w_2}(r, 0)) \cos 2m\theta] + \\ & 2 |p(\tau)|^2 [(-K_1(r) + K_3(r) + K_2(r)) + (-K_1(r) + K_2(r) \cos 2m\theta)], \end{aligned} \quad (51)$$

其中:

$$\left\{ \begin{aligned} K_1(r) &= -\frac{1}{4} \Omega^2 \lambda_m^2(\lambda) \sinh(2\lambda), \\ K_2(r) &= \frac{m\lambda}{4r} J_m(\lambda) J_{m+1}(\lambda) [1 + \cosh(2\lambda)] - \\ & \frac{\lambda^2}{8} J_{m+1}^2(\lambda) [1 + \cosh(2\lambda)] - \frac{\lambda^2}{8} J_m^2(\lambda) [\cosh(2\lambda) - 1]. \end{aligned} \right. \quad (52)$$

为了方便起见, 令:

$$\left\{ \begin{aligned} X_1(r, z) &= B_{0, w_1}(r, z), \\ Y_1(r) &= K_1(r) + K_3(r) + K_2(r) - 2i \Omega B_{0, w_1}(r, 0), \\ X_2(r, z) &= B_{m, w_2}(r, z), \quad Y_2(r) = K_1(r) + K_2(r) - 2i \Omega B_{m, w_2}(r, 0), \\ Z_1(r) &= -K_1(r) + K_3(r) + K_2(r), \quad Z_2(r) = -K_1(r) + K_2(r), \end{aligned} \right. \quad (53)$$

则 $\phi_2(r, \theta, z, t, \tau)$ 和 $\eta_2(r, \theta, t, \tau)$ 可以表示为:

$$\phi_2 = [X_1(r, z) + X_2(r, z) \cos 2m\theta] [p^2(\tau) e^{2i\Omega} - p^2(\tau) e^{-2i\Omega}], \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \eta_2 = & [Y_1(r) + Y_2(r) \cos 2m\theta] [p^2(\tau) e^{2i\Omega} + p^2(\tau) e^{-2i\Omega}] + \\ & 2 |p(\tau)|^2 [Z_1(r) + Z_2(r) \cos 2m\theta]. \end{aligned} \quad (55)$$

到目前为止, 还不能确定振幅 $p(\tau)$, 故需进一步讨论三阶解的相容性条件.

2.3 三阶方程的相容性条件及振幅方程的推导

令 $\omega_0 - \Omega = \varepsilon^2 \sigma$ (其中 σ 是一常数), (56)

式(56)表明所研究的表面波是 Faraday 波的亚谐共振, 将一阶解和二阶解的表达式(34)~(35)和(54)~(55)代入3阶解满足的边界条件(25)~(28), 得到关于式 $\partial^2 \phi_3 / \partial t^2 + \partial \phi_3 / \partial z$ 中含有一阶解因子 $\cos(m\theta) \exp(i\Omega t)$ 或 $\cos(m\theta) \exp(-i\Omega t)$ 的项, 经计算含有这些项的表达式为:

$$\begin{aligned} & \cos(m\theta) \left[G_1(r) p^2(\tau) p(\tau) - G_2(r) \frac{dp(\tau)}{d\tau} + G_3(r) e^{2i\sigma\tau} p(\tau) \right] e^{i\Omega t} + \\ & \cos(m\theta) \left[G_1(r) p^2(\tau) p(\tau) + G_2(r) \frac{dp(\tau)}{d\tau} + G_3(r) e^{-2i\sigma\tau} p(\tau) \right] e^{-i\Omega t}, \end{aligned} \quad (57)$$

