文章编号: 1000_0887(2003) 10_1083_07

二阶广义分布参数系统的谱分布*

葛照强[1], 朱广田[2], 马勇镐[3]

(1. 西安交通大学 应用数学系, 西安 710049;
2. 中国科学院 系统科学研究所, 北京 100080;
3. 美国西南德州大学 数学系, 美国德州 78666)

(我刊原编委林宗池推荐)

摘要: 应用泛函分析算子理论的方法研究了 Hilbert 空间中二阶广义分布参数系统的谱分布问题, 利用有界线性算子的广义逆给出了所讨论问题的解及解的构造性表达式• 这对研究二阶广义分布参数系统的镇定及渐进稳定性问题都有重要的理论价值•

关 键 词: 二阶广义分布参数系统; 谱分布; Hilbert 空间; 算子的广义逆
中图分类号: O231; O177. 1; TP271. 61　　文献标识码: A

引　言

广义分布参数系统是比分布参数系统更广泛的一类系统, 如复合材料中的温度分布、电缆系统中的信号传播、电磁耦合超导线路中的电压分布、波导线等[1~3], 它与分布参数系统有着本质的区别• 关于广义分布参数系统的研究仅有 10 余年历史, 研究的内容主要集中在系统建模、求解、稳定性、极点配置和变结构控制上[1~9]• 因此研究广义分布参数系统的谱分布问题是一类有重要意义的问题• 本文讨论二阶广义分布参数系统的谱分布问题, 应用有界线性算子的广义逆给出了问题的解及解的构造性表达式•

设 H 是复的可析的 Hilbert 空间, A_0 是闭稠定可逆线性算子, E_0 是有界线性算子, E_0 和 A_0 仅有有限广义特征值, 且 $E_0A_0^{1/2} = A_0^{1/2}E_0$, $b_0 \in H$, $u(t)$ 是数值函数• 在工程控制中, 一类重要的控制系统是由如下的二阶广义分布参数系统描述的:

$$E_0 \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = A_0 x + b_0 u(t),\ x(0) = x_0,\ \frac{\mathrm{d}x(0)}{\mathrm{d}t} = x_1 \tag{1}$$

令

$$u(t) = \langle E_0 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\ g_0 \rangle, \tag{2}$$

其中 $g_0 \in H$, $g_0 \neq 0$, $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 表示 H 中的内积• 把(2)代入(1)可得闭环二阶广义分布参数系统

* 收稿日期: 2001_11_13; 修订日期: 2003_05_09
基金项目: 美国国家自然科学基金资助项目(DMS_9406959); 陕西省三五人才工程专项基金资助项目(199821)
作者简介: 葛照强(1960—), 男, 陕西人, 教授, 出版著作 6 本, 发表论文 60 余篇
(E_mail: gezqjd@ mail. xjtu. edu. cn)•

$$E_0 \frac{d^2 x}{dt^2} = G_0 \frac{dx}{dt} + A_0 x,\ x(0) = x_0,\ \frac{dx(0)}{dt} = x_1, \tag{3}$$

其中 G_0 满足: $G_0 x = \langle E_0 x, g_0\rangle b_0$. 要研究的问题是: 任给一组复数$\{\lambda_i\}_1^N$, 寻找 $g_0 \in H$, 使系统(3) 具有预先给定的广义点谱$\{\lambda_i\}_1^N$.

令

$$E_1 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & E_0 \end{bmatrix},\ A_1 = \begin{bmatrix} 0 & A_0^{1/2} \\ A_0^{1/2} & 0 \end{bmatrix},\ G_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G_0 \end{bmatrix},$$

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix},\ v_1 = A_0^{1/2} x,\ v_2 = \frac{dx}{dt},$$

由(3) 可得:

$$E_1 \frac{dv}{dt} = (A_1 + G_1) v,\ v_0 = \begin{bmatrix} A_0^{1/2} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

系统(3) 和(4) 相应的广义特征值问题是:

$$\lambda^2 E_0 x = \lambda G_0 x + A_0 x, \tag{5}$$

$$\lambda E_1 v = (A_1 + G_1) v. \tag{6}$$

不难证明如下的引理:

