

文章编号: 1000-0887(2003) 09-0956-07

浅水回流的混合有限分析解^{*}

槐文信¹, 沈毅², 小松利光³

- (1. 水资源与水电工程科学国家重点实验室, 武汉大学, 武汉 430072;
2. 佛罗里达大学 土木与海岸工程系, 美国 佛罗里达州, FL 32603;
3. 九州大学 土木工程系, 日本 福岡, 812- 81)

(林建忠推荐)

摘要: 混合有限分析法是一种在局部矩形单元上进行离散的数值格式, 为了适应非规则边界, 建立了 Sigma 坐标系的浅水回流数学模型。采用 1) 风引起的回流, 2) 密度驱动的回流, 3) 假潮, 来检验数学模型和数值方法。计算结果和相应的分析解的比较表明模型和方法是可行的有效的。该技术可用于近海水域的水流和水质的数值模拟。

关键词: 潮汐; 风应力; 回流; 浅水; 假潮; 混合有限分析法; 密度梯度

中图分类号: P731.2 文献标识码: A

引 言

在水利、海洋、环境等工程中, 尤其在近海的半封闭港湾, 环境污染问题尤为突出, 如何治理污染, 是水利和环境工作者十分关注的问题。近年来日本学者提出了较多方案用来改善港湾水质, 如在港湾底部布设方向性糙率, 利用潮汐作用形成残余流提高海水的交换, 从而达到改善环境的目的。对这一流动 T. Komatsu(2000)^[1] 等运用水深平均模式进行了二维流动的数值模拟, 但不能反映垂向水流的特性。近二十多年来, 为了掌握海湾和海域等大水体中污染物的运移规律, 许多三维模型随之提出并运用于污染物浓度场的预报, 其代表作有 Liggett 等(1969)^[2]; Swanson(1986)^[3]; Bulumberg 和 Mellor(1987)^[4]; Sheng(1987)^[5]; Huang 和 Spaulding(1995)^[6] 和 Kim, Li(1995)^[7] 和 Shankar(1997)^[8] 等。本文在上述成果的基础上, 采用 σ - 坐标变换(Philips 1957)^[9] 来反映垂向非规则区域的变换, 使计算区域为规则区域。

混合有限分析法是一种新的数值格式, 其基本思想是在局部单元上将控制方程的非线性系数处理为常数, 得到局部单元上的线性偏微分方程, 利用算子叠加原理得到局部单元的解析解, 从而形成混合有限分析法格式。因此本文旨在发展一种求解港湾和海域的潮汐流的混合有限分析数值技术, 为了检验这一技术选用典型的 3 种流动作为算例, 计算结果与理论结果的良好吻合, 表明本文给出的数值模拟技术是可行而有效的。

* 收稿日期: 2001_10_30; 修订日期: 2003_05_28

基金项目: 教育部骨干教师资助计划基金资助项目(430116)

作者简介: 槐文信(1963—), 男, 陕西乾县人, 教授, 博士, 系主任, 博导(E-mail: wxhuai@wuhee.edu.cn)。

1 数学模型

1.1 σ 坐标系

考虑笛卡尔坐标系且 z 轴铅垂向上, 水面为 $z = \eta(x, y, t)$, 海底为 $z = -h(x, y)$ (如图 1 所示). 采用垂直变换函数将物理区域 (x, y, z, t) 转换为计算区域 (x', y', σ, t') , 变换函数定义为

$$z = \varphi(x', y', \sigma, t') = D\sigma + \eta \quad (1)$$

这里 $x' = x, y' = y, t' = t, \sigma$ 为变换后的垂直坐标; η 为水面抬升; $D = h + \eta; h$ 为局部水深.