其中 $G_1(r), G_2(r), G_3(r)$ 表示为:

$$\begin{aligned}
G_1(r) = & J_m(\lambda)(i\Omega)[2\Omega^2 \cosh(\lambda) - \lambda \sinh(\lambda)] \left[\frac{\partial X_1(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} + \right. \\
& \left. \frac{1}{2} \frac{\partial X_2(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} \right] - (i\Omega) J_m(\lambda) \cosh(\lambda) \left[\frac{\partial^2 X_1(r, z)}{\partial z^2} \Big|_{z=0} + \right. \\
& \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 X_2(r, z)}{\partial z^2} \Big|_{z=0} \right] - \lambda^2 J_m(\lambda) \cosh(\lambda) \left[Y_1(r, 0) + \frac{1}{2} Y_2(r, 0) + \right. \\
& \left. 2Z_1(r) + Z_2(r) \right] + \frac{m^2}{r} J_m(\lambda) \cosh(\lambda) (Y_2(r) + 2Z_2(r)) + \\
& \cosh(\lambda) \left[\frac{m}{r} J_m(\lambda) - N_{m+1}(\lambda) \right] \left[\frac{\partial Y_1(r, z)}{\partial r} \Big|_{z=0} + \right. \\
& \left. \frac{1}{2} \frac{\partial Y_2(r, z)}{\partial r} \Big|_{z=0} + 2 \frac{\partial Z_1(r)}{\partial r} + \frac{\partial Z_2(r)}{\partial r} \right] + \\
& J_m(\lambda) \sinh(\lambda) \lambda \Omega^2 \left[-Y_1(r) - \frac{1}{2} Y_2(r) + 2Z_1(r) + Z_2(r) \right] + \\
& \frac{9}{32} \Omega^2 \lambda^2 J_m^3(\lambda) [\Omega^2 (3 \cosh(\lambda) + \cosh(3\lambda)) - \lambda (\sinh(3\lambda) + \sinh(\lambda))], \quad (58a)
\end{aligned}$$

$$G_2(r) = 2i\Omega J_m(\lambda) \cosh(\lambda), \quad G_3(r) = \frac{\Omega^2}{2} J_m(\lambda) \cosh(\lambda). \quad (58b, c)$$

假设满足三阶解中含有(57)式因子的特解具有形式:

$$\phi_3(r, z) \cos(m\theta) e^{i\Omega t}, \quad \text{或} \quad \phi_3(r, z) \cos(m\theta) e^{-i\Omega t}, \quad (59)$$

则 $\phi_3(r, z)$ 满足如下的方程:

$$\frac{\partial^2 \phi_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_3}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} \phi_3 + \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial z^2} = 0 \quad 0 < r < R, \quad -1 < z < 0, \quad (60)$$

和边界条件:

$$\frac{\partial \phi_3}{\partial z} - \Omega^2 \phi_3 = E(r) \quad z = 0, \quad (61)$$

$$\frac{\partial \phi_3}{\partial r} = 0 \quad r = R, \quad (62)$$

$$\frac{\partial \phi_3}{\partial z} = 0 \quad z = -1. \quad (63)$$

其中 $E(r)$ 代表(57)中含有项 $\cos(m\theta) \exp(i\Omega t)$ 或 $\cos(m\theta) \exp(-i\Omega t)$ 的系数, 即:

$$G_1(r) p^2(\tau) p(\tau) - G_2(r) \frac{dp(\tau)}{d\tau} + G_3(r) e^{2i\sigma\tau} p(\tau)$$

$$\text{或} \quad G_1(r) p^2(\tau) p(\tau) + G_2(r) \frac{dp(\tau)}{d\tau} + G_3(r) e^{2i\sigma\tau} p(\tau).$$

将(60)乘以 Φ 减去(30)乘以 ϕ_3 , 用边界条件(31)~(33)以及(61)~(63), 得三阶解满足的相容性条件, 即:

$$\int_0^R J_m(\lambda) E(r) r dr = 0. \quad (64)$$

将(57)~(58)代入(64)式, 得到自由面的振幅方程:

$$\frac{dp(\tau)}{d\tau} = \frac{\alpha}{\beta} p^2(\tau) p(\tau) + \frac{\gamma}{\beta} e^{2i\sigma\tau} p(\tau), \quad (65)$$