引理 1 设 A_0 是闭稠定可逆线性算子, E_0 是有界线性算子, E_0 和 A_0 仅有有限广义特征值, 且 $E_0 A_0^{1/2} = A_0^{1/2} E_0$. 若$(\lambda, x)$ 为方程(5) 的一个解,

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0^{1/2} x \\ \lambda x \end{bmatrix},$$

则(λ, v) 是方程(6) 的解; 若(λ_0, v_0) 是方程(6) 的解,

$$v_0 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0^{1/2} x_0 \\ \lambda_0 x_0 \end{bmatrix},$$

则(λ_0, x_0) 是方程(5) 的解.

根据引理 1, 要研究的问题变为: 任给一组复数$\{\lambda_i\}_1^N$, 寻找 $g_0 \in H$, 使$\{\lambda_i\}_1^N \subset \sigma_p(E_1, A_1 + G_1)$, 其中 $\sigma_p(E_1, A_1 + G_1) = \{\lambda: \lambda$ 为 E_1 和 $A_1 + G_1$ 的广义特征值$\}$ 为系统(4) 的有限广义点谱.

本文应用 Hilbert 空间中有界线性算子的广义逆给出了 g_0 的构造性表达式.

1 预 备 知 识

以下, E^* 表示 E 的共轭算子, $\sigma_p(E, A) = \{\lambda: \lambda$ 是 E 和 A 的广义特征值$\}$ 表示 E 和 A 的有限广义点谱, $\rho(E, A) = \{\alpha: (\alpha E - A)$ 是正则算子$\}$; 对 $\alpha \in \rho(E, A)$, $R(\alpha E, A) = (\alpha E - A)^{-1}$, I 表示恒等算子.

定义 1[10] 设 $B(H)$ 表示 H 上有界线性算子全体所构成的 Banach 代数, 对 $A \in B(H)$, 若存在 $A^+ \in B(H)$, 使 $AA^+A = A$, $A^+AA^+ = A^+$, $(A^+A)^* = A^+A$, $(AA^+)^* = AA^+$, 则 A^+ 称为有界线性算子 A 的一个广义逆.

引理 2[10] 若 A^+ 存在, 则 A^+ 唯一, 且存在$(A^*)^+$ 满足$(A^+)^* = (A^*)^+$.

引理 3[10] 设 $x, a \in H, A \in B(H), A^+$ 存在, 若 $Ax = a$ 可解, 则其通解为: $x = A^+ a +$

$(I - A^+ A)c$, 其中 c 为H 中任一元•

假设(S) 设A_0是一个闭稠定可逆线性算子, E_0为有界线性算子, E_0和A_0仅有非零有限广义点谱$\{\lambda_k\}_1^\infty$, 任一 λ_k 都是单重的, 且相应的广义特征向量为 φ_k, 即 $\lambda_k E_0\varphi_k = A_0\varphi_k$, $\{\psi_k\}_1^\infty$ 表示满足 $\lambda_k E_0^*\psi_k = A^*\psi_k (k = 1, 2, \cdots)$ 的 E_0^* 和 A_0^* 的广义特征向量, 并形成H 中的一个无条件基的子集, 且$\{E_0\varphi_k\}_1^\infty$和$\{\psi_k\}_1^\infty$满足如下关系:

$$\langle E_0\varphi_k, \psi_l\rangle = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases} \quad (k, l = 1, 2, \cdots) \bullet$$

不难证明如下的引理:

引理 4 设 E_0和A_0满足假设(S), 且 $R = R(\lambda^2 E_0, A_0)$, 则 $\lambda \in \rho(E_1, A_1)$ 当且仅当 $\lambda^2 \in \rho(E_0, A_0)$, 且

$$R(\lambda E_1, A_1) = (\lambda E_1 - A_1)^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda E_0 R & A_0^{1/2} R \\ A_0^{1/2} & \lambda R \end{bmatrix} \bullet$$

