应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2003) 07_0755_09

弹性力学求解体系的研究*

罗建辉, 刘光栋, 尚守平

(湖南大学 土木工程学院, 长沙 410082)

(龙驭球推荐)

摘要: 证明了弹性力学求解体系的微分形式与积分形式的等价关系, 建立了统一求解体系构架。新体系包括微分形式、积分形式及混合形式。 利用微分形式与积分形式的等价关系, 导出了各种变分原理。 提出了广义虚功方程和广义虚函数的概念。

关 键 词: 弹性力学; 变分原理; 虚功方程
中图分类号: O176; O343 文献标识码: A

引 言

传统的弹性力学求解通常遵循两种不同的思路[1~12]。 一种是从微分方程出发, 基于点的求解方法。 另一种是从能量原理出发, 基于整体的求解方法。 文中证明了弹性力学求解体系的微分形式与积分形式的等价关系, 建立了统一求解体系构架。 在新体系中, 可以微分形式或积分形式独立出现, 也可以二者的混合形式出现。 文中揭示了一系列的对偶关系。 对于文[13]由哈密顿体系导出的弹性力学求解新体系, 本文用微分形式导出了对偶微分方程组, 用混合形式导出了相应的变分原理。

1 微分形式与积分形式及二者的等价关系

1.1 弹性力学求解的微分形式

1.1.1 基本方程(在域 V 内)

1) 平衡方程

$$\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}, \tag{1}$$

2) 几何方程

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{\Delta}. \tag{2}$$

3) 物理方程

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial U_0}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \qquad (U_0(\boldsymbol{\varepsilon})\ \text{为应变能比能}). \tag{3}$$

式中, 位移 $\boldsymbol{\Delta} = [u \quad v \quad w]^{\mathrm{T}}$, 应力 $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx} \quad \tau_{xy}]^{\mathrm{T}}$, 应变 $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx} \quad \gamma_{xy}]^{\mathrm{T}}$, 体力 $\boldsymbol{f} = [X \quad Y \quad Z]^{\mathrm{T}}$, 对偶微分算子矩阵 $\boldsymbol{L}$

* 收稿日期: 2001_09_17; 修订日期: 2003_03_28
作者简介: 罗建辉(1957—), 男, 湖南人, 副教授, 博士(E_mail: yabberli@china.com)。

$$\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}.$$

1.1.2　边界条件(在边界 S 上, $S = S_u + S_\sigma$)

1) 位移边界(在 S_u 上)

$$\Delta - \Delta = \mathbf{0}, \tag{4}$$

2) 应力边界(在 S_σ 上)

$$\boldsymbol{T}\sigma - \boldsymbol{F}_0 = \mathbf{0}, \tag{5}$$

式中,给定的位移 $\Delta = [u \quad v \quad w]^{\mathrm{T}}$,给定的面力 $\boldsymbol{F}_0 = [X_0 \quad Y_0 \quad Z_0]^{\mathrm{T}}$,方向余弦矩阵 $\boldsymbol{T}$

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} l & 0 & 0 & 0 & n & m \\ 0 & m & 0 & n & 0 & l \\ 0 & 0 & n & m & l & 0 \end{bmatrix}.$$

1.2　弹性力学求解的积分形式

1.2.1　基本方程

1) 平衡方程

$$\iiint_V \Delta^{*T}(\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\sigma + \boldsymbol{f})\,\mathrm{d}V = \mathbf{0}, \tag{6}$$

2) 几何方程

$$\iiint_V \sigma^{*T}(\varepsilon - \boldsymbol{L}\Delta)\,\mathrm{d}V = \mathbf{0}, \tag{7}$$

3) 物理方程

$$\iiint_V \varepsilon^{*T}\left(\sigma - \frac{\partial \boldsymbol{U}_0}{\partial \varepsilon}\right)\mathrm{d}V = \mathbf{0}, \tag{8}$$

1.2.2　边界条件

1) 位移边界

$$\iint_{S_u} (\Delta - \Delta)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\sigma^*\,\mathrm{d}S = \mathbf{0}, \tag{9}$$

2) 应力边界

$$\iint_{S_\sigma} \Delta^{*\mathrm{T}}(\boldsymbol{F}_0 - \boldsymbol{T}\sigma)\,\mathrm{d}S = 0, \tag{10}$$

Δ^*、σ^*、ε^* 是任意函数向量,具有与 Δ、σ、ε 对应的相同量纲.

1.3　微分形式与积分形式的等价关系

(1)~(5)是弹性力学求解的微分形式,(6)~(10)是弹性力学求解的积分形式. 可以证明(1)~(5)与(6)~(10)的对应表达式是等价的.