在计算区域 (x', y', σ, t') 中, 沿垂向可等分为 $\Delta\sigma, \sigma = 0$ 和 $\sigma = -1$ 分别表示物理区域 (x, y, z, t) 中水面 $z = \eta(x, y, t)$ 和海底边界 $z = -h$, 相应地在物理区域中, 其流动被分为同样数目的垂直层, 其层间的厚度可写为

$$\Delta z_k = \frac{\partial \varphi_k}{\partial \sigma} \Delta \sigma = D \Delta \sigma \quad (2)$$

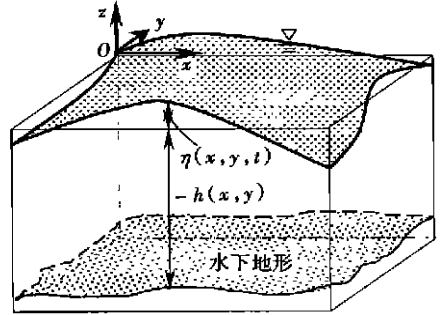


图 1 坐标示意图

1.2 守恒性方程

在上述物理区域坐标系中, 描述流动的守恒性方程有连续性方程、动量方程和浓度方程. 若采用下列的算子变换

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\partial \varphi'_x}{\partial \sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'} - \frac{\partial \varphi'_y}{\partial \sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma},$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{1}{\varphi'_\sigma}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - \frac{\partial \varphi'_t}{\partial \sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma}.$$

且流动满足静压假定, 布辛涅斯克近似亦成立, 则在计算区域 (x', y', σ, t') 中的守恒性方程可写为(为方便, 字母右上角一撇略去)

连续性方程

$$\frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial t} + \frac{\partial u \varphi_\sigma}{\partial x} + \frac{\partial v \varphi_\sigma}{\partial y} + \frac{\partial w \varphi_\sigma}{\partial \sigma} = 0 \quad (3)$$

x 和 y 向动量方程

$$\frac{\partial u \varphi_\sigma}{\partial t} + \frac{\partial u^2 \varphi_\sigma}{\partial x} + \frac{\partial uv \varphi_\sigma}{\partial y} + \frac{\partial uw \varphi_\sigma}{\partial \sigma} - \varphi_\sigma f_v =$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\frac{k_v}{\varphi_\sigma} \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right] - \frac{\varphi_\sigma}{\rho_0} \left[\rho_g \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[2 \varphi_\sigma k_v \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\varphi_\sigma k_v \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right], \quad (4)$$

$$\frac{\partial v \varphi_\sigma}{\partial t} + \frac{\partial uv \varphi_\sigma}{\partial x} + \frac{\partial v^2 \varphi_\sigma}{\partial y} + \frac{\partial vw \varphi_\sigma}{\partial \sigma} - \varphi_\sigma f_u =$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\frac{k_v}{\varphi_\sigma} \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right] - \frac{\varphi_\sigma}{\rho_0} \left[\rho_g \frac{\partial \eta}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\varphi_\sigma k_v \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[2 \varphi_\sigma k_v \frac{\partial v}{\partial y} \right], \quad (5)$$

浓度方程:

$$\frac{\partial S \varphi_\sigma}{\partial t} + \frac{\partial u S \varphi_\sigma}{\partial x} + \frac{\partial v S \varphi_\sigma}{\partial y} + \frac{\partial w S \varphi_\sigma}{\partial \sigma} =$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\varphi_\sigma k_h \frac{\partial S}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\varphi_\sigma k_h \frac{\partial S}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\frac{N_v}{\varphi_\sigma} \frac{\partial S}{\partial \sigma} \right], \quad (6)$$

上式中 t 为时间, g 为重力加速度, (u, v) 为 (x, y) 方向的速度分量, (k_h, k_v, N_v) 分别为水平

涡粘系数, 垂直涡粘系数和扩散系数。\$f\$ 为哥氏系数(\$2\Omega\sin\theta\$), \$\Omega\$ 为地球旋转速率, \$\theta\$ 为纬度; \$S\$ 为盐度或浓度; \$\rho\$ 为密度; \$\rho_0\$ 为平均密度; \$\rho\$ 定义为在 \$\sigma\$ 处的垂线平均密度, 其表达式为

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \int_{\sigma}^{\rho} \rho d\sigma \quad (7)$$

