

文章编号: 1000-0887(2003) 06-0605-06

# 板弯曲断裂计算的边界配置解法<sup>\*</sup>

王元汉, 伍佑伦, 余 飞

(华中科技大学 土木工程学院, 武汉 430074)

(张佑 推荐)

**摘要:** 采用复变函数理论和边界配置方法, 分析计算了 Kirchhoff 板的弯曲断裂问题。假设了位移及内力的复变函数式, 它们能满足一系列的基本方程和支配条件, 例如域内的平衡方程、裂纹表面的边界条件、裂纹尖端的应力奇异性。这样, 仅板边界的边界条件需要考虑。它们可用边界配置法和最小二乘法近似满足。对不同边界条件和载荷情形进行了分析计算。数值算例表明, 本文方法精度较高, 计算量小, 是一种有效的半解析、半数值计算方法。

**关键词:** Kirchhoff 板; 断裂; 边界配置解法; 复变函数; 应力强度因子

**中图分类号:** O346.1      **文献标识码:** A

## 引 言

板是航空、土木、机械、化工等工程领域常见的结构形式。由于制造、使用等原因, 板中常出现裂纹。为了保证板结构的安全使用, 避免低应力脆断和疲劳破坏, 以及安全设计、合理选材等目的, 必须进行板弯曲问题的断裂分析。

板弯曲断裂问题远比平面断裂问题复杂<sup>[1, 2]</sup>。首先, 板弯曲问题存在不同的分析理论, 例如应用最广泛的 Kirchhoff 经典板理论与考虑了横向剪切变形的 Reissner 板理论。Kirchhoff 板理论在工程中的应用非常广泛, 在该理论上建立的断裂分析方法较为成熟和简单, 但也存在理论缺陷。Reissner 板理论克服了 Kirchhoff 板的理论缺陷, 能够较好地描述裂纹尖端的应力场的性质, 但其微分方程阶数较高, 计算较困难。

另一方面, 板的弯曲断裂分析远没有平面断裂力学成熟。平面断裂分析的原理和方法已经建立, 分析结果已详尽地载入了应力强度因子手册<sup>[3, 4]</sup>。对于板弯曲断裂问题, 求解分析的方法和结果都很少。以 Kirchhoff 板弯曲断裂为例, Sih 等采用积分变换法计算了一些含裂纹的无限大板问题<sup>[5]</sup>。对于有限大板, 通常采用有限元法进行计算<sup>[6-8]</sup>。其主要问题是数据准备工作量大, 而精度往往不能满足要求。

在工程实际中大量遇到的是有限大薄板的弯曲断裂问题。同时, 当板厚趋于零时, Kirchhoff 理论和 Reissner 理论计算的应力强度因子值具有相关性<sup>[2]</sup>。因此, 本文采用 Kirchhoff 板理论对有限大裂纹板进一步进行分析计算。类似平面断裂问题的边界配置解法<sup>[9]</sup>, 本文采用复变函数理论和边界配置法进行弯曲裂纹板的断裂分析。这是一种半解析、半数值计算方法, 适

\* 收稿日期: 2001\_09\_25; 修订日期: 2003\_02\_19

作者简介: 王元汉(1946—), 男, 武汉人, 教授, 博士, 博士生导师 (E-mail: yhwang0062@163.com)。

用于不同的边界条件和载荷情形。

## 1 基本公式

### 1.1 挠度和内力

Kirchhoff 板的挠度可用弹性曲面方程对应的齐次方程的通解和一个特解之和来表示。其通解可以用两个解析函数  $\varphi(z)$  和  $\psi(z)$  表示<sup>[2,10,11]</sup>:

$$w = \operatorname{Re}[z\varphi(z) + \overline{\psi(z)}], \quad (1)$$

式中  $\operatorname{Re}$  表示取函数实部, 上方横线表示取共轭。

根据横向载荷, 可确定板挠度的特解。对于受均布载荷  $q$  的情形, 特解可表示为<sup>[2,12]</sup>:

$$w^* = \frac{q}{64D} z^2 \bar{z}^2, \quad (2)$$

式中  $D$  为板的弯曲刚度, 并且  $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ , 其中  $E$  为弹性模量,  $\nu$  为泊松比。