显然,若(1)~(5)成立,则(6)~(10)成立.

若(6)~(10)成立,则(1)~(5)成立. 用反证法证明.

不失一般性,以(6)为例. 若(1)在域内的某一子域不成立,即 $\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\sigma + \boldsymbol{f} \neq \mathbf{0}$,可以找到适当的函数 Δ^* 使得(6)不成立,矛盾. 所以(1)成立.

求解体系的一般的形式是混合形式. 由于(1)~(5)与(6)~(10)的等价性,两种形式其对

应项任取其一均可• 微分形式与积分形式可以视为混合形式的特例•

2 虚功方程

2.1 广义虚功方程

对于积分形式(6)～(10)，其积分式的量纲是功的量纲• 所以(6)～(10)也可称之广义虚功方程• Δ^*、σ^*、ε^* 可分别为广义虚位移、广义虚应力、广义虚应变，其具有任意性、虚拟性•

广义虚功方程可以使用组合表达式• (6)～(10)能用其中几个表达式组成一个新的组合表达式，组合表达式与原来的几个表达式等价• 例如，由(6)～(10)得

$$\iiint_V \Delta^{*\mathrm{T}}(\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\sigma + \boldsymbol{f})\,\mathrm{d}V + \iiint_V \sigma^{*\mathrm{T}}(\varepsilon - \boldsymbol{L}\Delta)\,\mathrm{d}V + \iiint_V \varepsilon^{*\mathrm{T}}\left(\sigma - \frac{\partial \boldsymbol{U}_0}{\partial \varepsilon}\right)\mathrm{d}V + \iint_{S_u}(\Delta - \Delta)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\sigma^*\,\mathrm{d}S + \iint_{S_\sigma}\Delta^{*\mathrm{T}}(\boldsymbol{F}_0 - \boldsymbol{T}\sigma)\,\mathrm{d}S = \mathbf{0} \tag{11}$$

显然，若(6)～(10)成立，则(11)成立• 若(11)成立，第一步可知(6)、(7)、(8)三式成立• 由于广义虚函数的任意性，对(11)前三项中某一项积分式而言，取其他4项积分式中广义虚函数为零，则可以得到(6)～(8)中的某一对应式• 第二步，可知(9)、(10)也成立• 所以，(1)～(5)、(6)～(10)、(11)之间相互等价•

混合形式中的积分形式部分，即在(6)～(10)中的选项还可根据需要使用组合表达式• 利用组合表达式，可以推导虚功原理和各种变分原理•

2.2 虚功方程

对于受力物体，如果有一组应力 σ 满足平衡方程和应力边界条件，即满足积分形式(6)和(10)• 而另一组位移 Δ^* 和应变 ε^* 满足几何方程(2)和位移边界条件(4)，即

$$\varepsilon^* = \boldsymbol{L}\Delta^* \qquad (\text{在域 } V \text{ 内}), \tag{12}$$

$$\Delta^* - \Delta = \mathbf{0} \qquad (\text{在 } S_u \text{ 上}) \tag{13}$$

由(6)和(10)得组合式

$$\iint_{S_u}\Delta^{*\mathrm{T}}(\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\sigma + \boldsymbol{f})\,\mathrm{d}V + \iint_{S_\sigma}\Delta^{*\mathrm{T}}(\boldsymbol{F}_0 - \boldsymbol{T}\sigma)\,\mathrm{d}S = 0 \tag{14}$$

根据 Gauss 公式，可以导出

$$\iiint_V \Delta^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\sigma\,\mathrm{d}V = -\iiint_V \sigma^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}\Delta^*\,\mathrm{d}V + \iint_S \Delta^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\sigma\,\mathrm{d}S \tag{15}$$

利用(15)，(14)化为

$$\iiint_V \sigma^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}\Delta^*\,\mathrm{d}V = \iiint_S \Delta^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\sigma\,\mathrm{d}S + \iint_S \Delta^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{f}\,\mathrm{d}V + \iint_{S_\sigma}\Delta^{*\mathrm{T}}(\boldsymbol{F}_0 - \boldsymbol{T}\sigma)\,\mathrm{d}S \tag{16}$$

将(12)、(13)代入上式得

$$\iiint_V \sigma^{\mathrm{T}}\varepsilon^*\,\mathrm{d}V = \iiint_V \Delta^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{f}\,\mathrm{d}V + \iint_{S_\sigma}\Delta^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_0\,\mathrm{d}S + \iint_{S_u}\Delta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\sigma\,\mathrm{d}S \tag{17}$$