引理 5 设 E_0和A_0满足假设(S), 且 $\alpha^2 \notin \sigma_p(E_0, A_0)$• 则 $\alpha \in \sigma_p(E_1, A_1 + G_1)$ 当且仅当

$$\langle E_1 R(\alpha E_1, A_1) b_1, g_1\rangle = 1, \text{ 其中 } b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix},\ g_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ g_0 \end{bmatrix} \bullet$$

证明 令 $\alpha \in \sigma_p(E_1, A_1 + G_1)$ 且 $\psi \neq 0$满足 $\alpha E_1\psi = (A_1 + G_1)\psi$, 则

$$\alpha E_1\psi = A_1\psi + G_1\psi = A_1\psi + \langle E_1\psi, g_1\rangle b_1,$$

从而$(\alpha E_1 - A_1)\psi = \langle E_1\psi, g_1\rangle b_1$• 由引理 4 可得 $\alpha \in \rho(E_1, A_1)$• 从而

$$\psi = (\alpha E_1 - A_1)^{-1}\langle E_1\psi, g_1\rangle b_1, \tag{7}$$

因此 $E_1\psi = E_1(\alpha E_1 - A_1)^{-1}\langle E_1\psi, g_1\rangle b_1$,

从而 $$\langle E_1\psi, g_1\rangle = \langle E_1\psi, g_1\rangle\langle E_1(\alpha E_1 - A_1)^{-1} b_1, g_1\rangle \bullet \tag{8}$$

把(8)代入(7)可得

$$\psi = R(\alpha E_1, A_1)\langle E_1\psi, g_1\rangle\langle E_1 R(\alpha E_1, A_1) b_1, g_1\rangle b_1 = \langle E_1 R(\alpha E_1, A_1) b_1, g_1\rangle\psi$$

由于 $\psi \neq 0$ 可得$\langle E_1 R(\alpha E_1, A_1) b_1, g_1\rangle = 1$•

由引理4 可得 $\alpha \in \rho(E_1, A_1)$, 令 $\psi_0 = R(\alpha E_1, A_1) b_1$, 则 $\psi_0 \neq 0$• 因此

$$[\alpha E_1 - (A_1 + G_1)]\psi_0 = (\alpha E_1 - A_1)\psi_0 - \langle E_1\psi_0, g_1\rangle b_1 =$$
$$(\alpha E_1 - A_1) R(\alpha E_1 A_1) b_1 - \langle E_1 R(\alpha E_1, A_1) b_1, g_1\rangle b_1 = 0,$$

从而引理 5 成立•

2 主要结果及证明

定理 1 设系统(1)满足假设(S), $J_N = \{\pm 1, \pm 2, \cdots, \pm N\}$, $d_k = \langle b_0, \psi_k\rangle/\sqrt{2} \neq 0 (k \in J_N)$, $\{\alpha_i\}_{i\in J_N}$ 满足$\alpha_i \neq \alpha_j (i \neq j; i, j \in J_N)$,

$$\alpha_i \notin \sigma_p(E_1, A_1),\quad \alpha_i = \mu_i \qquad (i = \pm(N+1), \pm(N+2), \cdots),$$

且

$$\mu_i = \begin{cases} -\sqrt{\lambda_i} & (i = 1, 2, \cdots), \\ \sqrt{\lambda_i} & (i = -1, -2, \cdots), \end{cases}$$

其中 $\lambda_{-i} = \lambda_i (i = 1, 2, \cdots)$• 如果 E_0^+ 存在, 且

$$c_i = (\alpha_i - \mu_i)\prod_{\substack{j\in J_N \\ j\neq i}}\left(\frac{\alpha_j - \mu_i}{\mu_j - \mu_i}\right) \qquad i \in J_N$$

满足 $c_i = c_{-i}(i = 1, 2, \dots, N)$，则存在 $g_0 \in H$ 使 $\{\alpha_i\}_{i\in J_N} \subset \wp(E_1, A_1 + G_1)$，且 g_0 的表达式为

$$g_0 = \sum_{k\in J_N} \frac{c_k}{\sqrt{2}d_k}(E_0^*)^+ E_0^* \psi_k + [I - (E_0^*)^+ E_0^*] a_0,$$