在 \$(x', y', \sigma, t')\$ 坐标系中, 垂直速度 \$w\$ 定义为

$$w = \frac{1}{\varphi_0} (w - \varphi_t - u\varphi'_x - v\varphi'_y) \quad (8)$$

从上述方程来看, 有 4 个方程(方程(3), (4), (5)和(6)), 而未知数为 5 个, 因而方程是不封闭的。我们可借助于水面的水动力学边界条件来计算水面抬升。水面抬升方程可写为

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + \frac{\partial(\varphi_0 U)}{\partial x} + \frac{\partial(\varphi_0 V)}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

式中 \$U = \int_{-1}^1 u d\sigma\$, \$V = \int_{-1}^1 v d\sigma\$

2 混合有限分析法

从理论和大量算例已经证明混合有限分析法是一种求解复杂流场的有效数值格式之一(Li 和 Huai, 1997)^[10]。为了节省篇幅, 这里仅给出其离散格式。计算区域划分为若干局部单元, 非线性控制方程(4), (5)和(6)在局部单元上线性化并写成一般形式

$$M\varphi_t + 2A\varphi_x + 2B\varphi_y + 2C\varphi_z = \dots^2\varphi + S, \quad (10)$$

上述 \$\varphi\$ 可代表不同的独立变量, 如 \$u\$ 或 \$w\$, 系数 \$M, A, B, C\$ 和源项 \$S\$ 由局部单元中心点值给出。对于非恒定项, 采用差分来近似。方程(10)的离散形式可描述为

$$\begin{cases} \varphi_p = C_W\varphi_W + C_N\varphi_N + C_S\varphi_S + C_E\varphi_E + C_F\varphi_F + C_B\varphi_B + C_p(S - M\varphi_t), \\ \varphi_p = \sum_1^6 C_i\varphi_i + C_p \left[S + M \frac{\varphi_p - \varphi_p}{\tau} \right], \\ \varphi_p = \frac{1}{1 + \frac{MC_p}{\tau}} \left[\sum_1^6 C_i\varphi_i + C_p S + \frac{MC_p}{\tau} \varphi_p \right], \end{cases} \quad (11)$$

这里 \$\varphi_p\$ 第 \$(n-1)\$ 时间步的 \$\varphi_p\$, \$\tau\$ 代表时间步长, \$C_i\$ 为混合有限分析法系数, 依次为

$$C_W = \frac{EA}{E} \exp(A), \quad C_E = \frac{EA}{E} \exp(-A), \quad C_S = \frac{EB}{E} \exp(B),$$

$$C_N = \frac{EB}{E} \exp(-B), \quad C_B = \frac{EC}{E} \exp(C), \quad C_F = \frac{EC}{E} \exp(-C),$$

$$C_p = \frac{1}{E}, \quad E_A = \frac{A}{h_i^2 \text{sh}A}, \quad E_B = \frac{B}{k_j^2 \text{sh}B}, \quad E_C = \frac{C}{l_q^2 \text{sh}C},$$

$$E = \frac{2A}{h_i^2} \text{cth}A + \frac{2B}{k_j^2} \text{cth}B + \frac{C}{l_q^2} \text{cth}C,$$

$$A = \frac{1}{2} \left[2A \bar{h}_i + \frac{h_{i+1} - h_i}{\bar{h}_i} \right], \quad \bar{h}_i = \frac{1}{2}(h_i + h_{i+1}),$$

$$B = \frac{1}{2} \left[2B \bar{k}_j + \frac{k_{j+1} - k_j}{\bar{k}_j} \right], \quad \bar{k}_j = \frac{1}{2}(k_j + k_{j+1}),$$

$$C = \frac{1}{2} \left[2C \bar{l}_q + \frac{l_{q+1} - l_q}{\bar{l}_q} \right], \quad \bar{l}_q = \frac{1}{2}(l_q + l_{q+1}).$$

对于方程(9)采用有限差分法求解, 且方程(9)重写为

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \varphi \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