其中

$$\alpha = \int_0^R J_m(\lambda) G_1(r) r dr, \quad \beta = \int_0^R J_m(\lambda) G_2(r) r dr, \quad \gamma = \int_0^R J_m(\lambda) G_3(r) r dr. \quad (66)$$

由于我们没有引入空间慢变尺度, 非线性振幅方程(65)和以往的非线性 Schrödinger 方程

相比, 不包含空间慢变尺度的二阶导数项和耗散项。将振幅方程(65)的未知函数和系数的实部与虚部分开, 可得如下的非线性常微分方程组:

$$\frac{dp_1(\tau)}{d\tau} = M_1 p_2(\tau) [p_1^2(\tau) + p_2^2(\tau)] + M_2 [p_1(\tau) \sin(2\sigma\tau) - p_2(\tau) \cos(2\sigma\tau)], \quad (67)$$

$$\frac{dp_2(\tau)}{d\tau} = -M_1 p_1(\tau) [p_1^2(\tau) + p_2^2(\tau)] - M_2 [p_1(\tau) \cos(2\sigma\tau) + p_2(\tau) \sin(2\sigma\tau)]. \quad (68)$$

其中
$$M_1 = \frac{\int_0^R J_m(\lambda r) G_1(r) r dr}{2 \Omega \cosh(\lambda) \int_0^R J_m^2(\lambda r) r dr}, \quad M_2 = \frac{\Omega}{4} f_0. \quad (69)$$

3 计算结果

为了和已有的实验^[9, 10, 11]相比来描述自由表面波的各种模态随驱动振幅和频率的变化规律, 本文对振幅方程(67)~(68)进行了数值计算。在求解一阶非线性常微分方程组(67)~(68)时采用全区间积分的定步长四阶 Runge_Kutta 法, 初始条件的给定近似地与自由面波高的量阶一致。为了和实验进行比较, 参数的选择近似地与实验中的实际参数相符合。如容器的半径 R^* 为 7.5 cm, 水深为 1.0 cm, 底部驱动的振幅为 0.114 mm~0.414 mm, 驱动频率为 10 Hz~52 Hz。因为我们所考虑的驻波模式的频率近似地等于底部驱动频率的一半, 而驻波模式的频率又满足色散关系(36), 因此当容器的半径和液体的深度给定时, 模式的选择主要由底部的驱动频率来决定(液体表面张力和粘性的影响本文不予考虑)。

