

文章编号: 1000-0887(2003) 06_0559_06

柱状固粒两相边界层流场稳定性研究^{*}

林建忠, 聂德明

(浙江大学 力学系, 流体传动及控制国家重点实验室, 杭州 310027)

(本刊编委林建忠来稿)

摘要: 从运动方程和本构方程出发, 推导得到了含柱状粒子两相流场的修正 Orr-Sommerfeld 方程, 然后在边界层流场中, 采用数值计算方法, 得到了含柱状粒子流场的稳定性中性曲线, 给出了流场失稳的临界雷诺数。结果表明在所述情况下, 柱状粒子对流场起着抑制失稳的作用, 而且抑制的程度随着柱状粒子体积分数和长径比的增加而提高。

关键词: 柱状粒子; 两相流; 边界层; 稳定性
中图分类号: O359 文献标识码: A

引 言

含柱状粒子的两相流场在复合材料成型、纺织、造纸、化工、食品加工等行业有着广泛的应用^[1]。柱状粒子在流场中有多种功能, 如材料的增强、物性的改变、流动的减阻等。Arranaga^[2]的研究说明, 在管道流中柱状粒子的减阻效果能达到 60%。柱状粒子对流场的稳定性同样具有影响, 由于柱状粒子对流场的作用和流场粘性、粒子的大小及惯性等因素有关, 因而它对流场可能产生稳定作用, 也可能促进流场失稳。

在于柱状粒子对流场稳定性影响的研究非常少, Pilipenko 等^[3]的流场可视化实验是其中之一, 文中给出了高 Re 数下具有柱状粒子悬浮物的射流场稳定性的分析结果, 表明柱状粒子增强大尺度的湍流结构, 并通过抑制小尺度的湍流结构来改变整个流场。但边界层流场问题的研究尚未见到报导。

1 模型及基本方程

对二维不可压边界层流场, 应用连续介质理论, 把含有柱状粒子的两相体系作为连续介质处理, 在考虑有柱状粒子存在的情况下, 列出流场的连续性方程和运动方程:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] = - \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}. \quad (2)$$

其中应力张量可以表示为:

* 收稿日期: 2002_02_24; 修订日期: 2003_02_14

基金项目: 国家杰出青年科学基金资助项目(19925210);

作者简介: 林建忠(1958—), 男, 福建建阳人, 教授, 博士, 博士生导师(E-mail: mecjzlin@public.zju.edu.cn)。

$$\tau = \tau + \tau^t = \eta_0 \nabla + \eta_0 \phi (\nabla a_4), \quad (3)$$

τ 是流体自身应力, $\nabla = (\dots u + \dots u^T)$ 为应变张量的变化率, η_0 为流体的粘性系数, τ^t 是柱状粒子对流场产生的应力, ϕ 为柱状粒子的体积分数, 对于柱状粒子为半浓相 ($\phi \ll 1$ 和 $\phi^2 \gg 1$, r 是柱状粒子的长径比) 的情况有^[4]:

$$A = \frac{r^2}{3 \ln \left(\frac{r^2}{\sqrt{2\pi} \phi} \right)}, \quad (4)$$

式中 a_4 如下所述, 流场的本构方程为^[5]:

$$\frac{\partial a_2}{\partial t} + v \cdot \dots a - \dots v \cdot a_2 - a_2 \cdot \dots v = \frac{x-1}{2} (\nabla a_2 + a_2 \cdot \nabla) - x (\nabla a_4) + 2D_r (I - m a_2), \quad (5)$$

其中 a_2, a_4 分别是柱状粒子的二阶、四阶方向张量, $x = (r^2 - 1)/(r^2 + 1)$ 是与柱状粒子长径比 ($r = L/d$, L, d 分别代表柱状粒子的特征长度和直径) 相关的一个物理量, $D_r =$

$Cr \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cdot I$ 为单位张量, 在这里为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, m 是空间自由度, 本文为 2.

2 稳定性方程

以下用小扰动法推导流函数表示的稳定性方程. 将流动分为基本流动和总流动, 分别求解其满足的连续性方程和运动方程.

