

文章编号: 1000-0887(2003) 09_0984_07

轴向复合载荷作用下变截面悬臂弹性 立柱后屈曲分析*

吴莹, 李世荣, 滕兆春

(兰州理工大学 理学院, 兰州 730050)

(沈惠申推荐)

摘要: 基于轴线可伸长弹性杆的几何非线性理论, 建立了同时作用端部轴向集中荷载和沿轴线作用分布轴向载荷的变截面弹性悬臂柱的后屈曲控制方程。采用打靶法直接求解了所得强非线性边值问题, 给出了截面线性变化的圆截面柱的二次平衡路径及其过屈曲位形曲线。

关键词: 变截面柱; 复合载荷; 轴线伸长; 过屈曲; 打靶法

中图分类号: O343 文献标识码: A

引 言

自从 Euler^[1]、Lagrange^[2]、Love^[3] 等研究细长柱的弹性线(elastica)问题以来, 弹性梁(柱)的后屈曲问题作为结构稳定性基本问题之一, 始终受到人们的重视。如今, 柔韧性杆(柱)被广泛地用作弹簧、连接件、机器人手臂以及发射和接收天线等。因此, 柱的过屈曲行为的研究在今天更具有广泛的工程和应用背景。在轴线不可伸长假设下, Timoshenko 等^[4] 研究了两端简支压杆的过屈曲问题, 给出了椭圆积分形式解; Wang^[5] 分别采用摄动法和打靶法研究了一端固定, 另一端可移简支压杆的屈曲问题。关于轴线不可伸长杆的最新的可见 Plaut^[6] 以及 Lee^[7] 等人的工作。当考虑轴线的伸长时, 由于弹性线的弧长元与变形前的轴线元素不相等, 即 $ds \neq dx$, 从而使弹性线的弧长或轴线的伸长率成为问题的基本未知量之一。这就大大增加了问题的求解难度^[8]。本文作者首先基于轴线可伸长杆的理论^[8] 和文[9] 中所提出的分支分析与计算的框架和观点, 采用打靶法研究了可伸长杆的后屈曲问题, 并对轴线不可伸长假设所引起的误差进行了定量分析^[10]。接着, 基于[8] 和[9] 中同样的理论和方法, 又分别研究了变截面压杆屈曲^[11] 及轴向不可移杆在升温载荷下的热过屈曲^[12~14]。关于轴线可伸长杆屈曲的进一步研究可参考 Coffin^[15] 和 Filipich^[16] 近期的研究工作。本文拟在文[10~14] 的基础上, 研究变截面悬臂立柱同时受自由端集中力和轴向分布载荷联合作用下的后屈曲问题。该问题具有广泛的实际工程背景, 例如, 高耸烟筒、水塔、电视塔、大型接收和发送天线等悬臂结构均应考虑其变截面和自重分布载荷对其稳定性的影响。首先基于可伸长杆的几何非线性理

* 收稿日期: 2001_06_28; 修订日期: 2003_05_28

基金项目: 科技部基础研究重大前期预研专项基金资助项目(2001 CCA04300)

作者简介: 吴莹(1967—), 女, 安徽灵璧人, 副教授(E-mail: wying36@163.com)。

论^[8], 建立问题的控制方程。然后, 采用打靶法数值求解所得强非线性边值问题, 获得相应的屈曲位形和平衡路径, 并讨论载荷参数、截面变化参数等对屈曲响应的影响。

1 问题的控制方程

一端固定、一端自由的立柱, 长为 l , 截面沿轴线非均匀变化, 受轴线方向的分布载荷 q 和集中荷载 P 作用, 如图 1 所示。设杆进入后屈曲状态后, 弹性曲线 xOy 在平面内。记杆未变形时轴线上一点为 $C(x, 0)$, 过屈曲后该点移到 $C'(x + u, w)$, 其中 u, w 分别为 C 点的纵向和横向位移, 如图 2 所示。采用轴线可伸长杆的大变形理论^[8, 10~15], 可以得到以下几何方程和平衡方程,