其中 a_0 为 H 中任一元•

证明 令

$$u_l = \frac{1}{\sqrt{2\lambda_l}}\begin{bmatrix} \operatorname{sgn}(l)A_0^{1/2}\varphi_l \\ \sqrt{\lambda_l}\varphi_l \end{bmatrix}, \quad v_l = \frac{1}{\sqrt{2\lambda_l}}\begin{bmatrix} \operatorname{sgn}(l)(A_0^*)^{1/2}\psi_l \\ \sqrt{\lambda_l}\psi_l \end{bmatrix},$$

其中 $\varphi_l = \varphi_{-l}$, $\psi_l = \psi_{-l}$, $l \in J$, $J = \{\pm 1, \pm 2, \dots\}$，则

$$\mu_l E_1 u_l = \frac{\mu_l}{\sqrt{2\lambda_l}}\begin{bmatrix} I_0 & 0 \\ 0 & E_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \operatorname{sgn}(l)A_0^{1/2}\varphi_l \\ \sqrt{\lambda_l}\varphi_l \end{bmatrix} = \frac{\mu_l}{\sqrt{2\lambda_l}}\begin{bmatrix} \operatorname{sgn}(l)A_0^{1/2}\varphi_l \\ \sqrt{\lambda_l}E_0\varphi_l \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\lambda_l}}\begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_l}A_0^{1/2}\varphi_l \\ \operatorname{sgn}(l)A_0\varphi_l \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\lambda_l}}\begin{bmatrix} 0 & A_0^{1/2} \\ A_0^{1/2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \operatorname{sgn}(l)A_0^{1/2}\varphi_l \\ \sqrt{\lambda_l}\varphi_l \end{bmatrix} = A_1 u_l•$$

类似的可得：$\mu_l E_1^* v_l = A_1^* v_l$，且

$$\langle E_1 u_i, v_j \rangle = \frac{1}{2\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}\left\langle \begin{bmatrix} \operatorname{sgn}(i)A_0^{1/2}\varphi_i \\ \sqrt{\lambda_i}E_0\varphi_i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \operatorname{sgn}(j)(A_0^*)^{1/2}\psi_j \\ \sqrt{\lambda_j}\psi_j \end{bmatrix} \right\rangle =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}[\sqrt{\lambda_i\lambda_j}\langle E_0\varphi_i, \psi_j\rangle + \operatorname{sgn}(i)\operatorname{sgn}(j)\langle\varphi_i, \lambda_j E_0^*\psi_j\rangle] =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}[\sqrt{\lambda_i\lambda_j}\langle E_0\varphi_i, \psi_j\rangle + \operatorname{sgn}(i)\operatorname{sgn}(j)\lambda_j\langle E_0\varphi_i, \psi_j\rangle] =$$

$$\begin{cases} 1 & (i = j), \\ 0 & (i \neq j)• \end{cases}$$

应用定理 5[11]，存在 $g_1 \in H \times H$ 使 $\{\alpha_i\}_{i\in J} \subset \wp(E_1, A_1 + G_1)$，且 g_1 的表达式为

$$g_1 = \sum_{k\in J_N} \frac{c_k}{d_k}(E_1^*)^+ E_1^* v_k + [I_1 - (E_1^*)^+ E_1^*] a_1,$$

其中 a_1 为 $H \times H$ 中任一元• 由于 $c_k = c_{-k}$，且

$$E_1^* v_k = \frac{1}{\sqrt{2\lambda_k}}\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & E_0^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \operatorname{sgn}(i)(A_0^*)^{1/2}\psi_k \\ \sqrt{\lambda_k}\psi_k \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\lambda_k}}\begin{bmatrix} \operatorname{sgn}(k)(A_0^*)^{1/2}\psi_k \\ \sqrt{\lambda_k}E_0^*\psi_k \end{bmatrix},$$

$$[I_1 - (E_1^*)^+ E_1^*] a = \begin{bmatrix} 0 \\ [I - (E_0^*)^+ E_0^*] a_0 \end{bmatrix},$$

从而 $$g_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ g_0 \end{bmatrix},$$