由(17)能够证明对应于虚位移原理和虚应力原理的虚功方程•

2.2.1 虚位移原理

设有一组 Δ^{**}、ε^{**} 也满足(17)，即

$$\iiint_V \sigma^{\mathrm{T}}\varepsilon^{**}\,\mathrm{d}V = \iiint_V \Delta^{**\mathrm{T}}\boldsymbol{f}\,\mathrm{d}V + \iint_{S_\sigma}\Delta^{**\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_0\,\mathrm{d}S + \iint_{S_u}\Delta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\sigma\,\mathrm{d}S \tag{18}$$

引入变分

$$\delta\varepsilon^{*}=\varepsilon^{**}-\varepsilon^{*},\ \delta\Delta^{*}=\Delta^{**}-\Delta^{*}\cdot \tag{19}$$

(18)减(17)得相应的虚功方程

$$\iiint_V \sigma^{\mathrm{T}}\delta\varepsilon^{*}\,\mathrm{d}V=\iiint_V \delta\Delta^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{f}\,\mathrm{d}V+\iint_{S_\sigma}\delta\Delta^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_0\mathrm{d}S\cdot \tag{20}$$

2.2.2 虚应力原理

设有一组 $\sigma^{\#}$ 也满足(17),即

$$\iiint_V \sigma^{\#\mathrm{T}}\varepsilon^{*}\,\mathrm{d}V=\iiint_V \Delta^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{f}\,\mathrm{d}V+\iint_{S_\sigma}\Delta^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_0\mathrm{d}S+\iint_{S_u}\Delta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\sigma^{\#}\,\mathrm{d}S\cdot \tag{21}$$

引入变分

$$\delta\sigma=\sigma^{\#}-\sigma\cdot \tag{22}$$

(21)减(17)得相应的虚功方程

$$\iiint_V \delta\sigma^{\mathrm{T}}\varepsilon^{*}\,\mathrm{d}V=\iint_{S_u}\Delta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\delta\sigma\mathrm{d}S\cdot \tag{23}$$

两组虚功方程均可由(17)导出• (17)揭示了虚位移原理的虚功方程与虚应力原理的虚功方程之间的对偶性•

3 变分原理的建立

3.1 广义变分原理

由(11)并利用(15)得

$$\iiint_V\left[\varepsilon^{*\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{U}_0}{\partial\varepsilon}-\sigma^{*\mathrm{T}}(\varepsilon-\boldsymbol{L}\Delta)-\sigma^{\mathrm{T}}(\varepsilon^{*}-\boldsymbol{L}\Delta^{*})-\Delta^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{f}\right]\mathrm{d}V-$$
$$\iint_{S_\sigma}\Delta^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_0\mathrm{d}S+\iint_{S_u}\Delta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\sigma^{*}\,\mathrm{d}S-\iint_{S_u}(\Delta^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\sigma+\Delta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\sigma^{*})\mathrm{d}S=\mathbf{0}, \tag{24}$$

真实解 Δ、σ、ε 也满足上式,即

$$\iiint_V\left[\varepsilon^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{U}_0}{\partial\varepsilon}-\sigma^{\mathrm{T}}(\varepsilon-\boldsymbol{L}\Delta)-\sigma^{T}(\varepsilon-\boldsymbol{L}\Delta)-\Delta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}\right]\mathrm{d}V-$$
$$\iint_{S_\sigma}\Delta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_0\mathrm{d}S+\iint_{S_u}\Delta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\sigma\mathrm{d}S-\iint_{S_u}(\Delta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\sigma+\Delta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\sigma)\mathrm{d}S=\mathbf{0}, \tag{25}$$

引入变分

$$\delta\Delta=\Delta^{*}-\Delta,\ \delta\sigma=\sigma^{*}-\sigma,\ \delta\varepsilon=\varepsilon^{*}-\varepsilon\cdot \tag{26}$$

(24)减(25)得

$$\iiint_V\left[\delta\varepsilon^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{U}_0}{\partial\varepsilon}-\delta\sigma^{\mathrm{T}}(\varepsilon-\boldsymbol{L}\Delta)-\sigma^{T}(\delta\varepsilon-\boldsymbol{L}\delta\Delta)-\delta\Delta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}\right]\mathrm{d}V-$$
$$\iint_{S_\sigma}\delta\Delta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_0\mathrm{d}S+\iint_{S_u}\Delta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\delta\sigma\mathrm{d}S-\iint_{S_u}(\delta\Delta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\sigma+\Delta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\delta\sigma)\mathrm{d}S=\mathbf{0}, \tag{27}$$