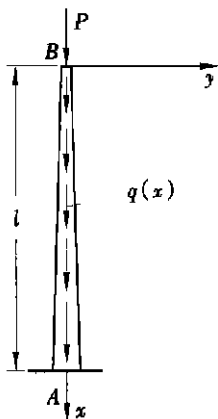


图 1 结构及载荷示意图

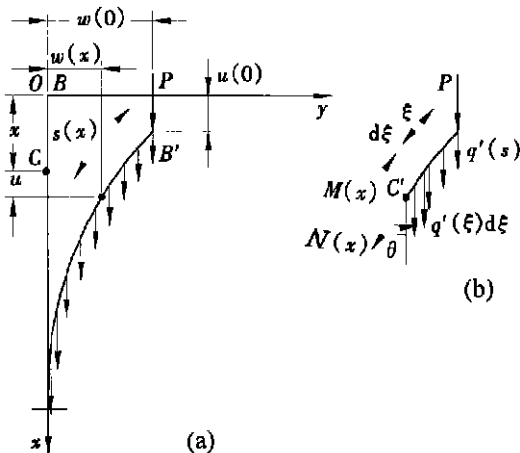


图 2 结构变形及描述

$$\frac{ds}{dx} = R, \quad \frac{du}{dx} = R \cos\theta - 1, \quad \frac{dw}{dx} = R \sin\theta, \tag{1}$$

$$M(x) = P[w(0) - w(x)] + \int_0^x q'(\xi) d\xi [w(\eta) - w(x)], \tag{2}$$

$$N(x) = - \left[P + \int_0^x q'(\xi) d\xi \right] \cos\theta, \tag{3}$$

其中 $s(x)$ 为弹性线的弧长, $R(x)$ 为轴线的伸长率(stretching), $\theta(x)$ 为轴线切线与 x 轴正向的夹角。 P 为端部集中力, $q'(\xi)$ 为变形以后杆内分布载荷集度, 这里 $0 \leq \xi \leq s, 0 \leq \eta \leq x$ 。设材料为线性弹性的, 物理方程可以表示为以下形式

$$N = EA(R - 1), \quad M = EI \frac{d\theta}{dx}, \tag{4a, b}$$

其中 A, I 分别为截面的面积和惯性矩, 可看作 x 的函数, E 为材料弹性模量。

假设过屈曲前后有 $\int_0^s q'(\xi) d\xi = \int_0^x q(\eta) d\eta$ 其中 $q(x)$ 为物质坐标系下的分布载荷, 并将方程(4)代入(2)~(3)可得位移形式的平衡方程

$$EI \frac{d\theta}{dx} = P[w(0) - w(x)] + \int_0^x q(\eta) d\eta [w(\eta) - w(x)], \tag{5}$$

$$R = 1 - \cos\theta \left[P + \int_0^x q(\xi) d\xi \right] / EA. \tag{6}$$

对(5)式两边关于 x 再求一次导数得

$$EI \frac{d^2\theta}{dx^2} = -E \frac{dI}{dx} \frac{d\theta}{dx} - \left[P + \int_0^x q(\eta) d\eta \right] \frac{dw}{dx} \quad (7)$$

问题的边界条件可记为

$$s = 0, \theta = \beta, \frac{d\theta}{dx} = 0 \quad (\text{在 } x = 0 \text{ 处}), \quad (8a)$$

$$u = 0, w = 0, \theta = 0 \quad (\text{在 } x = l \text{ 处}), \quad (8b)$$

其中自由端的转角 β 为柱的过屈曲控制参数, 对确定的过屈曲构形 β 为确定量。

引入无量纲量:

$$X = x/l, S = s/l, U = u/l, W = w/l, \quad (9a)$$

$$p = Pl^2/(EI_0), q = ql^3/(EI_0), K_1(X) = A/A_0, K_2(X) = I/I_0 \quad (9b)$$

其中 A_0, I_0 分别为 $x = 0$ 处的横截面面积和惯性矩。利用(9)式方程(1), (6), (7)简化为

$$\frac{dS}{dX} = R, \frac{dU}{dX} = R \cos\theta - 1, \frac{dW}{dX} = R \sin\theta, \quad (10)$$

$$\frac{d^2\theta}{dX^2} = -\frac{1}{K_2} \frac{dK_2}{dX} \frac{d\theta}{dX} - \left[\frac{1}{K_2} p + \frac{1}{K_2} \int_0^X q(\eta) d\eta \right] \frac{dW}{dX} \quad (11)$$

$$R = 1 - \left[p + \int_0^X q(\eta) d\eta \right] \cos\theta / K_1 \lambda_0^2, \quad (12)$$