其中

$$g_0 = \sum_{k\in J_N} \frac{c_k}{\sqrt{2}d_k}(E_0^*)^+ E_0^* \psi_k + [I - (E_0^*)^+ E_0^*] a_0,$$

其中 a_0 为 H 中任一元• 从而定理 1 得证•

定理 2 设系统(1) 满足假设(S)，E_0^+ 存在

$$J=\{\pm 1,\ \pm 2,\ \cdots,\ \pm n,\ \cdots\},\quad \mu_n=\begin{cases}\sqrt{\lambda_n} & (n=1,2,\cdots),\\ -\sqrt{\lambda_n} & (n=-1,-2,\cdots),\end{cases}$$

其中 $\lambda_n=\lambda_{-n}(n=-1,-2,\cdots)$, 且

1) $d_k=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\langle b_0,\ \psi_k\rangle\neq 0\ (k=\pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$, $\psi_k=\psi_{-k}(k=-1,-2,\cdots)$;

2) $\inf\limits_{i\neq j}|\lambda_i-\lambda_j|\geqslant\delta>0$;

3) $\{\alpha_i\}_{i\in J}$ 满足 $\alpha_i\neq\alpha_j\ (i\neq j)$, $\alpha_i\notin\sigma_p(E_1,A_1)$, 且

$$\sum_{i\in J}\left|\frac{\alpha_i-\mu_i}{\frac{1}{\sqrt{2}}\langle b_0,\ \psi_i\rangle}\right|^2 \tag{9}$$

收敛•

如果 $$c_i=(\alpha_i-\mu_i)\prod_{\substack{j\in J\\ j\neq i}}\left(\frac{\alpha_j-\mu_i}{\mu_j-\mu_i}\right)\qquad i\in J$$

满足 $c_i=c_{-i}$, $i\in J$, 则存在 $g_0\in H$ 使$\{\alpha_i\}_{i\in J}\subset\sigma_p(E_1,A_1+G_1)$ 且 g_0 的表示式为

$$g_0=\sum_{k\in J}\frac{-c_k}{\sqrt{2}d_k}\psi_k+[I-(E_0^*)^+E_0^*]a_0,$$

其中 a_0 为 H 中任一元•

证明　令

$$u_l=\frac{1}{\sqrt{2\lambda_l}}\begin{bmatrix}\operatorname{sgn}(l)A_0^{1/2}\varphi_l\\ \sqrt{\lambda_l}\varphi_l\end{bmatrix},\quad v_l=\frac{1}{\sqrt{2\bar{\lambda}_l}}\begin{bmatrix}\operatorname{sgn}(l)(A_0^*)^{1/2}\psi_l\\ \sqrt{\bar{\lambda}_l}\psi_l\end{bmatrix},$$

其中 $\varphi_l=\varphi_{-l}$, $\psi_l=\psi_{-l}$, 则

$$\sqrt{\lambda_l}E_1u_l=A_1u_l,\quad \sqrt{\bar{\lambda}_l}E_1^*v_l=A_1^*v_l$$

且 $$\langle E_1u_l,\ v_k\rangle=\begin{cases}1 & (l=k),\\ 0 & (l\neq k)•\end{cases}\quad \langle b_1,\ v_k\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\langle b_0,\ \psi_k\rangle=d_k•$$

令 $$f(z)=\prod_{i\in J}\left(\frac{z-\alpha_i}{z-\mu_i}\right)• \tag{10}$$

由(9)收敛, 可得$f(z)$ 是以 μ_i 为极点的半纯函数, 且 $\lim_{z\to\infty}[f(z)/z]=0$•　由复分析的结果知,$f(z)$ 可表示为:

$$f(z)=f(0)+\sum_{n\in J}c_n\left(\frac{1}{z-\mu_n}+\frac{1}{\mu_n}\right),$$

在公式(10)中, 令 $z\notin\sigma_p(E_1,A_1)$ 且 $z\to\infty$, 则 $1=f(0)+\sum_{n\in J}(c_n/\mu_n)$•　因此

$$f(z)=1+\sum_{n\in J}\frac{c_n}{z-\mu_n}• \tag{11}$$

由$f(z)$ 的定义可得 c_n 的表达式:

$$c_n=(\alpha_n-\mu_n)\prod_{\substack{j\in J\\ j\neq n}}\frac{\alpha_j-\mu_n}{\mu_j-\mu_n}\qquad(n\in J)•$$