对于集中力  $P$  作用在  $z_0$  的情形, 特解为<sup>[12]</sup>:

$$w^* = \frac{P}{16\pi D} (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) \ln[(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0)]. \quad (3)$$

在直角坐标系, 由式(1)所表示的挠度通解对应的板的内力公式为<sup>[2]</sup>:

$$\begin{cases} M_x + M_y = -2(1 + \nu)D[\phi'(z) + \overline{\psi'(z)}], \\ M_y - M_x + 2iM_{xy} = -2(1 - \nu)D[z\phi''(z) + \overline{\psi'(z)}], \\ Q_x - iQ_y = -4D\phi''(z). \end{cases} \quad (4)$$

### 1.2 边界条件

以  $s, n$  表示边界切线和法线, 板的边界条件分别为:

1) 简支边

$$w = 0, \quad M_n = 0, \quad (5)$$

式中  $w$  和  $M_n$  表示边界挠度和法向弯矩的指定值, 通常为零。

2) 固支边

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \quad (6)$$

式中  $\alpha$  表示边界法向转角的指定值, 通常为零。

3) 自由边

$$M_n = 0, \quad M_{ns} = 0, \quad Q_n = 0, \quad (7)$$

式中  $M_n, M_{ns}$  和  $Q_n$  表示边界弯矩、扭矩和剪力的指定值。虽然式(7)后面两个式子可归并为一个条件, 但在后面将采用最小二乘法, 因此仍用式(7)所表示的 3 个自由边的边界条件。

### 1.3 应力函数

考察含一条长度为  $2a$  的裂纹板, 取直角坐标系的原点在裂纹中心,  $x$  轴与裂纹重合。设裂纹面无外力作用, 并注意到裂纹尖端处应力的奇异性质, 可以假设应力函数为以下形式:

$$\begin{cases} \int \varphi(z) dz = (z^2 - a^2)^{3/2} \sum_{k=1}^M A_k z^{k-3} + \sum_{k=1}^M B_k z^{k+1}, \\ \int \omega(z) dz = \kappa [(z^2 - a^2)^{3/2} \sum_{k=1}^M A_k z^{k-3} - \sum_{k=1}^M B_k z^{k+1}], \end{cases} \quad (8)$$

式中  $A_k, B_k$  是待定的复常数,  $\kappa = -(3 + \nu)/(1 - \nu)$ , 其中  $\nu$  为材料的泊松比。

对式(8)的两式求导, 可得  $\varphi(z)$  和  $\omega(z)$ 。再求导, 可得  $\Phi(z) = \phi'(z)$ ,  $\Omega(z) = \omega'(z)$ 。以下仅列出  $\Phi(z)$  的表达式:

$$\Phi(z) = \sum_{k=1}^M A_k \left\{ \frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}} z^{k-1} \left[ k - (k-3) \left( \frac{a}{z} \right)^2 \right] + \sqrt{z^2 - a^2} z^{k-3} \left[ k(k-2) - (k-3)(k-4) \left( \frac{a}{z} \right)^2 \right] \right\} + \sum_{k=1}^M B_k k(k+1) z^{k-1}. \quad (9)$$

设:

$$\psi(z) = \omega(z) - z \Phi(z), \quad (10)$$

则有:

$$\int \psi(z) dz = \int \omega(z) dz - z \Phi(z) + \int \varphi(z) dz, \quad (11)$$

$$\Psi(z) = \psi'(z) = \Omega(z) - \Phi(z) - z \phi'(z), \quad (12)$$

则用两个应力函数  $\varphi(z)$ 、 $\psi(z)$  表示的挠度式(1), 及  $\varphi(z)$ 、 $\psi(z)$  的导数表示的内力式(4), 可以用  $\varphi(z)$ 、 $\omega(z)$  及其相应导数  $\Phi(z)$ 、 $\Omega(z)$  来表示。