将边界层流场基本流动的 $U_0(y), V_0(y) = 0$ 和 $\tau_0 = FA\phi/Re = HF (F = \nabla a_4)$, 代入方程(2), 可得到无量纲化的方程:

$$-\frac{\partial P_0}{\partial x} + H \frac{\partial F_{11}^0}{\partial x} + \frac{1}{Re} U_0'' + H \frac{\partial F_{21}^0}{\partial y} = 0, \quad (6)$$

$$-\frac{\partial P_0}{\partial y} + H \frac{\partial F_{12}^0}{\partial x} + H \frac{\partial F_{22}^0}{\partial y} = 0, \quad (7)$$

其中 F 为对称二阶张量.

将瞬时量表示成基本量与扰动量之和:

$$u = U_0 + u', \quad v = V_0 + v', \quad \phi = \phi_0 + \phi(y) e^{ia(x-a)}, \quad F = F^0 + F' \quad (8)$$

将其代入到方程(2)可得:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U_0 \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{dU_0}{dy} = -\frac{\partial(P_0 + p')}{\partial y} + \frac{2}{Re} \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + H \left[\frac{\partial F_{11}^0}{\partial x} + \frac{\partial F_{11}}{\partial x} \right] + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 (U_0 + u')}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial x \partial y} \right] + H \left[\frac{\partial F_{21}^0}{\partial y} + \frac{\partial F_{21}}{\partial y} \right], \quad (9)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + U_0 \frac{\partial v'}{\partial x} = -\frac{\partial(P_0 + p')}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 u'}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} \right] + H \left[\frac{\partial F_{12}^0}{\partial x} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x} \right] + \frac{2}{Re} \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} + H \left[\frac{\partial F_{22}^0}{\partial y} + \frac{\partial F_{22}}{\partial y} \right]. \quad (10)$$

将(6)、(7)分别代入(9)、(10), 并将(9)对 y 求导减去(10)对 x 求导得

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial t \partial y} - \frac{\partial^2 v'}{\partial t \partial x} + U_0 \frac{\partial^2 u'}{\partial x \partial y} - U_0 \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + v' \frac{d^2 U_0}{dy^2} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^3 u'}{\partial x^2 \partial y} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^3 v'}{\partial x^3} + H \frac{\partial^2 F_{11}}{\partial x \partial y} - H \frac{\partial^2 F_{12}}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^3 u'}{\partial y^3} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^3 v'}{\partial x \partial y^2} + H \frac{\partial^2 F_{21}}{\partial y^2} - H \frac{\partial^2 F_{22}}{\partial x \partial y}. \quad (11)$$

用流函数表示速度:

$$u' = \frac{d\phi}{dy} e^{i\alpha(x-ct)}, \quad v' = -i\alpha\phi e^{i\alpha(x-ct)},$$

代入(11)可得:

$$i\alpha \left[(U_0 - c)(D^2 - \alpha^2) + \omega'_0 - \frac{1}{Re}(D^2 - \alpha^2)^2 \right] \phi = H \left[(D^2 + \alpha^2)F_{12} + i\alpha D(F_{11} - F_{22}) \right], \quad (12)$$

其中 $\omega'_0 = -\partial^2 U_0 / \partial y^2$, $D = d/dy$. 考虑到 Re 数很大, 所以上式可以化为:

$$i\alpha \left[(U_0 - c)(D^2 - \alpha^2) + \omega'_0 \right] \phi = H \left[(D^2 + \alpha^2)F_{12} + i\alpha D(F_{11} - F_{22}) \right]. \quad (13)$$

上式即为柱状粒子两相流稳定性方程. 对边界层流场有如下边界条件:

$$y = 0: \quad \phi = 0, \quad \phi' = 0 \quad (\text{壁面无滑移条件、不可渗透条件}), \quad (14)$$

$$y = \delta (\delta \rightarrow \infty): \quad \phi = 0, \quad \phi' = 0 \quad (\text{无穷远处无扰条件}). \quad (15)$$