由公式(10)可得, α_i 为$f(z)$ 的一个零点•　由(11) 式可得: $1=\sum_{n\in J}[-c_n/(\alpha_j-\mu_n)]\ (j\in J)$•　令 $\Delta_i=\prod_{j\in J,j\neq i}[(\alpha_j-\mu_i)/(\mu_j-\mu_i)]\ (i\in J)$, 则

$$|\Delta_i| \leqslant \prod_{\substack{j\in J\\ j\neq i}}\left(1+\left|\frac{\alpha_i-\mu_j}{\mu_j-\mu_i}\right|\right) \leqslant \exp\left(\sum_{\substack{j\in J\\ j\neq i}}\left|\frac{\alpha_i-\mu_j}{\mu_i-\mu_j}\right|\right) \leqslant \exp\left[\frac{1}{\delta}\sum_{\substack{j\in J\\ j\neq i}}\left|\frac{\alpha_i-\mu_j}{d_j}\right||d_j|\right] \leqslant$$

$$\exp\left[\frac{1}{\delta}\left(\sum_{\substack{j\in J\\ j\neq i}}\left|\frac{\alpha_i-\mu_j}{d_j}\right|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{\substack{j\in J\\ j\neq i}}|d_j|^2\right)^{1/2}\right] = M < \infty \quad (i\in J),$$

从而
$$\sum_{i\in J}\left|\frac{c_i}{d_i}\right|^2 = \sum_{i\in J}\left|\frac{\mu_i-\alpha_i}{d_i}\Delta_i\right|^2 \leqslant M^2\sum_{i\in J}\left|\frac{\mu_i-\alpha_i}{d_i}\right|^2,$$

即 $\sum_{i\in J}\left|\frac{c_i}{d_i}\right|^2$ 收敛. 令 $g_1 = \sum_{i\in J}(-c_i/d_i)v_i + [I_1-(E_1^*)^+E_1^*]a$, 其中 a 是 $H\times H$ 中任一元, 则 $g_1\in H\times H$, 且

$$\langle E_1R(\alpha_jE_1,A_1)b_1, g_1\rangle = \sum_{i\in J}\frac{-c_i}{d_i}\langle R(\alpha_jE_1,A_1)b_1, E_1^*v_i\rangle =$$

$$\sum_{i\in J}\frac{-c_i}{d_i(\alpha_j-\mu_i)}\langle R(\alpha_jE_1,A_1)b_1, (\alpha_jE_1^*-A_1^*)v_i\rangle =$$

$$\sum_{i\in J}\frac{-c_i}{d_i(\alpha_j-\mu_i)}\langle b_1, v_i\rangle =$$

$$\sum_{i\in J}\frac{-c_i}{d_i(\alpha_j-\mu_i)}\left\langle\begin{bmatrix}0\\ b_0\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2\bar{\lambda}_i}}\begin{bmatrix}\operatorname{sgn}(i)(A_0^*)^{1/2}\phi_i\\ \sqrt{\lambda_i}\phi_i\end{bmatrix}\right\rangle =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{i\in J}\frac{-c_i}{d_i(\alpha_j-\mu_i)}\langle b_0, \phi_i\rangle = \sum_{i\in J}\frac{-c_i}{\alpha_j-\mu_i} = 1.$$

由引理5可得 $\alpha_i\in\sigma_p(E_1,A_1+G_1)$. 从而 $\{\alpha_i\}_{i\in J}\subset\sigma_p(E_1,A_1+G_1)$. 由

$$g_1 = \begin{bmatrix}0\\ \sum_{i\in J}\frac{-c_i}{\sqrt{2}d_i}\phi_i + [I-(E_0^*)^+E_0^*]a_0\end{bmatrix}$$

可得
$$g_0 = \sum_{i\in J}\frac{-c_i}{\sqrt{2}d_i}\phi_i + [I-(E_0^*)^+E_0^*]a_0,$$

其中 a_0 是 H 中任一元.