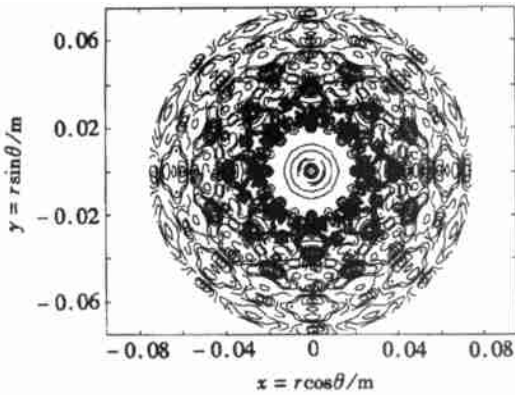


图2 (8, 4) 模式的理论等高线图

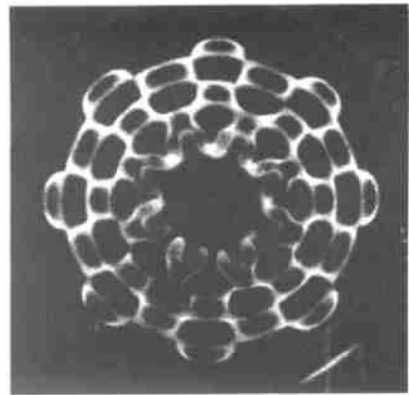


图3 (8, 4) 模式的实验等高线图

图2是底部驱动频率为 16.71 Hz, 驱动振幅为 0.148 mm 的(8, 4)模式的自由面位移二阶解 $\eta = \varepsilon \eta_1 + \varepsilon^2 \eta_2$ 的等高线图, 其中 (m, n) 模式是指沿圆周有 m 个波峰, 沿半径方向有 n 个零点。图3是对应模式的实验照片的等高线图。图中等高线的实线表示此时的自由面位置高出静水面, 虚线表示自由面的位置低于静水面。(下列各等高线图的实线和虚线的意义和上述相同)通过对两个图形的比较, 可以看出沿圆周方向共有 16 瓣, 沿直径方向有 4 个节圆, 体现了(8, 4)模式的特点, 但图2和图3的驱动频率有较大的差别, 图3的驱动频率为 50 Hz。

图4是底部驱动频率为 19.66 Hz, 驱动振幅为 0.114 mm 的(9, 6)模式的自由面位移二阶解 $\eta = \varepsilon \eta_1 + \varepsilon^2 \eta_2$ 的等高线图, 图5是相同条件下的实验照片, 但底部驱动频率是 52 Hz。通过对两个图形的对比, 可以看出沿圆周方向共有 18 瓣, 沿直径方向有 6 个节圆, 体现了(9, 6)模式的特点。

造成理论和实验的驱动频率有较大差别的原因可能是粘性的影响。流体和壁面之间阻尼会使表面波衰减,要形成稳定的驻波,需要更大的驱动频率。此外,由于本文所研究对象的尺度较小,故液体的表面张力及其它的物理机制如接触线的影响等都会对表面波模式的选择有一定的作用。

在理想流体中,当容器的尺度比较大,水深相对较浅,驱动的频率不是很大时,就会出现比较复杂的驻波模式,这和粘性比较大的液体在高频驱动下才能出现复杂的驻波模式有较大的区别。尽管数学模型的建立与实验有所差别^[9~11],但计算的结果可以解释许多实验中所观察到的物理现象。