其中 $\lambda_0^2 = l^2 A_0 / I_0$ 相应的无量纲边界条件为

$$S = 0, \theta = \beta, \frac{d\theta}{dX} = 0 \quad (\text{在 } X = 0 \text{ 处}), \quad (13a)$$

$$U = 0, W = 0, \theta = 0 \quad (\text{在 } X = 1 \text{ 处}). \quad (13b)$$

2 非线性边值问题的求解

由于方程(10)~(13)的强非线性, 其解析解难以求得, 这里采用打靶法求其数值解^[8,9,14,17]。设均布载荷有形式 $q = q_0 f(X)$, 其中 $f(X)$ 是 X 的已知函数, q_0 为某一常数。考虑初值问题

$$\frac{dY}{dX} = H(X, Y), \quad (14)$$

$$Y(0) = \left\{ 0 \quad v_1 \quad v_2 \quad \beta \quad 0 \quad v_3 \right\}^T, \quad (15)$$

其中

$$Y = \left\{ S \quad U \quad W \quad \theta \quad d\theta/dX \quad q_0 \right\}^T = \left\{ y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4 \quad y_5 \quad y_6 \right\}^T,$$

$$H = \left\{ R \quad R \cos y_4 - 1 \quad R \sin y_4 \quad y_5 \quad \phi + \varphi \quad 0 \right\}^T,$$

$$\phi = -\frac{1}{K_2} \frac{dK_2}{dX} y_5, \quad \varphi = -\frac{1}{K_2} R \sin y_4 \left[p + \int_0^X y_6 f(\xi) d\xi \right],$$

$V = \left\{ v_1 \quad v_2 \quad v_3 \right\}^T$ 为使初值问题(14)~(15)有意义的任意初始参数向量。如果对于确定的杆端转角 β , 有初始参数 $V^* = \left\{ v_1^* \quad v_2^* \quad v_3^* \right\}^T$ 使得初值问题(14)~(15)的解 $Y = Y(X; \beta, V)$ 解能满足 $X = 1$ 处的边界条件(13b), 则可得边值问题(10)~(13)的解为

$$Y = Y(X; \beta, V^*) \quad (16)$$

3 算例及数值结果

作为算例, 考虑一横截面直径沿轴线线性变化的圆截面立柱, 于是有

$$K_1(X) = \left[1 + \frac{k}{2} \lambda_0 X \right]^2, \quad K_2 = [K_1(X)]^2, \quad (17)$$

其中 $k = (d_1 - d_0) / (2l) = \tan \alpha$, α 为锥度角, d_0, d_1 分别为悬臂柱在 $x = 0$ 和 $x = 1$ 处的横截面直径, 且假定 $d_0 \leq d_1$. 将轴向分布载荷 $q(X)$ 看作柱的自重, 则有 $q(X) = A(X) \gamma = K_1(X) A_0 \gamma$. 令 $q_0 = A_0 \gamma, f(X) = K_1(X)$, 其中 γ 为材料容重, 则有

$$R = 1 - \left[p + q_0 X \left(1 + \frac{1}{2} k \lambda_0 X + \frac{1}{12} k^2 \lambda_0^2 X^2 \right) \right] \cos \gamma / K_1 \lambda_0^2, \quad (18)$$

$$q(X) = K_1 q_0, \quad \phi = - \frac{2}{K_2} \left(1 + \frac{1}{2} k \lambda_0 X \right)^3 k \lambda_0 \frac{d\theta}{dX}. \quad (19)$$

$$\Phi = - \left(\frac{1}{K_2} p + \frac{1}{K_2} q_0 X \left(1 + \frac{1}{2} k \lambda_0 X + \frac{1}{12} k^2 \lambda_0^2 X^2 \right) \right) \frac{dW}{dX}. \quad (20)$$

表 1 不同的 α 所对应的 q_{0cr}^* 和 p_{cr} 值

α	0°	0.5°	1°	1.5°	2°	2.5°
q_{0cr}^*	7.8357	23.884	51.348	91.158	144.77	212.81
p_{cr}	2.4678	7.9191	17.517	31.791	51.068	75.557