最终方程(9)离散为

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_{i,j} &= C_E \varphi_{i-1,j} + C_W \varphi_{i+1,j} + C_N \varphi_{i,j+1} + C_S \varphi_{i,j-1} + C_p \overline{\varphi_{i,j}}, \\ C_E &= \frac{-u\tau}{\Delta x + \tau_{\Delta x} \partial u / \partial x + \tau_{\Delta x} \partial v / \partial y}, \\ C_W &= \frac{u\tau}{\Delta x + \tau_{\Delta x} \partial u / \partial x + \tau_{\Delta x} \partial v / \partial y}, \\ C_N &= \frac{-v\tau}{\Delta y + \tau_{\Delta y} \partial u / \partial x + \tau_{\Delta y} \partial v / \partial y}, \\ C_S &= \frac{v\tau}{\Delta y + \tau_{\Delta y} \partial u / \partial x + \tau_{\Delta y} \partial v / \partial y}, \\ C_p &= \frac{1}{1 + \tau_{\Delta x} \partial u / \partial x + \tau_{\Delta y} \partial v / \partial y} \end{aligned} \right. \quad (12)$$

τ 为时间步长, h_i, k_j, l_q 分别为 x, y, z 方向的空间步长, $\overline{\varphi_{i,j}}$ 为第 $(n-1)$ 时间步的 $\varphi_{i,j}$.

非均匀交错网格下的 SIMPLE 算法用于速度和压强的耦合求解

3 模型及方法验证

选用有分析解存在的 3 种典型流动, 即 1) 风引起的回流; 2) 密度驱动的回流; 3) 假潮来检验本文的数学模型和计算方法

3.1 风引起的回流

选用渠道底部为无滑移边界条件下水平分速的垂直分布来检验模型和方法. 对于底部为无滑移边界条件, 水面为恒定风应力的情况, 忽略对流、哥氏力和水平扩散的作用, 则其控制方程变为

$$g \frac{\partial \eta}{\partial x} = k_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (13)$$

$$\int_{-h}^{\eta} u \, dz = 0 \quad (14)$$

表面 ($z = \eta$) 处的边界条件为

$$k_w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\tau_w}{\rho} \quad (15)$$

底部 ($z = -h$), 边界条件为

$$u_b = 0 \quad (16)$$

积分方程(13)两次, 并应用边界条件, 则其分析解为

$$u = \frac{g}{2k_v} \frac{\partial \eta}{\partial x} (z^2 - h^2) + \frac{\tau_w}{\rho k_v} (h + z) \quad (17)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{3}{2} \frac{\tau_w}{\rho g h} \quad (18)$$

式中, u 为水平流速; η 为水面抬升; k_v 为垂直涡粘系数; τ_w 为风应力; h 为水深; ρ 为水的密度.

下列参数用于数值计算, $\tau_w = 0.1 \text{ N/m}^2$, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $k_v = 5 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$, $h = 2 \text{ m}$, $\tau = 30 \text{ s}$. 池长为 62 km, 宽为 5 km. 计算网格为 1 km \times 1 km, 垂直层数分别取 5, 12 和 19. 图 2 为在池中心断面水平流速与分析解的对比图, 清楚地看出, 在靠近底部边界附近, 随着垂向

层数的增加模型结果愈接近分析解。

3.2 密度驱动的回流

河流的淡水流入海洋,在河口处会形成密度梯度,从而形成回流。在忽略对流和局部加速以及底部摩擦,认为在动量方程中,水平密度梯度、表面抬升梯度和动量的垂向扩散间保持平衡。对于常水深和常涡粘条件下, Officer (1976)^[11]给出了垂向速度的分布解析式为

$$u = \frac{1}{24} \frac{g \lambda h^3}{\rho k_v} \left[1 - 6 \left(\frac{z}{h} \right)^2 - 4 \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right], \quad (19)$$