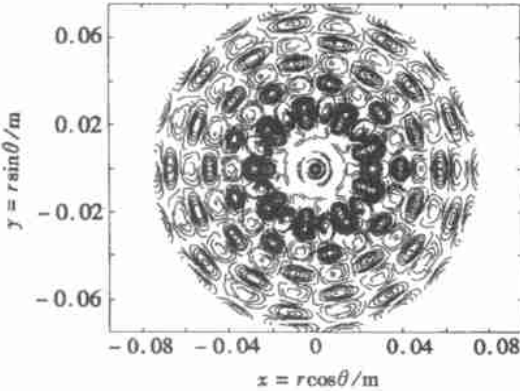


图4 (9,6)模式的理论等高线图

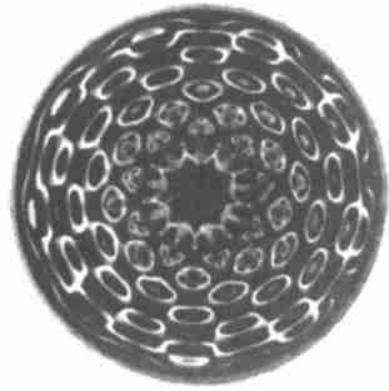


图5 (9,6)模式的实验等高线图

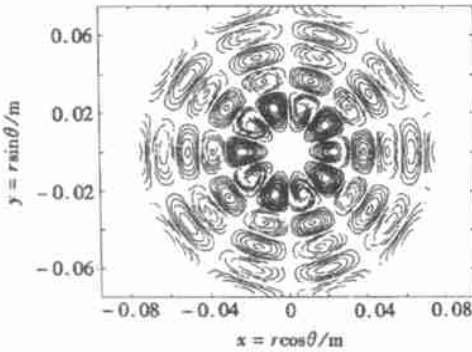


图6 (5,5)模式一阶理论等高线图

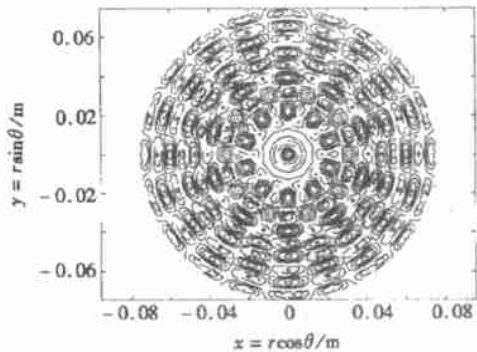


图7 (5,5)模式二阶理论等高线图

为了更清楚地描述此物理现象,本文还给出了一个(5,5)模式的算例,此时的驱动振幅为0.314 mm,驱动的频率为16.45 Hz。图6和图7分别是一阶近似 $\varepsilon \eta_1$ 和二阶近似 $\varepsilon^2 \eta_2$ 的自由面等高线。

图8是(5,5)模式自由面位移二阶解 $\eta = \varepsilon \eta_1 + \varepsilon^2 \eta_2$ 的等高线图,从图中可以看出二阶解的非线性效应比较大。图9是图8的三维表面图。以上各图的计算结果都是在某一时刻得到的,不同的时刻会出现不同的等高线图和三维表面图,但图形的大致模式是一致的,只是波峰和波谷随时间会发生变化。文中所有的等高线图的波峰和波谷是交替出现的,图中任意闭合实线表示波峰,虚线表示波谷。

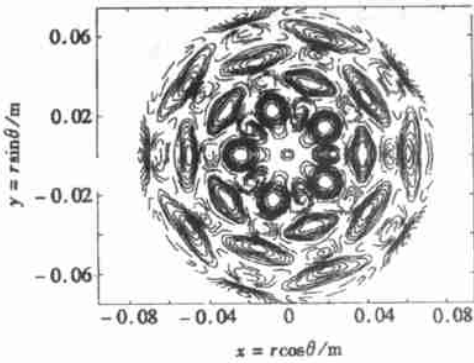


图8 (5,5)模式一阶和二阶的累加理论等高线图

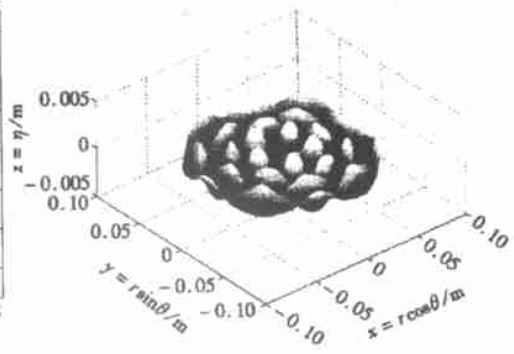


图9 (5,5)模式对应于图8的三维表面图

4 结 论

综上所述,可以得到如下的结论:

1) 在圆柱形容器中,用多尺度法从无粘、不可压流体的无旋运动水波动力学方程导出了类似于非线性 Schrödinger 方程的含有驱动项影响的非线性复系数常微分方程。进一步丰富了非线性 Schrödinger 方程在不同坐标系下的表现形式。

2) 通过对振幅方程(67)~(68)进行数值计算,在一定的频率范围内获得了水表面驻波的流谱图案。理论计算结果和实验^[9-11]进行了比较,符合较好。如模式的选择取决于容器的尺度、水深、底部的驱动参数、液体的表面张力以及液体的粘性等因素。

3) 在忽略了粘性影响的情况下,驱动频率不是很大时就会出现相对于粘性比较大的液体在高频驱动下才能出现的复杂的驻波模式。由于实验的驱动容器的侧壁是不动的,只是底部在振动,故流体的粘性将起非常重要的作用。

4) 由 Mathieu 方程的稳定性,自由面驻波的频率除了 1/2 的底部驱动频率之外,还有各种亚谐波和超谐波,实验的结果是这些各类谐波的叠加,而本文的计算是严格意义下的 1/2 底部驱动频率的 Faraday 波,这也是造成理论和实验有一定差别的原因。

液体表面张力和粘性对模式选择的影响将在今后的文章中继续发表。

致谢 本文在数学处理方面得到中国科学院力学研究所周显初研究员的关心和帮助,在此表示感谢。

[参 考 文 献]