#### 1.4 应力强度因子

当应力函数中的系数  $A_k$ 、 $B_k$  确定后, 可由式(9) 计算裂纹尖端  $z = \pm a$  处的应力强度因子<sup>[5]</sup>:

$$K_{I} - iK_{II} = - \frac{12 \sqrt{2\pi} D(3 + \nu)}{h^2} \lim_{z \rightarrow \pm a} \left[ \sqrt{(z \mp a)} \Phi(z) \right] = - \frac{36 \sqrt{\pi} D(3 + \nu)}{h^2} \sum_{k=1}^M A_k a^{k-1.5}, \quad (13)$$

式中  $h$  表示板的厚度。

## 2 算 例

### 2.1 对边承受弯矩的中心裂纹板

如图 1 所示, 长、宽为  $2H \times 2W$  的矩形板, 含一条长为  $2a$  的中心裂纹, 对边受弯矩  $M_0$  作用。

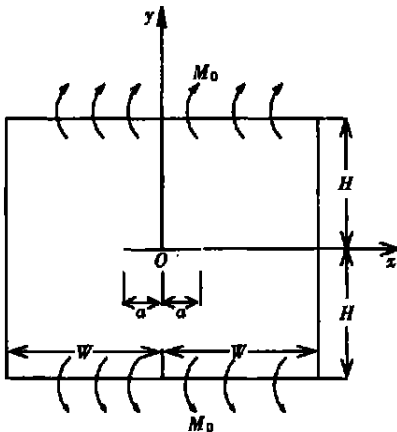


图 1 对边承受弯矩的中心裂纹板

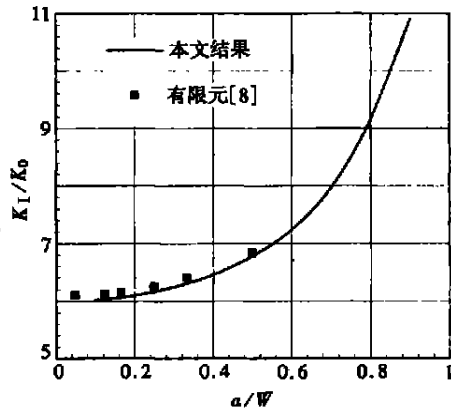


图 2  $K_I/K_0 \sim a/W$  变化曲线

在本例中, 板面无载荷作用, 因此可取位移特解  $w^* = 0$ 。设在板边界共取  $N$  个点, 每点

由式(7) 可得 3 个实系数方程, 共得  $3N$  个方程。

在  $x = \pm W$  的边界点, 有:

$$M_x = 0, M_{xy} = 0, Q_x = 0$$

在  $y = \pm H$  的边界点, 有:

$$M_y = M_0, M_{xy} = 0, Q_y = 0$$

如果应力函数式(8) 中求和项数为  $M$ , 则共有  $4M$  个待定实系数。对于  $N$  个边界点和  $M$  个求和项, 可以得到包含  $4M$  个待定实系数的  $3N$  个边界方程为:

$$[A]_{3N \times 4M} \{X\}_{4M} = \{F\}_{3N}, \quad (14)$$

式中  $[A]_{3N \times 4M}$  由边界点坐标确定,  $\{F\}_{3N}$  由边界条件确定,  $\{X\}_{4M}$  是待求的  $A_k$ 、 $B_k$  的实系数。采用最小二乘法求解式(14), 可确定应力函数  $A_k$ 、 $B_k$ , 则应力强度因子可由式(13) 计算。

作为第一个例子, 考察图 1 所示含中心裂纹的矩形板, 在边界  $y = \pm H$  受弯矩  $M_0$  作用。对于  $W = H$  情形, 选取的计算参数为: 边界点数  $N = 80$ , 求和项数  $M = 20$ 。对于不同裂纹长度比  $a/W$ , 计算的 II 型应力强度因子  $K_{II} = 0$ , I 型无量纲应力强度因子  $K_I/K_0$  (其中  $K_0 = M_0 \sqrt{\pi a/h^2}$ ) 如图 2 所示。  $K_I/K_0$  随着  $a/W$  的增加而增加。当  $a/W$  较大时,  $K_I/K_0$  增加速度逐渐加快。