由(27)得广义变分原理的表达式

$$\delta\Pi=0, \tag{28}$$

$$\Pi=\iiint_V\left[\boldsymbol{U}_0(\varepsilon)-\sigma^{\mathrm{T}}(\varepsilon-\boldsymbol{L}\Delta)-\Delta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}\right]\mathrm{d}V-\iint_{S_\sigma}\Delta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_0\mathrm{d}S-\iint_{S_u}(\Delta-\Delta)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\sigma\mathrm{d}S\cdot \tag{29}$$

(28)和(29)与微分形式(1)~(5)和积分形式(6)~(10)以及组合表达式(11)等价•

同理,由(11)和(15)得(24)的对偶形式

$$\iiint_V\left(\sigma^{*\mathrm{T}}\varepsilon+\sigma^{\mathrm{T}}\varepsilon^{*}-\varepsilon^{*\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{U}_0}{\partial \varepsilon}+\Delta^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\sigma+\Delta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\sigma^{*}+\Delta^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{f}\right)\mathrm{d}V-$$
$$\iint_{S_u}\Delta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\sigma^{*}\,\mathrm{d}S-\iint_{S_\sigma}(\Delta^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\sigma+\Delta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\sigma^{*}-\Delta^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_0)\,\mathrm{d}S=0. \tag{30}$$

对上式进行变分运算,得广义变分原理另一种形式的泛函表达式,即(29)的对偶形式

$$\Pi=\iiint_V\left[\sigma^{\mathrm{T}}\varepsilon-\boldsymbol{U}_0(\varepsilon)+\Delta^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\sigma+\boldsymbol{f})\right]\mathrm{d}V-$$
$$\iint_{S_u}\Delta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\sigma\,\mathrm{d}S-\iint_{S_\sigma}\Delta^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{T}\sigma-\boldsymbol{F}_0)\,\mathrm{d}S. \tag{31}$$

3.2 2类变量变分原理

若已满足(3),则由(11)得

$$\iiint_V\Delta^{*\mathrm{T}}(\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\sigma+\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}V+\iiint_V\sigma^{*\mathrm{T}}(\varepsilon-\boldsymbol{L}\Delta)\,\mathrm{d}V+\iint_{S_u}(\Delta-\Delta)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\sigma^{*}\,\mathrm{d}S+$$
$$\iint_{S_\sigma}\Delta^{*\mathrm{T}}(\boldsymbol{F}_0-\boldsymbol{T}\sigma)\,\mathrm{d}S=\boldsymbol{0}. \tag{32}$$

利用(15),由上式得

$$\iiint_V(\sigma^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}\Delta^{*}+\sigma^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{L}\Delta-\sigma^{*\mathrm{T}}\varepsilon-\Delta^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}V-$$
$$\iint_{S_\sigma}\Delta^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_0\mathrm{d}S+\iint_{S_u}\Delta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\sigma^{*}\,\mathrm{d}S-\iint_{S_u}(\Delta^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\sigma+\Delta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\sigma^{*})\,\mathrm{d}S=\boldsymbol{0}. \tag{33}$$

(33)和(3)构成了以 Δ、σ 或 Δ、ε 为基本变量的求解混合体系.

引入应变余能比能 $\boldsymbol{U}_0(\sigma)$,则(3)为

$$\varepsilon=\frac{\partial \boldsymbol{U}_0}{\partial \sigma}\qquad(\boldsymbol{U}_0(\sigma)=\sigma^{\mathrm{T}}\varepsilon-\boldsymbol{U}_0(\varepsilon)). \tag{34}$$

以(34)代入(33),消去 ε 得

$$\iiint_V\left(\sigma^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}\Delta^{*}+\sigma^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{L}\Delta-\sigma^{*\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{U}_0}{\partial \sigma}-\Delta^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{f}\right)\mathrm{d}V-$$
$$\iint_{S_\sigma}\Delta^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_0\mathrm{d}S+\iint_{S_u}\Delta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\sigma^{*}\,\mathrm{d}S-\iint_{S_u}(\Delta^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\sigma+\Delta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\sigma^{*})\,\mathrm{d}S=0. \tag{35}$$

对上式进行变分运算,得2类变量变分原理的泛函表达式为

$$\Pi=\iiint_V(\sigma^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}\Delta-\boldsymbol{U}_0(\sigma)-\Delta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}V-\iint_{S_\sigma}\Delta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_0\mathrm{d}S-\iint_{S_u}(\Delta-\Delta)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\sigma\mathrm{d}S. \tag{36}$$