3 本构方程的化简

柱状粒子与圆球状粒子的主要区别在于具有方向性, 因此可以用二阶方向张量 a_2 、四阶张量 a_4 来描述柱状粒子的方向特性, a_2 和 a_4 满足本构方程(5)式. 假设柱状粒子长径比 $r \gg 1$, 所以 $x \approx 1$, 则(5)式可化为:

$$\frac{\partial a_2}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla a - \nabla \cdot \mathbf{v} a_2 - a_2 \cdot \nabla \mathbf{v} = -(\nabla \cdot a_4) + 2D_r(\mathbf{I} - ma_2). \quad (16)$$

a_4 和 a_2 满足如下关系^[6]:

$$a_{ijkl} = \frac{\det(a_{ij})}{6} (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \frac{1}{3} (a_{ij}a_{kl} + a_{ik}a_{jl} + a_{il}a_{jk}), \quad (17)$$

式中 $\det(a_{ij})$ 表示行列式, δ_{ij} 是 Kronecker 记号.

(16) 式中的 $\nabla \cdot a_4$ 为二阶、四阶张量的内积, 结果是一二阶张量. 令 $S = \nabla \cdot a_4$, 则 S 的 4 个分量为

$$S_{11} = 2 \left[\frac{\det(a_{ij})}{2} + a_{11}^2 \right] \frac{\partial u}{\partial x} + 2a_{11}a_{12} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] + 2 \left[\frac{\det(a_{ij})}{6} + \frac{1}{3}(a_{11}a_{22} + 2a_{12}^2) \right] \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (18)$$

$$S_{21} = 2a_{11}a_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \left[\frac{\det(a_{ij})}{6} + \frac{1}{3}(a_{11}a_{22} + 2a_{12}^2) \right] \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] + 2a_{12}a_{22} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (19)$$

$$S_{12} = S_{21}, \quad (20)$$

$$S_{22} = 2 \left[\frac{\det(a_{ij})}{6} + \frac{1}{3}(a_{11}a_{22} + 2a_{12}^2) \right] \frac{\partial u}{\partial x} + 2a_{12}a_{22} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] + 2 \left[\frac{\det(a_{ij})}{2} + a_{22}^2 \right] \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (21)$$

将基本流动量代入(5)式并展开, 可得:

$$\begin{cases} a_{11}^0 = 1 - \frac{C_I}{2C_I + a_{12}^0}, & a_{22}^0 = \frac{C_I}{2C_I + a_{12}^0}, \\ a_{22}^0 - 4C_I a_{22}^0 = a_{11}^0 a_{22}^0 + (a_{12}^0)^2. \end{cases} \quad (22)$$

由(22)可解得:

$$a_{11}^0 = \frac{2-\theta}{2}, \quad a_{22}^0 = \frac{\theta}{2}, \quad a_{12}^0 = \frac{C_I(1-\theta)}{\theta}, \quad \theta = \frac{4C_I}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1+\frac{1}{4C_I^2}} - 1}.$$

将基本流动加扰动量代入(5)式后展开,并利用(22)可得:

$$C_{11}a_{11} - C_{12}a_{12} = (C_2D^2 + i\alpha C_1D + \alpha^2 C_0)\phi, \quad (23)$$

$$E_{12}a_{12} - E_{11}a_{11} = (E_2D^2 + i\alpha E_1D + \alpha^2 E_0)\phi, \quad (24)$$

$$a_{11} + a_{22} = 0, \quad (25)$$

其中:

$$V_0 = U_0 - c, \quad C_{11} = i\alpha V_0 + 4C_I \dot{U}_0 + 2\dot{U}_0 a_{12}^0, \quad C_{12} = 2(1 - 2a_{11}^0) \dot{U}_0,$$

$$C_2 = (1 - 2a_{11}^0)(2C_I + a_{12}^0) + a_{12}^0, \quad C_I = 2a_{11}^0(1 - a_{11}^0) + 2a_{12}^0,$$

$$C_0 = (1 - 2a_{11}^0)(2C_I + a_{12}^0) - a_{12}^0, \quad E_{11} = -2(1 - 2a_{11}^0) \dot{U}_0,$$

$$E_{12} = i\alpha V_0 + 4C_I \dot{U}_0 + 2\dot{U}_0 a_{12}^0,$$

$$E_2 = -2a_{12}^0(2C_I + a_{12}^0) - (a_{11}^0 a_{12}^0 - (a_{12}^0)^2) + \frac{1}{2} + \frac{1 - 2a_{11}^0}{2},$$

$$E_1 = 2a_{12}^0(1 - 2a_{11}^0),$$

$$E_0 = -2a_{12}^0(2C_I + a_{12}^0) - (a_{11}^0 - (a_{12}^0)^2) + \frac{1}{2} - \frac{1 - 2a_{11}^0}{2}.$$