图 2 中同时列出有限元法计算结果<sup>[8]</sup> 以进行比较。由图可见, 在  $a/W \leq 0.5$  范围, 两种不同方法所得结果符合得很好。特别地, 当  $a/W \rightarrow 0$  时, 即无限大板含中心裂纹情形, Sih 等人无限大板含裂纹的结果为<sup>[5]</sup>  $K_I/K_0 = 6$ 。由图 2 可以见到本文计算曲线的这种趋势。

改变配点个数  $N$  和应力函数项数  $M$ , 计算表明本文方法具有良好的收敛性。

## 2.2 受均布载荷的简支板

如图 3 所示含中心裂纹的简支板, 受均布载荷  $q$  作用, 板的挠度通解和特解如式(1)、(2) 所示。

在  $x = \pm W$ , 边界条件为

$$w + w^* = 0, M_x + M_x^* = 0,$$

式中  $w$  和  $M_x$  为按挠度通解计算的挠度和弯矩,  $w^*$  和  $M_x^*$  为按挠度特解计算的挠度和弯矩。

在  $y = \pm H$ , 边界条件为

$$w + w^* = 0, M_y + M_y^* = 0$$

在板的理论中, 由挠度对  $x$ 、 $y$  求导, 推导出弯矩的公式。本文给出的挠度特解为复变函数, 因此要对  $x$ 、 $y$  的求导变换为对  $z$ 、 $\bar{z}$  的求导<sup>[12]</sup>。

计算中取  $H = W$ , 对应不同裂纹长度比  $a/W$ , 有  $K_{II}/K_0 = 0$ ,  $K_I/K_0$  如图 4 所示。由图可见, 当  $a/W$  开始增加时,  $K_I/K_0$  值缓慢减小; 当  $a/W$  较大 ( $> 0.8$ ), 并进一步增加时,  $K_I/K_0$  将迅速减小直至零。

## 2.3 受均布载荷的固支板

将如图 3 所示受均布载荷的板, 改为四周边固支, 板的挠度通解和特解仍如式(1)、(2) 所示。

在  $x = \pm W$ , 边界条件为

$$w + w^* = 0, \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w^*}{\partial x} = 0$$

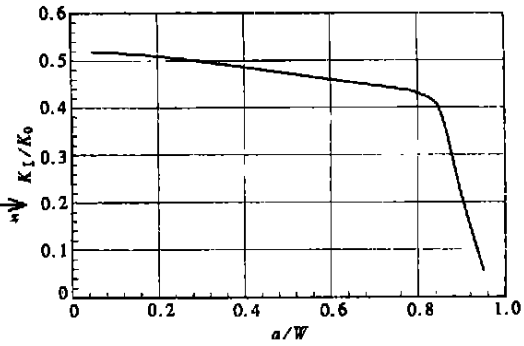
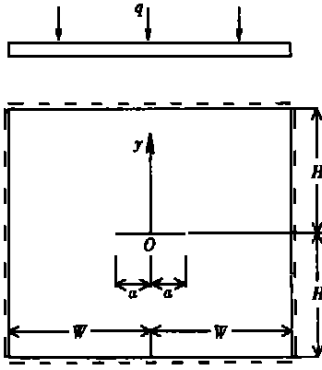


图3 简支的受均布载荷的中心裂纹板 图4 简支板  $K_I/K_0$  随  $a/W$  的变化曲线

在  $y = \pm H$ , 边界条件为

$$w + w^* = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w^*}{\partial y} = 0$$

计算中取  $H = W$ , 对应不同的裂纹长度比  $a/W$ , 都有  $K_{II}/K_0 \equiv 0$ ,  $K_I/K_0$  的变化如图 5 所示。由图可见, 随着  $a/W$  的增加,  $K_I/K_0$  逐渐减小, 其减小速度要比简支板快。当  $a/W = 0.5$  时,  $K_I/K_0$  接近为零。如  $a/W$  继续增大, 计算的  $K_I/K_0$  将为负值。这是由于固定边界的影响, 当裂纹长度较大时, 裂纹尖端不可能张开的缘故。因此, 计算仅适用于  $a/W \leq 0.5$  情形。