同理,(36)的对偶形式为

$$\Pi=\iiint_V\left[\boldsymbol{U}_0(\sigma)+\Delta^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\sigma+\boldsymbol{f})\right]\mathrm{d}V-\iint_{S_u}\Delta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\sigma\mathrm{d}S-\iint_{S_\sigma}\Delta^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{T}\sigma-\boldsymbol{F}_0)\,\mathrm{d}S.$$

3.3 单变量变分原理

3.3.1 最小势能原理

若已满足(2)、(3)、(4),应有

$$\iiint_V\Delta^{*\mathrm{T}}(\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\sigma+\boldsymbol{f})\,\mathrm{d}V+\iint_{S_\sigma}\Delta^{*\mathrm{T}}(\boldsymbol{F}_0-\boldsymbol{T}\sigma)\,\mathrm{d}S=\boldsymbol{0}. \tag{37}$$

对于(37),利用(15)、(2)、(4),推导所得结果与(17)相同. 这是一个意料之中的结果.

利用(3),由(17)得

$$\iiint_V\left(\varepsilon^{*\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{U}_0}{\partial \varepsilon}-\Delta^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{f}\right)\mathrm{d}V-\iint_{S_\sigma}\Delta^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_0\mathrm{d}S-\iint_{S_u}\Delta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\sigma\mathrm{d}S=0. \tag{38}$$

(38)和(2)、(3)、(4)构成了以 Δ 为基本变量的求解混合体系. 对(38)进行变分运算,得最小势能原理的泛函表达式如下

$$\Pi=\iiint_V(\boldsymbol{U}_0-\Delta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f})\mathrm{d}V-\iint_{S_\sigma}\Delta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_0\mathrm{d}S. \tag{39}$$

3.3.2 最小余能原理

若已满足(1)、(3)、(5),应有

$$\iiint_V\sigma^{*\mathrm{T}}(\varepsilon-\boldsymbol{L}\Delta)\mathrm{d}V+\iint_{S_u}(\Delta-\Delta)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\sigma^*\mathrm{d}S=0. \tag{40}$$

对于(40),利用(15)、(1)、(5),得

$$\iiint_V\sigma^{*\mathrm{T}}\varepsilon\mathrm{d}V=\iiint_V\Delta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}\mathrm{d}V+\iint_{S_\sigma}\Delta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_0\mathrm{d}S+\iint_{S_u}\Delta^{\mathrm{T}}\sigma^*\mathrm{d}S. \tag{41}$$

上式与(17)相同,只是$()^*$ 与() 互换而已. 这体现了最小势能原理与最小余能原理的对偶性.

利用(34), 由(41)得

$$\iiint_V\left(\sigma^{*\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{U}_0}{\partial \sigma}-\Delta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}\right)\mathrm{d}V-\iint_{S_\sigma}\Delta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_0\mathrm{d}S-\iint_{S_u}\Delta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\sigma^*\mathrm{d}S=\boldsymbol{0}. \tag{42}$$

(42)和(1)、(34)、(5)构成了以 σ 为基本变量的求解混合体系. 对上式进行变分运算,得最小余能原理的泛函表达式如下

$$\Pi=\iiint_V\boldsymbol{U}_0\mathrm{d}V-\iint_{S_u}\Delta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\sigma\mathrm{d}S. \tag{43}$$

3.4 弹性力学求解新体系下的变分原理

文[13~15]将哈密顿体系理论引入到弹性力学求解之中,建立了弹性力学求解新体系,在弹性力学领域展现了一个与传统求解方法相平行的工作平台,取得了一系列的成果[13~22]. 文[13]由哈密顿体系导出了有关的变分原理及对应的对偶微分方程组. 利用文[13]提出的对偶向量,在本文理论体系的框架下,用微分形式导出了对偶微分方程组,用混合形式导出了相应的变分原理.

3.4.1 微分形式

定义

$$\sigma_n=[\tau_{zx}\quad\tau_{yz}\quad\sigma_z]^{\mathrm{T}},\quad\sigma_t=[\sigma_x\quad\sigma_y\quad\tau_{xy}]^{\mathrm{T}}, \tag{44}$$

$$\varepsilon_n=[\gamma_{zx}\quad\gamma_{yz}\quad\varepsilon_z]^{\mathrm{T}},\quad\varepsilon_t=[\varepsilon_x\quad\varepsilon_y\quad\gamma_{xy}]^{\mathrm{T}}. \tag{45}$$

