

文章编号: 1000-0887(2003) 06-0619-05

二维目标声波成像的变分方法^{*}

冯文杰, 邹振祝

(石家庄铁道学院 力学与工程科学系, 石家庄 050043)

(林建忠推荐)

摘要: 研究二维目标声波成像的新方法。首先根据 Green 函数理论导出一个关于波数扰动函数和波场的积分方程组; 然后通过对方程组求变分, 寻求波数扰动函数微小变化和散射场微小变化之间的关系, 得到反演方程; 最后对几个典型目标进行模拟识别, 考察了方法的收敛速度、收敛精度、抗噪性能及对复杂目标的适应能力。识别结果表明, 本文方法对定量无损检测技术具有理论和应用价值。

关键词: 声波; 缺陷识别; 扰动函数; 变分; 复杂目标; 定量无损评估
中图分类号: O354 **文献标识码:** A

引 言

声波成像是一个迅速发展中的热门课题, 在无损检测、医学成像、地震勘探、材料科学等领域都有着广泛的应用前景。经过多年的研究开发, 目前已经提出一些各具特色的成像方法。

1992 年, Moghaddam^[1] 提出了一种二维理想介质柱的时域非线性成像方法。理论上, 该法可反演复杂目标, 但是该法收敛速度较慢, 有时甚至可能不收敛。1994 年, Lin^[2] 探讨了均匀介质柱的重构问题, 该法将体积分方程化为面积分方程, 降低了方法本身对计算机资源的要求, 但该法仅能反演单一的均匀介质柱, 而且收敛速度仍不十分理想。另外, 还有很多其它近似方法^[3~6], 这些方法的共同特点是将逆散射问题转化为优化问题, 从应用的角度来看, 其共同缺点是收敛速度较慢, 有时稳定性也较差。Born 近似方法^[7] 是由 Rose 等人首先提出来的, 本文作者对该方法也进行了一些探讨^[8], 在 Born 近似方法中, 要求介质参数扰动不能超过 20%, 这一弱散射条件大大降低了 Born 近似方法的应用价值。

本文根据 Green 函数理论, 首先得到一个积分方程组, 该方程组将波数的扰动与目标内的总场和接收点上的散射场联系起来。然后通过对方程组求变分, 进一步得到波数扰动函数变化和散射信号变化之间的关系。数值模拟表明, 本文方法大大提高了反演速度和反演精度, 并显著增强了抗随机噪声的能力, 对像空洞、夹杂的识别具有重大理论指导意义和广泛的应用前景。

* 收稿日期: 2001_03_03; 修订日期: 2003_02_19

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19772029); 河北省博士基金资助项目(B2001213)

作者简介: 冯文杰(1967—), 男, 河北泊头人, 教授, 博士(E-mail: fengwj@sjzri.edu.cn)。

1 基本理论

二维无限大背景介质中存在一非均匀散射体, 当一入射波 $\varphi^{\text{in}}(\mathbf{r})$ 照射到散射体上时, 总波场 $\varphi(\mathbf{r})$ 满足如下的控制方程:

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{r}) + k_0^2 [1 - v(\mathbf{r})] = 0, \quad (1)$$

其中, k_0 为背景介质的波数, $v(\mathbf{r})$ 为波数扰动函数.

假设散射体包含在一区域 S 内, 同时将总波场 $\varphi(\mathbf{r})$ 做如下分解:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi^{\text{in}}(\mathbf{r}) + \varphi^{\text{sc}}(\mathbf{r}),$$

其中 $\varphi^{\text{sc}}(\mathbf{r})$ 为散射场, 可从 S 外的表面 M 上提取. 根据 Green 函数理论, 可以得到该问题的积分方程组形式:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi^{\text{in}}(\mathbf{r}) + \frac{ik_0^2}{4} \int_S v(\mathbf{r}') \varphi(\mathbf{r}') H_0^1(k_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d\mathbf{r}', \quad (2)$$

$$\varphi^{\text{sc}}(\mathbf{r}) = \frac{ik_0^2}{4} \int_S v(\mathbf{r}') \varphi(\mathbf{r}') H_0^1(k_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d\mathbf{r}', \quad (3)$$

式中 $H_0^1(\cdot)$ 为零阶第一类 Hankel 函数, 而且, $\varphi(\mathbf{r})$ 和 $v(\mathbf{r})$ 都是未知量.

至此, 给定介质的扰动函数 $v(\mathbf{r})$, 由方程(2)和(3), 采用离散方法可以求得散射体内任一离散点处的弹性总场及散射体外任一点处的散射场.