(13)、(23)、(24)、(25)是柱状粒子两相流边界层稳定性方程,(14)、(15)为边界条件·

4 修正的 Orr_Sommerfeld 方程

由(23)和(24)可解得:

$$a_{11} = (N_2D^2 + i\alpha N_1D + \alpha^2 N_0)\phi, \quad (26)$$

$$a_{12} = (M_2D^2 + i\alpha M_1D + \alpha^2 M_0)\phi, \quad (27)$$

$$a_{22} = -(N_2D^2 + i\alpha N_1D + \alpha^2 N_0)\phi \quad (28)$$

最后得到修正 Orr_Sommerfeld 方程:

$$\sum_{i=0}^4 J_i D^i \phi = 0, \quad (29)$$

$$J_0 = H[\alpha^2 L_0 + i\alpha K_0 + \alpha^4 L_0] + i\alpha^3 V_0 + i\alpha U_0,$$

$$J_1 = H[i\alpha L_1 + \alpha^2(2L_0 - K_1) + i\alpha^3(L_1 + K_0)],$$

$$J_2 = H[i\alpha(2L_1 + K_2) + \alpha^2(L_0 + L_2 - K_1) + L_2] - i\alpha V_0,$$

$$J_3 = H[2L_2 + i\alpha(L_1 + K_2)],$$

$$J_4 = HL_2.$$

5 数值求解及结果分析

将修正的 Orr_Sommerfeld 方程及柱状粒子两相流稳定性方程,用差商的表达式代入,可得到相应的差分方程,然后结合离散的求解区域建立方程组,最后按照相关的求解条件计算求解·

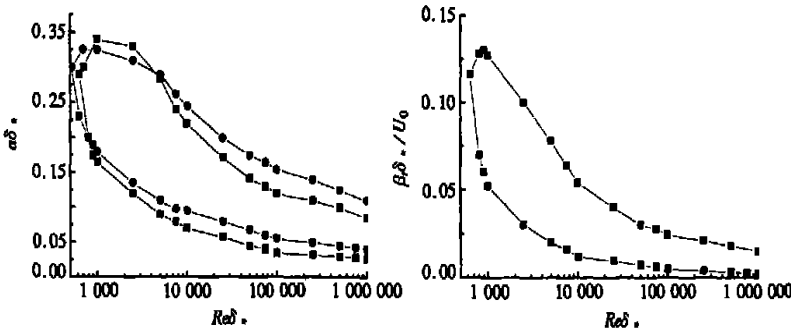
对图 1 的边界层流场,每一给定的流场 $Re \delta^*$, 可以确定计算区域,然后根据布拉修斯速度分布,利用拉格朗日插值公式就可以求出计算区域的速度分布,然后确定具体雷诺数下对应

的扰动波数 α , 由此得到柱状粒子两相流的中性稳定性曲线。图 2 给出了单相流和有柱状粒子 ($H = 0.1$) 时的计算结果, 由图可见, 有柱状粒子的流场临界雷诺数比单相流的临界雷诺数更大, 说明流场更不容易失稳, 粒子对失稳起抑制作用。经计算, 有柱状粒子时 ($H = 0.1$), 临界雷诺数 $Re_{cr}(= U_0 \delta^* / \nu)$ 为 630, 对应的 $\alpha \delta^*$ 为 0.34。图 3 和图 4 分别是中性扰动频率曲线和波幅曲线, 由计算可得到最大 $\beta_1 \delta^* / U_0$ 为 0.1302, 最大 C_r / U_0 为 0.414。