由(1)~(3)得

1) 平衡方程

$$\dot{\sigma}_n+\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{T}}\sigma_n+\boldsymbol{E}_1^{\mathrm{T}}\sigma_t+\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0},\quad\dot{\sigma}_n=\frac{\partial\sigma_n}{\partial z}. \tag{46}$$

2) 几何方程

$$\varepsilon_n=\dot{\Delta}+\boldsymbol{E}_2\Delta,\quad\varepsilon_t=\boldsymbol{E}_1\Delta. \tag{47}$$

3) 物理方程(线性弹性)

$$\begin{cases}\sigma_n=\boldsymbol{D}_{nn}\varepsilon_n+\boldsymbol{D}_{nt}\varepsilon_t,\ \boldsymbol{D}_{nn}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{D}_{nn},\ \boldsymbol{D}_{tt}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{D}_{tt},\\ \sigma_t=\boldsymbol{D}_{tn}\varepsilon_n+\boldsymbol{D}_{tt}\varepsilon_t,\ \boldsymbol{D}_{nt}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{D}_{tn}.\end{cases} \tag{48}$$

式中

$$\boldsymbol{E}_1=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} & 0\\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_2=\begin{bmatrix}0 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial x}\\ 0 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial y}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}. \tag{49}$$

将(47)代入(48)得

$$\begin{cases}\sigma_n=\boldsymbol{D}_{nn}\dot{\Delta}+(\boldsymbol{D}_{nn}\boldsymbol{E}_2+\boldsymbol{D}_{nt}\boldsymbol{E}_1\Delta),\\ \sigma_t=\boldsymbol{D}_{tn}\dot{\Delta}+(\boldsymbol{D}_{tn}\boldsymbol{E}_2+\boldsymbol{D}_{tt}\boldsymbol{E}_1)\Delta.\end{cases} \tag{50}$$

由(50)的第一式和(46)得对偶微分方程组

$$\dot{\Delta}=\boldsymbol{D}_{nn}^{-1}\sigma_n-(\boldsymbol{E}_2+\boldsymbol{D}_{nn}^{-1}\boldsymbol{D}_{nt}\boldsymbol{E}_1)\Delta, \tag{51}$$

$$\dot{\sigma}_n=-(\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{E}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{tn}\boldsymbol{D}_{nn}^{-1})\sigma_n-\boldsymbol{E}_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}_{tt}-\boldsymbol{D}_{tn}\boldsymbol{D}_{nn}^{-1}\boldsymbol{D}_{nt})\boldsymbol{E}_1\Delta-\boldsymbol{f}. \tag{52}$$

这是一种典型的混合变量求解法, 基本变量为 Δ、σ_n. 导出变量为 σ_t、ε_n、ε_t, 由(47)和(50)的第二式决定, 即

$$\sigma_t=\boldsymbol{D}_{tn}\boldsymbol{D}_{nn}^{-1}\sigma_n+(\boldsymbol{D}_{tt}-\boldsymbol{D}_{tn}\boldsymbol{D}_{nn}^{-1}\boldsymbol{D}_{nt})\boldsymbol{E}_1\Delta. \tag{53}$$

3.4.2 变分原理

由(48)得物理方程的混合形式

$$\begin{cases}\varepsilon_n=\boldsymbol{D}_{nn}^{-1}\sigma_n-\boldsymbol{D}_{nn}^{-1}\boldsymbol{D}_{nt}\varepsilon_t,\\ \sigma_t=\boldsymbol{D}_{tn}\boldsymbol{D}_{nn}^{-1}\sigma_n+(\boldsymbol{D}_{tt}-\boldsymbol{D}_{tn}\boldsymbol{D}_{nn}^{-1}\boldsymbol{D}_{nt})\varepsilon_t.\end{cases} \tag{54}$$

为了和文[13]进行对比, 取 $S_u=0$. 满足平衡方程(1)、应力边界 $(S_\sigma=S)$ 条件(5)和物理方程(54)的第一式以积分形式出现

$$\iiint_V\Delta^{*\mathrm{T}}(\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\sigma+\boldsymbol{f})\mathrm{d}V-\iiint_V\sigma_n^{*\mathrm{T}}(\varepsilon_n-\boldsymbol{D}_{nn}^{-1}\sigma_n+\boldsymbol{D}_{nn}^{-1}\boldsymbol{D}_{nt}\varepsilon_t)\mathrm{d}V+\iint_S\Delta^{*\mathrm{T}}(\boldsymbol{F}_0-\boldsymbol{T}\sigma)\mathrm{d}S=0. \tag{55}$$

以微分形式出现的几何方程(47)、物理方程(54)的第二式与(55)组成了混合形式的求解体系.