对式(2)和式(3)两边求变分, 可得下列一组积分方程:

$$\delta \varphi(\mathbf{r}) - \frac{ik_0^2}{4} \int_S [v(\mathbf{r}') \delta \varphi(\mathbf{r}') + \delta v(\mathbf{r}') \varphi(\mathbf{r}')] H_0^1(k_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d\mathbf{r}' = 0, \quad (4)$$

$$\delta \varphi^{\text{sc}}(\mathbf{r}) = \frac{ik_0^2}{4} \int_S [v(\mathbf{r}') \delta \varphi(\mathbf{r}') + \delta v(\mathbf{r}') \varphi(\mathbf{r}')] H_0^1(k_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d\mathbf{r}'. \quad (5)$$

将 S 分为 N 个足够小的子域, 在每个子域 $S_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 内, 波数扰动及波场可视为均匀分布:

$$v(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N v_n b_n(\mathbf{r}), \quad \varphi(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N \varphi_n b_n(\mathbf{r}), \quad \varphi^{\text{in}}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N \varphi_n^{\text{in}} b_n(\mathbf{r}), \quad (6)$$

$$\text{式中 } b_n(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{r} \in S_n, \\ 0 & \mathbf{r} \notin S_n. \end{cases}$$

将式(6)代入式(4)和式(5), 用矩阵表示可得:

$$\mathbf{A} \cdot \delta \mathbf{v} + (\mathbf{C} + \mathbf{B}) \cdot \delta \varphi = 0, \quad (7)$$

$$\mathbf{C} \cdot \delta \mathbf{v} + \mathbf{D} \cdot \delta \varphi = \delta \varphi^{\text{sc}}, \quad (8)$$

$$\text{其中 } (\mathbf{A})_{i,j} = -\frac{ik_0^2}{4} \varphi_j \int_{S_j} H_0^1(k_0 |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'|) d\mathbf{r}' \quad (i, j = 1, 2, \dots, N),$$

$$(\mathbf{B})_{i,j} = -\frac{ik_0^2}{4} v_j \int_{S_j} H_0^1(k_0 |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'|) d\mathbf{r}' \quad (i, j = 1, 2, \dots, N),$$

$$(\mathbf{C})_{i,j} = \frac{ik_0^2}{4} \varphi_j \int_{S_j} H_0^1(k_0 |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'|) d\mathbf{r}' \quad (i = 1, 2, \dots, N_r; j = 1, 2, \dots, N),$$

$$(\mathbf{D})_{i,j} = \frac{ik_0^2}{4} v_j \int_{S_j} H_0^1(k_0 |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'|) d\mathbf{r}' \quad (i = 1, 2, \dots, N_r; j = 1, 2, \dots, N),$$

\mathbf{C} 为 N 阶单位矩阵, N_r 为测量表面上接收点的个数. 由式(7)和式(8), 消去含 $\delta \varphi$ 的项, 得:

$$\delta \varphi^{\text{sc}} = \mathbf{M} \cdot \delta \mathbf{v}, \quad (9)$$

其中 $M = C - D \cdot (\Theta + B)^{-1} \cdot A \cdot$ (10)

根据线性代数知识, 可知方程(9)的解为:

$$\delta v = [\text{Re}(M^+ \cdot M)]^{-1} \cdot [\text{Re}(M^+ \cdot \delta \Phi^{\text{sc}})],$$
 (11)

式中 Re 表示取实部, 上标“+”表示共轭转置。

式(11)只适用于单一入射波的情形, 对于多个入射波, 相应的反演方程应当修正为:

$$\delta v = \left[\text{Re} \left(\sum_{n=1}^{N_f \times N_a} M_n^+ \cdot M_n \right) \right]^{-1} \cdot \left[\text{Re} \left(\sum_{n=1}^{N_f \times N_a} M_n^+ \cdot \delta \Phi_n^{\text{sc}} \right) \right],$$
 (12)

其中 N_f 和 N_a 分别为入射频率及入射角的个数。

迭代开始时, 需要给扰动函数 $v(r)$ 赋初值, 有时, 可依据某些先验知识给出 $v(r)$ 一个较为合理的初始分布, 而在许多情况下则无法给出, 因此, 迭代开始时, 往往假设整个空间为自由空间, 即著名的 Born 近似。

迭代步骤为:

- 1) 给 v 赋初值 $v^0 \equiv 0$, 由方程(2) 计算各离散点处 φ 值;
- 2) 计算系数矩阵 A, B, C, D ;
- 3) 由式(12) 求解 δv , 更新散射体内扰动函数分布: $v^{m+1} = v^m + \delta v$;
- 4) 求解正问题, 更新散射体内总场分布, 计算接收点处的散射场;
- 5) 比较步骤4) 中得到的散射场和真实的散射场。定义

$$F_m(v) = \frac{\|\Phi_{\text{real}}^{\text{sc}} - \Phi_m^{\text{sc}}\|}{\|\Phi_{\text{real}}^{\text{sc}}\|} = \frac{\sqrt{\sum_{n=1}^{N_f \times N_a \times N_r} |(\Phi_{\text{real}}^{\text{sc}})_n - (\Phi_m^{\text{sc}})_n|^2}}{\sqrt{\sum_{n=1}^{N_f \times N_a \times N_r} |(\Phi_{\text{real}}^{\text{sc}})_n|^2}},$$
 (13)