这里 u 为水平流速; z 为垂向坐标; h 为水深; ρ 为水的密度; λ 为水平密度梯度; k_v 为垂向涡粘; g 为重力加速度。

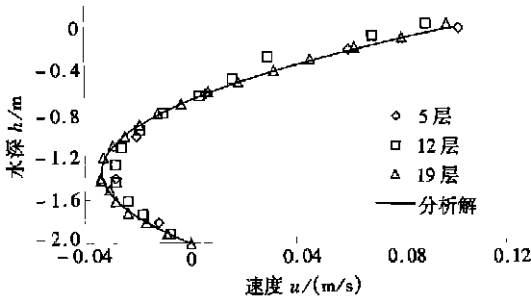


图2 封闭水池中风驱动的回流
水平流速垂向分布

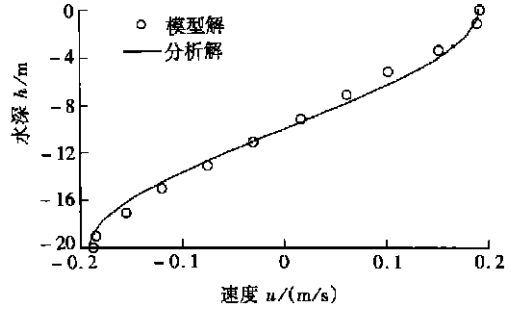


图3 密度梯度引起的回流
水平流速垂向分布

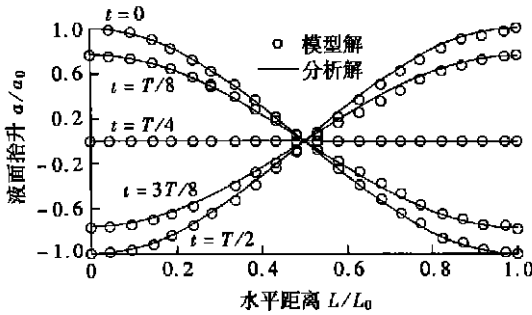


图4 封闭水池中不同时刻水面抬升分布

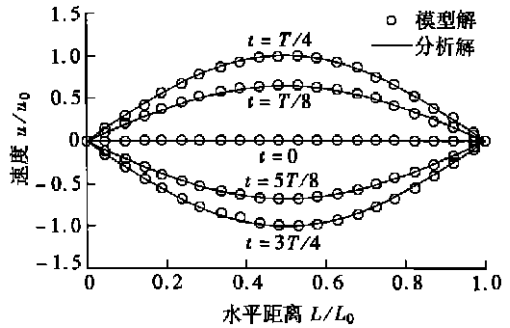


图5 封闭水池中不同时刻纵向流速分布

下列参数用于数值计算: $k_v = 5 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $h = 20 \text{ m}$, $\rho = 1025 \text{ kg/m}^3$, $\lambda = 3 \text{ kg/m}^3/(10\text{km})$ 。垂向层数为9,河口长为15 km,宽为5 km,网格间距为1 km。图3为数值模拟的结果与分析解的对比。可看出:上层流动的速度为正值,即流向海洋。且流速的最大和最小值发生在最上层和最下层。

3.3 假潮

选择假潮的目的是检验模型模拟封闭港湾中标准波的能力。忽略垂向和水平向的扩散,底部和壁面的摩擦,对流项和哥氏项,则局部加速项和压强项保持平衡。Neumann 和 Pierson (1966)^[12]给出了表面抬升和纵向流速的解析式为

$$\eta = a \cos \omega t \cos kx, \quad (20)$$

$$u = g \frac{ak}{\omega} \sin \omega t \sin kx, \quad (21)$$

式中 a 为波幅, ω 为圆周频率, k 为波数。

下列参数用于数值计算: 封闭港湾的长和宽分别为 62 km 和 14 km, 网格为 1 km; $a = 15$ cm, $h = 5$ m, h 为水深; 时间步长为 300 s, 则波的特征为 $k = 2\pi/\lambda = 5.0671 \times 10^{-7}/\text{cm}$, $T = \mathcal{N}(gh)^{1/2} = 4.92$ h, $\omega = 2\pi/T = 3.5488 \times 10^{-4}/\text{s}$. 图 4 和图 5 为不同时刻表面抬升和流速数值计算结果与分析解的对比图, 可看出两者吻合较好. 图中 a_0, L_0, u_0 分别为液面最大抬升幅值, 水池的长度和最大流速.