- [1] Faraday M. On the forms and states assumed by fluids in contact with vibrating elastic surfaces[J]. Phil Trans R Soc Lond, 1831, **121**: 319—340.
- [2] Benjamin T B, Ursell F. The stability of the plane free surface of a liquid in vertical periodic motion [J]. Proc R Soc Lond A, 1954, **255**: 505—515.
- [3] Miles J W. Nonlinear surface wave in closed basins [J]. J Fluid Mech, 1976, **75**: 419—448.
- [4] Meron E, Procaccia I. Low dimensional chaos in surface waves: Theoretical analysis of an experiment [J]. Phys Rev A, 1986, **34**: 3221—3237.
- [5] Larza A, Putterman S. Theory of non-propagating surface solitons[J]. J Fluid Mech, 1984, **148**: 443—449.

- [6] 周显初· 非传播孤立波和表面张力[J]· 力学学报, 1998, **30**(6): 672—675.
- [7] Miles J W. Nonlinear Faraday resonance [J]. J Fluid Mech, 1984, **83**: 153—158.
- [8] Miles J W. Parametrically excited solitary waves [J]. J Fluid Mech, 1984, **148**: 451—460.
- [9] E Xue_quan, GAO Yu_xin. Ordered and chaotic modes of surface wave patterns in a vertically oscillating fluid [J]. Communications in Nonlinear Sciences & Numerical Simulation, 1996, **1**(2): 1—6.
- [10] E Xue_quan, GAO Yu_xin. Visualization of surface wave patterns of a fluid in vertical vibration [A]. In: Proceedings of the Fourth Asian Symposium on Visualization [C]. 1996, Beijing, 653—658.
- [11] 高宇欣, 鄂学全· 微幅振荡流体表面波图谱显示方法[J]· 实验力学, 1998, **13**(3): 326—333.
- [12] Giliberto S, Gollub J P. Chaotic mode competition in parametrically forced surface waves [J]. J Fluid Mech, 1985, **158**: 381—398.
- [13] Nayfeh A H. Surface waves in closed basins under parametric and internal resonances [J]. Phys Fluids, 1987, **30**: 2976—2983.
- [14] Feng Z C, Sethna P R. Symmetry-breaking bifurcations in resonant surface waves [J]. J Fluid Mech, 1989, **199**: 495—518.
- [15] Nagata M. Nonlinear Faraday resonance in a box with a square base [J]. J Fluid Mech, 1989, **209**: 265—284.
- [16] Edwards W S, Fauve S. Patterns and quasi-patterns in the Faraday experiment [J]. J Fluid Mech, 1994, **278**: 123—148.
- [17] Umeki M, Kambe T. Nonlinear dynamics and chaos in parametrically excited surface waves [J]. J Phys Soc Japan, 1989, **58**: 140—154.

Nonlinear Faraday Waves in a Parametrically Excited Circular Cylindrical Container

JIAN Yongjun^{1,2}, E Xuequan¹, BAI Wei¹

(1. Department of Engineering Science, Institute of Mechanics,
Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, P. R. China;

2. First Institute of Oceanography, State Oceanic Administration,
Qingdao, Shandong 266061, P. R. China)

Abstract: In the cylindrical coordinate system, a singular perturbation theory of multiple scale asymptotic expansions was developed to study single standing water wave mode by solving potential equations of water waves in a rigid circular cylinder, which is subject to a vertical oscillation. It is assumed that the fluid in the circular cylindrical vessel is inviscid, incompressible and the motion is irrotational, a nonlinear amplitude equation with cubic and vertically excited terms of the vessel was derived by expansion of two time scales without considering the effect of surface tension. It is shown by numerical computation that different free surface standing wave patterns will be formed in different excited frequencies and amplitudes. The contours of free surface waves are agreed well with the experimental results which were carried out several years ago.

Key words: vertically forced oscillation; nonlinear; Faraday wave; singular perturbation expansion; amplitude equation