3 举 例

考虑如下的二阶广义分布参数系统

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}I_{11} & 0\\ I_{11} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{d}^2x_1/\mathrm{d}t^2\\ \mathrm{d}^2x_2/\mathrm{d}t^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_{11} & 0\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}b_1\\ 0\end{bmatrix}u(t),\\ \begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_{10}\\ x_{20}\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}\mathrm{d}x_1/\mathrm{d}t\\ \mathrm{d}x_2/\mathrm{d}t\end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix}x_{11}\\ x_{21}\end{bmatrix},\end{cases} \tag{12}$$

其中 I_{11} 为 H 上的恒等算子, A_{21}、A_{22} 为 H 上的线性算子, $A_{21}=A_{11}-A_{22}$, A_{22} 可逆, $A_{22}^{1/2}$ 存在, $x_1, x_2, b_1\in H$;

$$\frac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2} = A_{11}x_1 + b_1u(t), \quad x_1(0) = x_{10}, \quad \left.\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = x_{11}$$

为满足文献[12]中条件的二阶分布参数系统. 则可直接验证系统(12)是满足本文条件的本质二阶广义分布参数系统.

[参 考 文 献]

[1] J der L, Femandez M L. An implicit difference method for the numerical solution of coupled system of partial differential equations[J]. Appl Math Comput, 1991, **46**(2): 127—134.

[2] Lewis F L. A review of 2_D implicit systems[J]. Automatica, 1992, **28**(2): 345—354.

[3] Trzaska Z, Marszalek W. Singular distributed parameter systems[J]. IEE Control Theory and Applications, 1993, **40**(5): 305—308.

[4] GE Zhao_qiang. The stabilizability for a class of generalized system[J]. Applied Functional Analysis, 1993, **1**(1): 56—61.

[5] 岳东, 刘永清. 广义分布参数系统的变结构控制[J]. 控制与决策, 1996, **11**(2): 278—283.

[6] 高为炳. 变结构控制的理论与设计方法[M]. 北京: 科学出版社, 1996.

[7] 杨建辉, 刘永清. 广义分布参数扰动系统滑动模态控制[J]. 控制与决策, 2000, **15**(2): 145—148.

[8] GE Zhao_qiang, ZHU Guang_tian, MA Yong_hao. Pole assignment for the first order coupled generalized control system[J] Control Theory and Applications, 2000, **17**(3): 379—383.

[9] GE Zhao_qiang, MA Yong_hao. Pole assignment of the coupled generalized system[J]. Systems Science, 2000, **26**(3): 5—14.

[10] 葛照强. 算子逆问题及其应用[M]. 西安: 陕西科学技术出版社, 1993.

[11] GE Zhao_qiang. On the pole assignment for the generalized system[A]. In: Uchida K Ed. Proceedings of the First Asian Control Conference[C]. Vol **3**. Tokyo: Waseda University, 1994, 33—35.

[12] 王康宁, 吕涛, 邹振宇. 分布参数控制系统的极点配置问题[J]. 中国科学, 1982, **12**(2): 172—184.

Spectrum Distribution of the Second Order Generalized Distributed Parameter Systems

GE Zhao_qiang[1], ZHU Guang_tian[2], MA Yong_hao[3]

(1. Department of Applied Mathematics, Xi' an Jiaotong University, Xi' an 710049, P. R. China;
2. Institute of Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, P. R. China;
3. Department of Mathematics, Southwest Texas State University, Texas 78666, USA)

Abstract: Spectrum distribution of the second order generalized distributed parameter system was discussed via the functional analysis and operator theory in Hilbert space. The solutions of the problem and the constructive expression of the solutions are given by the generalized inverse one of bounded linear operator. This is theoretically important for studying the stabilization and asymptotic stability of the second order generalized distributed parameter system.

Key words: second order generalized distributed parameter system; spectrum distribution; Hilbert space; generalized inverse one of bounded linear operatiors