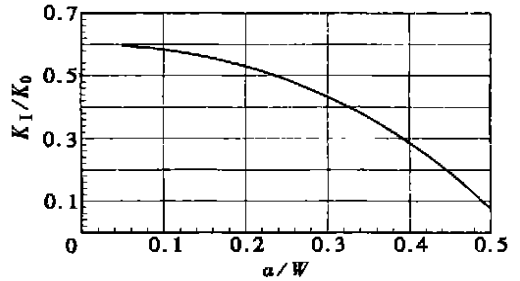


图5 固支板  $K_I/K_0$  随  $a/W$  的变化曲线

### 3 结 论

- 1) 本文根据 Kirchhoff 板的复变函数理论, 构造了计算板挠度和内力的复变函数, 采用边界配置法计算了含裂纹板的应力强度因子。
- 2) 讨论了自由、简支、固支等不同条件下含裂纹板的弯曲特征。本文方法可进一步应用于其他边界形状和边界条件情形。
- 3) 给出了典型算例。对于已有解情形, 本文结果与之相比具有很好的精度。本文方法可用于更一般、更复杂的情形。
- 4) 本文方法计算量小, 精度较高, 是一种有效的半解析、半数值计算方法。

### [参 考 文 献]

- [1] 柳春图, 李英治. 平板弯曲断裂问题的研究进展[J]. 力学进展, 1982, 12(4): 346—359.
- [2] 柳春图, 蒋持平. 板壳断裂力学[M]. 北京: 国防工业出版社, 2000, 1—111.
- [3] 中国航空研究院. 应力强度因子手册(增订版)[M]. 北京: 科学出版社, 2000, 858—913.
- [4] Murakami Y. Stress Intensity Factor Handbook [M]. Vol 2. New York: Pergamon Press, 1987, 1249—1341.
- [5] Sih G C, Paris P C, Erdogan F. Crack tip stress intensity factors for plane extension and plate bending problems[J]. Journal of Applied Mechanics, 1962, 29(2): 306—312.
- [6] Barsoum R S. A degenerate solid element for linear fracture analysis of plate bending and general

- shells[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1976, **10**(3): 551—564.
- [7] Rhee H C, Atluri S N. Hybrid stress finite element analysis of bending of a plate with a through flaw [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1982, **18**(2): 259—271.
- [8] Jiang C P, Cheung Y K. A special bending crack tip finite element[J]. International Journal of Fracture, 1995, **71**(1): 57—69.
- [9] WANG Yuan\_han. The elastic and elasto\_plastic fracture analysis by method of weighted residuals and elasto\_viscoplasticity[D]. Ph D Thesis. Hong Kong: The University of Hong Kong, 1988, 13—200.
- [10] Muskhelishvili N I. Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity [M]. The Netherlands, Leyden: Noordhoff, 1975.
- [11] Savin G N. Stress Concentration Around Holes [M]. Oxford: Pergamon Press, 1961.
- [12] 曲庆璋, 章权, 季求和, 等, 弹性板理论[M]. 北京: 人民交通出版社, 2000, 167—190.

## Fracture Calculation of Bending Plates by Boundary Collocation Method

WANG Yuan\_han, WU You\_lun, YU Fei

(School of Civil Engineering, Huazhong University of Science and Technology,  
Wuhan 430074, P. R. China)

**Abstract:** Fracture of Kirchhoff plates is analyzed by the theory of complex variables and boundary collocation method. The deflections, moments and shearing forces of the plates are assumed to be the functions of complex variables. The functions can satisfy a series of basic equations and governing conditions, such as the equilibrium equations in the domain, the boundary conditions on the crack surfaces and stress singularity at the crack tips. Thus, it is only necessary to consider the boundary conditions on the external boundaries of the plate, which can be approximately satisfied by the collocation method and least square technique.

Different boundary conditions and loading cases of the cracked plates are analyzed and calculated. Compared to other methods, the numerical examples show that the present method has many advantages such as good accuracy and less computer time. This is an effective semi\_analytical and semi\_numerical method.

**Key words:** Kirchhoff plate; fracture; boundary collocation method; complex variables function; stress intensity factors