表 2 不同的 p, α 所对应的 q_{0cr} 值

	p					
	0	0.05	0.1	0.2	1	2
$\alpha = 0^\circ$	7.8357	7.5389	7.2402	7.2309	4.7688	1.5578
$\alpha = 1^\circ$	51.348	51.079	50.949	50.711	48.749	46.351
$\alpha = 2^\circ$	144.77	144.67	144.56	144.37	143.14	140.70

表 3 本文及文献[7]中等截面立柱的过屈曲数值解

$\beta / (^\circ)$	本文数值解						文献[7]中的椭圆积分解		
	可伸长杆			不可伸长杆			不可伸长杆		
	p	$W(0)$	$1 - U(0)$	p	$W(0)$	$1 - U(0)$	p	$W(0)$	$1 - U(0)$
0	2.4678	0	1	2.4678	0	1	2.4674	0	1
20	2.5057	0.2193	0.9696	2.5053	0.2193	0.9698	2.5044	0.220	0.970
40	2.6247	0.4220	0.8812	2.6243	0.4220	0.8813	2.6228	0.422	0.881
60	2.8417	0.5930	0.7412	2.8413	0.5930	0.7413	2.8424	0.593	0.741
80	3.1919	0.7192	0.5597	3.1916	0.7193	0.5598	3.1903	0.719	0.560
100	3.7448	0.7914	0.3495	3.7447	0.7914	0.3495	3.7455	0.792	0.349
120	4.6467	0.8032	0.1238	4.6470	0.8032	0.1239	4.6486	0.803	0.121
140	6.2636	0.7507	-0.1062	6.2648	0.7507	-0.1061	6.2697	0.750	-0.107
160	9.9149	0.6254	-0.3396	9.9192	0.6253	-0.3393	9.9411	0.625	-0.340

在整个计算过程中, 相对误差控制在 10^{-5} 以内. 给定柱的长细比参数 $\lambda_0 = 120$. 首先分析了柱的临界失稳问题. 根据微分方程边值问题的理论, 方程(10) ~ (13) 的线性化问题的最小特征值即为柱失稳的临界载荷. 现有两个载荷参数 q_0 和 p , 他们构成一载荷空间, 所有特征值的点在载荷空间构成一系列特征值曲线, 其中与载荷坐标轴围成面积最小的一条特征值曲线

即为临界载荷曲线, 记为 (q_{0cr}, p_{cr}) 通常称为稳定边界 (stability boundary) • 它将载荷空间 (q_0, p) 分为两部分, 即稳定性区域和不稳定性区域 • 数值计算结果表明, 对于给定的几何参数 λ_0 和 α , 临界载荷曲线为近似的直线, 而且可表示为

$$\frac{q_{0cr}}{q_{0cr}^*} + \frac{p_{cr}}{p_{cr}^*} = 1 \quad (21)$$

其中, q_{0cr}^* 和 p_{cr}^* 分别为 q_0 和 p 单独作用时的临界载荷值 • 在给定不同截面变化参数 α 时, 将计算所得 q_{0cr}^* 和 p_{cr}^* 值列在表 1 中 • 其中每组 (q_{0cr}^*, p_{cr}^*) 值都对应形如(21)的临界载荷曲线 • 对于 $\alpha = 1^\circ, 2^\circ$ 和 3° 的变截面柱, 表 2 中给出了给定载荷 p 时的临界载荷 q_{0cr} , 经检验这些数据都近似满足直线(21) •