由(15), 并利用(2)及 $\sigma^{\mathrm{T}}\varepsilon^*=\sigma_n^{\mathrm{T}}\varepsilon_n^*+\sigma_t^{\mathrm{T}}\varepsilon_t^*$, 得

$$\iiint_V\Delta^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\sigma\mathrm{d}V=-\iiint_V(\sigma_n^{\mathrm{T}}\varepsilon_n^*+\sigma_t^{\mathrm{T}}\varepsilon_t^*)\mathrm{d}V+\iint_S\Delta^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\sigma\mathrm{d}S. \tag{56}$$

由(55), 并利用(56)得

$$\iiint_V(\sigma_n^{\mathrm{T}}\varepsilon_n^*+\sigma_t^{\mathrm{T}}\varepsilon_t^*+\sigma_n^{*\mathrm{T}}\varepsilon_n-\sigma_n^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{nn}^{-1}\sigma_n+\sigma_n^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{nn}^{-1}\boldsymbol{D}_{nt}\varepsilon_t-\Delta^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{f})\mathrm{d}V-\iint_S\Delta^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_0\mathrm{d}S=0. \tag{57}$$

将(54)的第二式和(47)代入(57)得

$$\iiint_V\Big[\sigma_n^{\mathrm{T}}(\dot{\Delta}^*+\boldsymbol{E}_2\Delta^*)+\sigma_n^{*\mathrm{T}}(\dot{\Delta}+\boldsymbol{E}_2\Delta)+(\boldsymbol{E}_1\Delta^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{tn}\boldsymbol{D}_{nn}^{-1}\sigma_n+$$

$$(\boldsymbol{E}_1\Delta)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{tn}\boldsymbol{D}_{nn}^{-1}\sigma_n^*+\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}_1\Delta^*)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}_{tt}-\boldsymbol{D}_{tn}\boldsymbol{D}_{nn}^{-1}\boldsymbol{D}_{nt})(\boldsymbol{E}_1\Delta)+$$

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}_1\Delta)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}_{tt}-\boldsymbol{D}_{tn}\boldsymbol{D}_{nn}^{-1}\boldsymbol{D}_{nt})(\boldsymbol{E}_1\Delta^*)-\frac{1}{2}\sigma_n^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{nn}^{-1}\sigma_n-$$

$$\frac{1}{2}\sigma_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{nn}^{-1}\sigma_n^* - \Delta^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{f}\Big]\mathrm{d}V - \iint_S \Delta^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_0\mathrm{d}S = \mathbf{0}\cdot \tag{58}$$

对上式进行变分运算,得混合变分原理的泛函表达式如下

$$\Pi = \iiint_V \Big[\boldsymbol{U}_0 + \sigma_n^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\varepsilon}_n - \boldsymbol{D}_{nn}^{-1}\sigma_n + \boldsymbol{E}_2\Delta + \boldsymbol{D}_{nn}^{-1}\boldsymbol{D}_{nt}\boldsymbol{E}_1\Delta) - \Delta^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{f}\Big]\mathrm{d}V - \iint_S \Delta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_0\mathrm{d}S, \tag{59}$$

式中

$$\boldsymbol{U}_0 = \frac{1}{2}\sigma_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{nn}^{-1}\sigma_n + \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}_1\Delta)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}_{tt} - \boldsymbol{D}_{tn}\boldsymbol{D}_{nn}^{-1}\boldsymbol{D}_{nt})\boldsymbol{E}_1\Delta\cdot \tag{60}$$

在(59)中,各项积分函数的物理意义明确• U_0 是用 σ_n、ε_t 表示的应变能比能,积分函数的第二项对应于(51),即物理方程(50)的第一式• 下面将证明本文的变分原理泛函表达式与文[13]的变分原理泛函表达式是相同的•

定义

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n(\sigma_n, \Delta) = \boldsymbol{D}_{nn}^{-1}\sigma_n - (\boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{D}_{nn}^{-1}\boldsymbol{D}_{nt}\boldsymbol{E}_1)\Delta\cdot \tag{61}$$

由(60)可得由哈密顿体系[13]导出的变分原理泛函表达式

$$\Pi = \iiint_V \Big[\sigma_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}_n - \Theta(\sigma_n, \Delta) - \Delta^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{f}\Big]\mathrm{d}V - \iint_S \Delta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_0\mathrm{d}S\cdot \tag{62}$$

Θ 为哈密顿密度函数,$\Theta(\sigma_n, \Delta) = \sigma_n^{\mathrm{T}}\Delta(\sigma_n, \Delta) - \boldsymbol{U}_0(\sigma_n, \Delta)\cdot$