其中, $\Phi_{\text{real}}^{\text{sc}}$ 为真实的散射场, Φ_m^{sc} 为经过 m 次迭代模拟得到的散射场。如果 $F_m(v)$ 小于给定的精度要求, 则停止迭代, 否则转向步骤3), 继续迭代。

2 数值结果

假设 S 为一边长为 a 的正方形区域, 入射/接收点分别均匀分布于半径为 $R (R \gg a)$ 的圆周上, $\Delta\theta = \pi/4, k_0 a = 0.5 \sim 6.0, \Delta k_0 a = 0.5$ 。选择子域个数 $N = 25$ 。精度要求为 $F_m \leq 10^{-3}$ 。误差函数定义为

$$\text{erf}(v) = \max_{1 \leq n \leq N} \left\{ \left| \frac{v^{\text{real}}(\mathbf{r}_n) - v^{\text{cal}}(\mathbf{r}_n)}{v^{\text{real}}(\mathbf{r}_n)} \right| \right\}.$$

首先考察本文方法的收敛性能, 重建 $v(\mathbf{r}) \equiv 1, v(\mathbf{r}) \equiv 3, v(\mathbf{r}) \equiv 10$ 的3个单均质柱。迭代结果时, 3种情况下的迭代次数 m 分别为 4、5、12, 误差函数 $\text{erf}(v)$ 分别为 0.00%、0.00%、0.03%, 图1给出了误差函数 $\text{erf}(v)$ 随迭代次数 m 的变化趋势。显然该法迭代稳定, 收敛迅速, 而且具有很高的反演精度。

下面考察本法反演目标的能力。图2和图3分别列举了非均匀柱和多柱的反演结果。当精度达到要求时, 非均匀柱和多柱迭代次数分别为 3、2, 可见

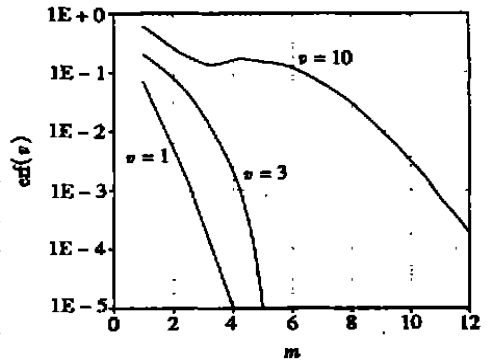


图1 误差函数和迭代次数的关系曲线

反演结果是令人相当满意的。

最后考察本法的抗噪性能,仍以单均质柱作为识别目标,但在模拟得到的散射数据中分别引入幅度为0.1%、0.5%、1%、2%、5%、10%、20%、50%及100%的伪随机噪声,噪声均值为零。表1给出了各种情况下当精度达到要求时的迭代次数及相应的误差函数。表1所示数据表明,本文方法具有很好的抗随机噪声干扰的能力。

表1 抗随机噪声性能

噪声幅度 $f/(%)$	0.1	0.5	1	2	5	10	20	50	100
迭代次数 m	4	4	5	7	9	10	9	12	15
$ef(v) (10^{-2})$	0.000	0.023	0.061	0.168	0.536	1.174	2.762	4.958	10.75

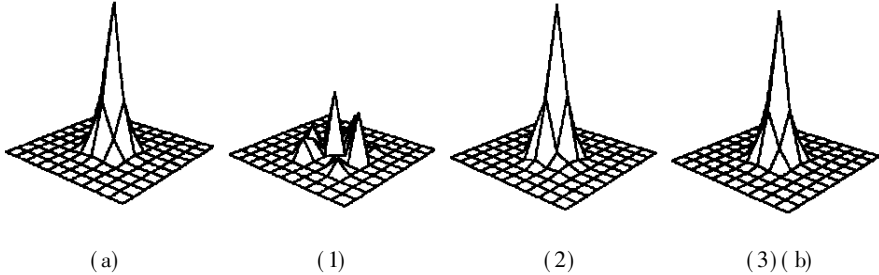


图2 单个非均质柱的重构结果(括号中的数字表示相应的迭代次数)

图(a)为正演模型;图(b)为达到精度要求时的反演结果)