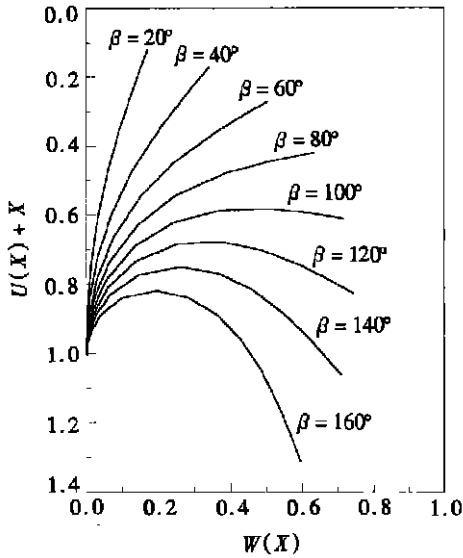


图 3 $\alpha = 1^\circ, p = 1$ 时立柱过屈曲位形

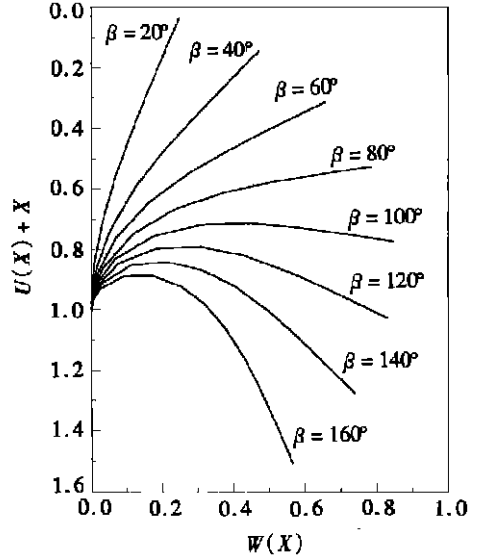


图 4 $\alpha = 0^\circ, p = 0$ 时立柱过屈曲位形

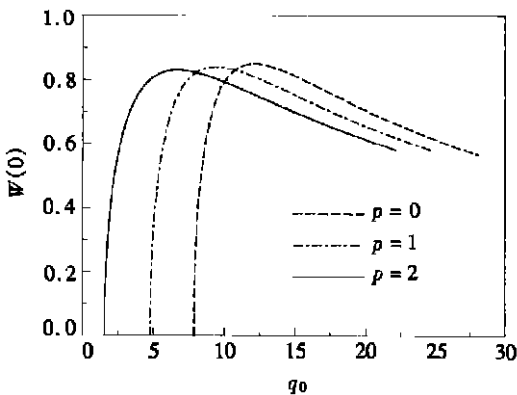


图 5 $\alpha = 0^\circ$ 时立柱过屈曲平衡路径

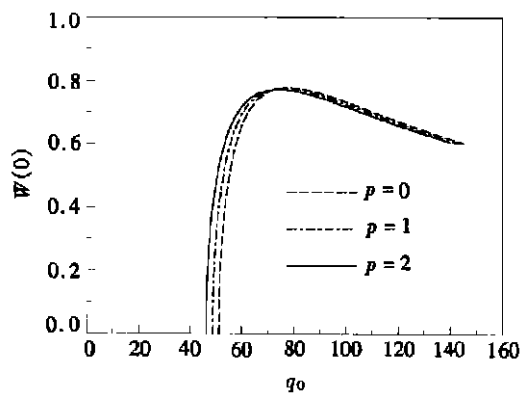


图 6 $\alpha = 1^\circ$ 时立柱过屈曲平衡路径

然后, 采用解析延拓法^[10~14]得到了后屈曲状态解 • 表 3 列出了只作用端部集中力的等截面立柱在 β 取不同值时的自由端载荷参数 p 和变形参数 $(1 - U(0))$ 及 $W(0)$ • 为了比较, 表中还列出不可伸长杆的数值结果以及文献[7]的结果 • 显然在轴线不可伸长时 ($R = 1$) 本文数值结

果与已有结果吻合较好,而且轴线伸长对于细长柱的变形影响很小。在给定截面变化参数 $\alpha = 1^\circ$ 和轴向集中荷载为 $p = 1$ 时,图 3 中绘出了对应于不同杆端转角 β 的屈曲位形 $((X + U(X), W(X)))$ 曲线。在图 4 中绘出了等截面立柱 ($\alpha = 0^\circ$) 只在轴向分布荷载 q 作用 ($p = 0$) 时对应于不同 β 值的过屈曲位形曲线。显然由于截面的变化和轴向集中荷载的作用对杆件的变形有较大的影响。

图 5 和图 6 中,分别给出 $\alpha = 0^\circ$ 和 $\alpha = 1^\circ$ 时杆的过屈曲平衡路径曲线 $q_0 - W(0)$ 。由此可见,随着 α 值的增加,柱的刚度显著增加。另外,随集中力 p 的增加,屈曲载荷 q_0 逐步减少。