4 结束语

就通常的意义而言,微分形式的解是"解析解",积分形式的解是"数值解"• 由积分形式出发,用给定的、合适的函数序列来求近似解,即为加权残数法• 基于点的"解析解"与基于整体的"数值解",在混合形式中同时存在,归于一体• 在新体系中,"解析解"与"半解析解"、"精确解"与"近似解"的界限不再明显•

本文以微分形式为前提,利用微分形式与积分形式的等价关系,在统一的构架下,证明了各种变分原理的成立• 变分原理只是积分形式的一种表现形式而已• 从这个角度上讲,变分原理也可称之为"变分定理"• 文中讨论了积分形式的物理含义,提出了广义虚功方程和广义虚函数的概念• 广义虚函数具有任意性、虚拟性• 变分原理推导中常用的 Lagrange 乘子对应于广义虚函数• 文中的工作具有普遍的意义• 对于杆系理论、板壳理论的求解体系可以开展类似的工作•

[参 考 文 献]

[1] 钱伟长,叶开沅. 弹性力学[M]. 北京: 科学出版社, 1956.

[2] 徐芝纶. 弹性力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1990.

[3] 武际可,王敏中. 弹性力学引论[M]. 北京: 北京大学出版社, 1981.

[4] Timoshenko S P. Theory of Elasticity [M]. (Third Edition). New York: McGraw_Hill, 1970.

[5] 钱伟长. 变分法及有限元[M]. 北京: 科学出版社, 1980.

[6] 胡海昌. 弹性力学中的变分原理[M]. 北京: 科学出版社, 1981.

[7] Zienkiewicz O C. The Finite Element Method [M]. (Third Edition). New York: McGraw_Hill, 1977.

[8] Kyuichiro Washizu. Variational Methods in Elasticity and Plasticity [M]. (Second edition). Pergamon Press, 1975.

[9] 王勖成,邵敏. 有限单元法基本原理与数值方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 1988.
[10] 冯康, 石钟慈. 弹性结构的数学理论[M]. 北京: 科学出版社, 1981.
[11] 龙驭球. 变分原理 有限元 壳体分析[M]. 沈阳: 辽宁科学技术出版社, 1987.
[12] 龙驭球. 有限元法概论[M]. 北京: 人民教育出版社, 1978.
[13] 钟万勰. 弹性力学求解新体系[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1995.
[14] 钟万勰. 条形域平面弹性问题与哈密尔顿体系[J]. 大连理工大学学报, 1991, **31**(4): 373—384.
[15] 钟万勰. 分离变量法与哈密顿体系[J]. 计算结构力学及其应用, 1991, **8**(3): 229—240.
[16] 钟万勰. 互等定理与共轭辛正交关系[J]. 力学学报, 1992, **24**(4): 432—437.
[17] 钟万勰. 哈密尔顿阵本征向量辛正交的物理意义[J]. 大连理工大学学报, 1993, **33**(4): 110—111.
[18] ZHONG Wan_xie, Williams F W. Physical interpretation of the symplectic orthogonality of the eigen-solutions of a Hamiltonian or symplectic matrix[J]. Computers &Structures, 1993, **49**(4): 749—750.
[19] ZHONG Wan_xie, Williams F W. On the direct solution of wave propagation for repetitive structures [J]. J Sound &Vib, 1995, **181**(3): 485—501.
[20] 钟万勰, 徐新生, 张洪武. Hamilton 体系与弹性力学 Saint_Venant 问题[J]. 应用数学和力学, 1996, **17**(9): 781—789.
[21] ZHONG Wan_xie, Williams F W. The eigensolutions of wave propagation for repetitive structures[J]. Structural Engineering and Mechanics, 1993, **1**(1): 47—60.
[22] 钟万勰. 弹性平面扇形域问题及哈密顿体系[J]. 应用数学和力学, 1994, **15**(12): 1057—1066.

Research on a Systematic Methodology for Theory of Elasticity

LUO Jian_hui, LIU Guang_dong, SHANG Shou_ping
(College of Civil Engineering, Hunan University,
Changsha 410082, P.R.China)

Abstract: The equivalence between differential form and integral form of a systematic methodology for theory of elasticity is proved. A uniform framework of the systematic methodology is established. New system includes differential form, integral form and mixed form. All kinds of variational principles are proved by the equivalence between differential form and integral form. The idea for generalized virtual work and virtual function is presented.

Key words: theory of elasticity; variational principle; equation of virtual work