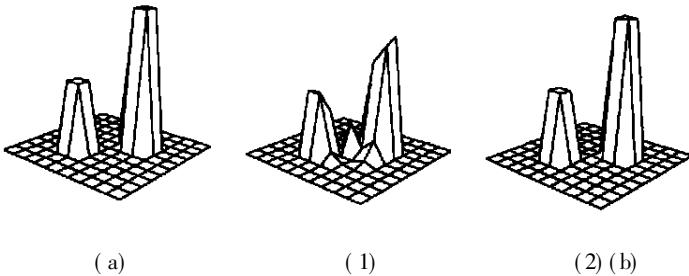


图3 两个均质柱的重构结果(括号中的数字表示相应的迭代次数)

图(a)为正演模型;图(b)为达到精度要求时的反演结果)

3 讨论与结论

由式(13)易得

$$\mathbf{g}_m(v) = \nabla F_m(v) = \frac{2\text{Re}\left\{ \left[\nabla (\varphi_m^{\text{sc}})^+ \right] \cdot \varphi_m^{\text{sc}} - \left[\nabla (\varphi_m^{\text{sc}})^+ \right] \cdot \varphi_{\text{real}}^{\text{sc}} \right\}}{\|\varphi_{\text{real}}^{\text{sc}}\|^2} \quad (14)$$

利用 $\delta \varphi^{\text{sc}} = \mathbf{M} \cdot \delta v$, 即 $\nabla \varphi^{\text{sc}} = \mathbf{M}$, 可得:

$$\mathbf{g}_m(v) = \nabla F_m(v) = -\frac{2\text{Re}\left\{ \mathbf{M}^+ \cdot \delta \varphi^{\text{sc}} \right\}}{\|\varphi_{\text{real}}^{\text{sc}}\|^2} \quad (15)$$

显然, $\mathbf{P}_m = -\mathbf{g}_m$ 为 $F_m(v)$ 的最速下降方向。由式(11)、(15)容易知道, δv 为 \mathbf{P}_m 的线性组合, 这意味着本文迭代过程是沿着 $F_m(v)$ 的最速下降方向进行的, 这正是本文方法能迅速收敛的主要原因。另外, 在推导反演方程时, 采用了变分方法, 反演方程反映的是散射场微小变化与扰动函数微小变化之间的关系, 这可能与物理实质更加接近, 因而能更准确地反演出目标的真实情况。

总之,本文提出了一种声波反演的新方法,该方法具有如下特点:1) 反演精度高;2) 收敛速度快,而且稳定;3) 抗噪性能强。该方法对定量无损检测具有广泛的应用前景。

[参 考 文 献]

- [1] Moghaddam M. Nonlinear two dimensional velocity profile inversion using time domain data[J]. IEEE Trans Geosci Remote Sens, 1992, 30(1): 197—156.
- [2] Lin H T. Microwave imaging for a dielectric cylinder[J]. IEEE Trans Micro Theory Tech, 1994, 42(8): 1572—1579.
- [3] Tobocman W. Application of wavelet analysis to inverse scattering: II [J]. Inverse Problem, 1996, 12(4): 499—516.
- [4] Scotti T. Shape reconstruction of impenetrable scattering body via the Rayleigh hypothesis[J]. Inverse Problem, 1996, 12(6): 1027—1055.
- [5] Kress R. Integral equation methods in inverse obstacle scattering[J]. Engineering Analysis With Boundary Elements, 1995, 15(2): 171—179.
- [6] Safaeinili A, Roberts R A. Support minimized inversion of incomplete acoustic scattering data[J]. J Acoust Soc Am, 1995, 97(1): 414—424.
- [7] Rose J H. Elastic wave inverse scattering in nondestructive evaluation[J]. Pure Appl Geophys, 1989, 131(4): 715—739.
- [8] 冯文杰, 马兴瑞, 邹振祝. 缺陷识别中的逆 Born 近似方法[J]. 振动工程学报, 1994, 7(2): 161—171.

A Variation Method for Acoustic Wave Imaging of Two Dimensional Targets

FENG Wen_jie, ZOU Zhen_zhu

(Department of Mechanics and Engineering Science, Shijiazhuang Railway Institute, Shijiazhuang 050043, P. R. China)

Abstract: A new way of acoustic wave imaging was investigated. By using the Green function theory a system of integral equations, which linked wave number perturbation function with wave field, was firstly deduced. By taking variation on these integral equations an inversion equation, which reflected the relation between the little variation of wave number perturbation function and that of scattering field, was further obtained. Finally, the perturbation functions of some identical targets were reconstructed, and some properties of the novel method including converging speed, inversion accuracy and the abilities to resist random noise and identify complex targets were discussed. Results of numerical simulation show that the method based on the variation principle has great theoretical and applicable value to quantitative nondestructive evaluation.

Key words: acoustic wave; flaw identification; perturbation function; variation; complex target; quantitative nondestructive evaluation