4 结 论

本文采用的三维混合有限分析法求解了基于 σ_z 坐标系的三维水动力学模型, 并与 3 种典型流动的分析解进行了对比, 结果表明本文给出的数学模型和数值方法是可行和有效的, 该技术可用于近海水域的水流和水质的数值模拟.

[参 考 文 献]

- [1] Komatsu T, Kohashi N, Park D. Improvement of water quality in a sea area by activating substance transport using bottom roughness[A]. In: Odgaard, Jacob, Ed. Proceedings of 4th International Conference of Hydroinformatics[C]. New York: Press Jessup Holl, 2000, 653—658.
- [2] Liggett J A, Hadjithodorou C. Circulation in shallow homogeneous lakes[J]. J Hydraulics Division, ASCE, 1969, **95**(3): 609—620.
- [3] Swanson J C. A three dimensional numerical model system of coastal circulation and water quality [D]. PhD dissertation. Kingston R I: University of Rhode Island, 1986.
- [4] Blumberg A F, Mellor G L. A description of a three dimensional coastal ocean model[A]. In: N S Heaps Ed. Three Dimensional Coastal Ocean Models[C]. Washington, D C: America Geophysical Union, 1987, 79—91.
- [5] Sheng Peter Y. On modeling three dimensional estuarine and marine hydrodynamics[A]. In: Nihoul J C J, Jamart B M Eds. Three Dimensional Model of Marine and Estuarine Dynamics [C]. New York: Elsevier, 1987, 35—54.
- [6] HUANG Wen_rui, Spaulding M. 3D model of estuarine circulation and water quality induced by surface discharges[J]. J Hydraulic Engineering, 1995, **121**(3): 300—311.
- [7] Kim C, Li J. A three dimensional PC_based hydrodynamic model using an ADI scheme[J]. Coastal Engineering, 1995, **23**(2): 271—287.
- [8] Shankar N J, Cheong H F, Sankaranarayanan S. Multilevel finite difference model for three dimensional hydrodynamic circulation[J]. Ocean Engineering, 1997, **24**(3): 785—816.
- [9] Philips N A. A coordinate system having some special advantages for numerical forecasting[J]. J Meteorology, 1957, **14**(1): 184—185.
- [10] LI Wei, HUAI Wen_xin. Calculation of whole field for vertical round buoyant jets in stratified environment[J]. J Hydraulic Research, 1997, **33**(6): 865—876.
- [11] Officer C B. Physical Oceanography of Estuaries (and Associated Coastal Waters) [M]. New York: John Wiley and Sons, 1976.
- [12] Neumann G, Pierson W J. Principles of Physical Oceanography [M]. Englewood Cliffs, N J: Prentice Hall Inc, 1966.

Hybrid Finite Analytic Solutions of Shallow Water Circulation

HUAI Wen_xin¹, Y. Peter Sheng², T. Komatsu³

1. State Key Laboratory of Water Resources and Hydropower Engineering Science,
Wuhan University, Wuhan 430072, P. R. China ;

2. Civil and Coastal Engineering Department, University of Florida,
Gainesville, FL 32603 USA;

3. Department of Civil Engineering, Kyushu University, Fukuoka, 812_81, Japan)

Abstract: The hybrid finite analytic(HFA) method is a kind of numerical scheme in rectangular element. In order to simulate the shallow circulation in irregular bathymetry by HFA scheme, the model in sigma coordinate system was obtained. The model has been tested against three cases: 1) wind induced circulation, 2) density driven circulation and 3) seiche oscillation. The results obtained in the present study compare well with those obtained from the corresponding analytical solutions under idealized for the above three cases. The hybrid finite analytic method and the circulation model in sigma coordinate system can be used calculate the flow and water quality in estuaries and coastal waters.

Key words: tidal flow; wind stress; circulation; shallow water; seiche; hybrid finite analytic method; density gradient