4 结 论

采用可伸长杆的非线性理论,推导出了一端固定另一端自由,受自由端轴向集中荷载和沿轴线的分布荷载共同作用下的变截面杆的后屈曲控制方程。采用打靶法和解析延拓法获得了问题的数值解。其中引入弧长 $x(x)$ 作为基本未知量后,不但精确的计算了杆的轴线伸长,同时也使控制方程的求解区域仍保持为杆的原始长度。文中可伸长梁(杆)大变形数学模型及其数值求解方法不仅具有一定的理论意义,而且对一些柔性和超柔性材料结构的分析和计算具有实际应用价值。

[参 考 文 献]

- [1] Euler L. De Curvis Elasticis, Methodus Invenien di Lineas Maximi Minimive Proprietate Ganudentes [M]. Lausanne & Geneva, 1744.
- [2] Lagrange J L. Qeuvres de Lagrange [M]. Vol 2. Paris: Gauthier_Villars, 1868, 125—170.
- [3] Love A E H. Treaties on the Mathematical Theory of Elasticity [M]. New York: Dever, 1927.
- [4] Timoshenko S P, Gere J M. Theory of Elastic Stability [M]. 2nd Ed. New York MacGraw_Hill, 1961.
- [5] Wang C Y. Post_buckling of a clamped_slightly supported elastica [J]. International Journal of Non_Linear Mechanics, 1997, 32(6): 1115—1122.
- [6] Plaut R H, Suherman S, Dillard D A, et al. Deflections and buckling of a bent elastics in contact with a flat surface [J]. International Journal of Solids and Structures, 1999, 36(8): 1209—1229.
- [7] Lee K. Post_buckling of uniform cantilever column under a combined load [J]. International Journal of Non_Linear Mechanics, 2001, 36(5): 813—816.
- [8] 程昌钧,朱正佑. 结构的分叉与屈曲 [M]. 兰州: 兰州大学出版社, 1991.
- [9] 朱正佑,程昌钧. 分支问题的数值计算方法 [M]. 兰州: 兰州大学出版社, 1989.
- [10] 李世荣,李中明. 压杆过屈曲分析中轴线无伸长假设的定量讨论 [J]. 兰州大学学报(自然科学版), 1997, 33(4): 42—46.
- [11] 李世荣,杨静宁. 固支_简支变截面杆的过屈曲模型及其数值解 [J]. 计算力学学报, 2000, 17(1): 114—118.
- [12] 李世荣,程昌钧. 加热弹性杆热屈曲分析 [J]. 应用数学和力学, 2000, 21(2): 119—125.
- [13] 李世荣. 非对称支承弹性杆的热过屈曲 [J]. 工程力学, 2000, 17(5): 115—120.
- [14] LI Shi_rong, ZHOU You_he, ZHENG Xiao_jing. Thermal post_buckling of a heated elastic rod with pinned_fixed ends [J]. Journal of Thermal Stresses, 2002, 25(1): 45—56.
- [15] Coffin D W, Bloom F. Elastica solution for the hygrothermal buckling of a beam [J]. International Journal of Non_Linear Mechanics, 1999, 34(5): 935—947.
- [16] Filipich C P, Rosales M B. A further study on the post_buckling of extensible elastic rods [J]. Inter-

national Journal of Non_Linear Mechanics, 2000, 35(5):997—1022.

- [17] William H P, Brain P F, Sao A T, et al. Numerical Recipes —the Art of Scientific Computing[M]. London: Cambridge University Press, 1986.

Post_Buckling of a Cantilever Rod with Variable Cross_Sections Under Combined Load

WU Ying, LI Shi_rong, TENG Zhao_chun

(School of Sciences, Lanzhou University of Technology,
Lanzhou 730050, P. R. China)

Abstract: Based on the geometrically non_linear theory of axially extensible elastic rods, the governing equations of post_buckling of a damped_free rod with variable cross_sections, subjected to a combined load, a concentrated axial load P at the free end and a non_uniformly distributed axial load q , are established. By using shooting method, the strong nonlinear boundary value problems are numerically solved. The secondary equilibrium paths and the post_buckling configurations of the rod with linearly varied cross_sections are presented.

Key words: rod with variable cross_section; axial extensibility; post_buckling; shooting method; numerical solution