图 5 显示改变柱状粒子参数 H 时, 中性稳定性曲线的变化情况, 可见临界雷诺数随着 H 的增大而增大, 对应的无量纲波数则随 H 的增大而减小。这说明 H 的增加抑制了流场的失稳。根据 H 的定义 $H = A \phi / Re$, A 是粒子长径比 r 的增函数, ϕ 是粒子的体积分数, 因此可以将 H 看作是粒



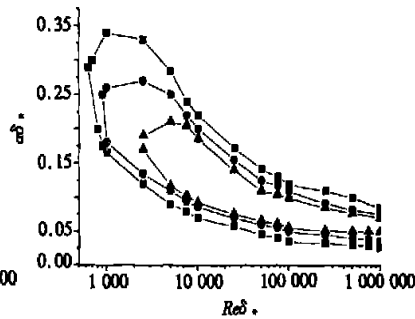
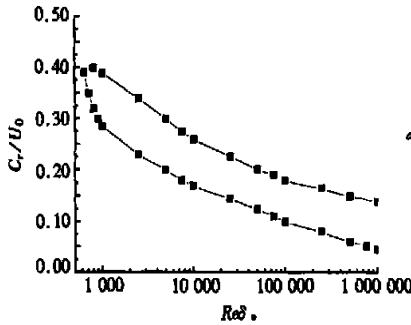
图 1 边界层流场



■: 有柱状粒子 ($H = 0.1$); ●: 无柱状粒子

图 2 稳定性曲线

图 3 中性扰动频率曲线



■: $H = 0.1$; ●: $H = 0.5$; ▲: $H = 2$

图 4 中性扰动波幅曲线

图 5 参数 H 对稳定性的影响

子沿轴向的张力和流体惯性力的比值。在柱状粒子两相流中, 由扰动产生的法向应力起着激励流场失稳的作用, 而流场中粒子的排列不齐引起的剪切力则起着抑制流场失稳的作用。由于在粒子长径比 r 很大的情形下, 剪切力占主要地位, 因此在流场中粒子抑制了其失稳性。而当 r 增大或 ϕ 增大时, 剪切力的影响都会增大, 从而使得粒子对流场的抑制效果更为显著。

6 结 论

在边界层流场中若有半浓相柱状粒子的存在,流场将比单相流的情形更不容易失稳,失稳雷诺数约为 630,可见柱状粒子对流场失稳有抑制作用。对于同样有柱状粒子存在的流场,柱状粒子对流场失稳的抑制效果与粒子的体积分数和长径比成正比,与雷诺数成反比。

[参 考 文 献]

- [1] 林建忠. 纤维悬浮流场特性研究综述[J]. 力学与实践, 2000, 22(6): 11—17.
- [2] Arranaga A B. Friction reduction characteristics of fibrous and colloidal substances[J]. Nature, 1970, 225: 447—449.
- [3] Pilipenko V N, Kalinichenko N M, Lemak A S. Stability of the flow of a fiber suspension in the gap between coaxial cylinders[J]. Sov Phy Dokl, 1981, 26: 646—648.
- [4] Batchelor G K. The stress generated in a non-dilute suspension of elongational particles by pure straining[J]. J Fluid Mech, 1971, 46: 813—829.
- [5] Hinch E J. Mechanical models of dilute polymer solutions in strong flows[J]. Phys Fluids, 1977, 20: 22—30.
- [6] Cintra J S, Tucker C L. Orthotropic closure approximation for flow-induced fiber orientation[J]. J Rheol, 1995, 39: 1095—1122.

Research on the Flow Stability in a Cylindrical Particle Two-Phase Boundary Layer

LIN Jian_zhong, NIE De_ming

(Department of Mechanics, State Key Laboratory of Fluid Power Transmission and Control,
Zhejiang University, Hangzhou 310027, P. R. China)

Abstract: Based on the momentum and constitutive equations, the modified Orr-Sommerfeld equation describing the flow stability in a cylindrical particle two-phase flow was derived. For a cylindrical particle two-phase boundary layer, the neutral stability curves and critical Reynolds number were given with numerical simulation. The results show that the cylindrical particles have a suppression effect on the flow instability, the larger the particle volume fraction and the particle aspect ratio are, the more obvious the suppression effect is.

Key words: cylindrical particle; two-phase flow; boundary layer; stability