应用数学和力学,第 24 卷 第 6 期(2003 年 6 月) 应用数学和力学编委会编
Applied Mathematics and Mechanics 重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2003) 06_0653_08

垂直线性互补问题的一步全局线性和局部二次收敛光滑 Newton 法*

张立平[1], 高自友[2]

(1. 清华大学 数学科学系, 北京 100084;
2. 北方交通大学 交通运输学院, 北京 100044)

(张石生推荐)

摘要: 基于凝聚函数, 提出一个求解垂直线性互补问题的光滑 Newton 法• 该算法具有以下优点: (i) 每次迭代仅需解一个线性系统和实施一次线性搜索; (ii) 算法对垂直分块 P_0 矩阵的线性互补问题有定义且迭代序列的每个聚点都是它的解• 而且, 对垂直分块 P_0+R_0 矩阵的线性互补问题, 算法产生的迭代序列有界且其任一聚点都是它的解; (iii) 在无严格互补条件下证得算法即具有全局线性收敛性又具有局部二次收敛性• 许多已存在的求解此问题的光滑 Newton 法都不具有性质(iii)•

关 键 词: 垂直线性互补; 光滑 Newton 法; 全局线性收敛; 局部二次收敛
中图分类号: O177.91 文献标识码: A

引 言

令 $\boldsymbol{N} \in R^{m_0 \times n}$ $(m_0 \geqslant n)$ 是一个$(m_1, \cdots, m_n)$ 型垂直分块矩阵, $\boldsymbol{q} \in R^{m_0}$ 是一个与 $\boldsymbol{N}$ 有相应分块的常向量, 即

$$\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{N}^1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{N}^n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}^1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{q}^n \end{pmatrix}, \quad m_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i,$$

其中 $\boldsymbol{N}^i \in R^{m_i \times n}$, $\boldsymbol{q}^i \in R^{m_i}$, $i \in \mathbf{I} = \{1, \cdots, n\}$• 考虑垂直线性互补问题 VLCP$(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{q})$, 求 $\boldsymbol{x} \in R^n$ 使得

$$\boldsymbol{x} \geqslant 0, \quad \boldsymbol{s}^i(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{N}^i\boldsymbol{x} + \boldsymbol{q}^i \geqslant 0, \quad x_i \prod_{j=1}^{m_i} s_j^i(\boldsymbol{x}) = 0 \qquad i \in \mathbf{I},$$

这里 x_i, $s_j^i(\boldsymbol{x})$ 分别表示 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个分量和 $s^i(\boldsymbol{x})$ 的第 j 个分量; $\prod_{j=1}^{m} a_j$ 表示 $a_1 \cdot \cdots \cdot a_m$• 显然, 当 $m_i = 1$ $(i \in \mathbf{I})$ 时, VLCP$(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{q})$ 可归结为标准的线性互补问题(见 Cottle, Pang 和 Stone 的著作[1])• 因此垂直线性互补问题是线性互补问题的一种推广, 它最早是由 Cottle 和 Dantzig[2] 提出的, 也称广义线性互补问题• 由于垂直线性互补问题在控制理论[3]、对策理

* 收稿日期: 2002_01_29; 修订日期: 2003_03_15
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10201001); 国家杰出青年基金资助项目(70225005)
作者简介: 张立平(1970—), 女, 山东青岛人, 讲师, 博士(E_mail: malpzhang@sina.com)•

论[4]、Leo tief 输入输出模型[5]、非线性网络[6]等许多领域均有重要应用, 因此对它的研究具有重要意义• 目前一些数值求解方法已被提出(见[7, 8]及其所引文献)• 近年来, 用于求解互补问题和变分不等式等优化问题的光滑化方法, 由于简单且数值效果好, 而得到了许多学者的广泛重视和研究(见[9, 10]及其中的参考文献)• 其中一些光滑化方法已被推广到求解垂直线性互补问题 VLCP $(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{q})$ (见[7, 8])• Pe g 和 Li [7] 基于光滑路径技巧, 利用凝聚函数给出了一个求解垂直分块 P_0+R_0 矩阵 VLCP$(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{q})$ 的非内点连续化算法, 在严格互补条件下得到了全局线性和局部二次收敛性• 近来, Qi, Su 和 Zhou[10] 提出了一类求解非线性互补问题和混合互补问题的一步光滑 Newto 法, 其数值计算令人鼓舞[11], 吸引了许多学者来推广和研究(见[12, 13, 8])• 基于 Qi_Su_Zhou 的算法结构, Qi 和 Liao[8] 利用凝聚函数给出了一个求解 ω_0+R_0 广义垂直线性互补问题的一步光滑 Newto 法, 在无严格互补条件下得到了局部二次收敛性• 然而, 象大多数非内点连续化算法和光滑 Newto 法一样, Pe g_Li 的算法每次迭代需实施两次线性搜索且其局部二次收敛性强依赖于严格互补条件; Qi_Liao 的算法每次迭代仅需解一个线性系统和实施一次线性搜索, 且局部二次收敛性不需要严格互补条件, 但是它得不到全局线性收敛性• 本文基于 Qi_Liao 的算法结构提出一个完全不同于它的求解 VLCP $(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{q})$ 的一步光滑 Newto 法, 该算法具有以下优点: (i) 每次迭代仅需解一个线性系统和实施一次线性搜索; (ii) 算法对垂直分块 P_0 矩阵的 VLCP$(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{q})$ 有定义且迭代序列的每个聚点都是 VLCP$(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{q})$ 的解, 而且, 若 $\boldsymbol{N}$ 是垂直分块 P_0+R_0 矩阵, 则迭代序列有界且任一聚点都是 VLCP$(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{q})$ 的解; (iii) 在无严格互补条件下证得算法既具有全局线性收敛性又具有局次二次收敛性• 注意到许多已有的光滑 Newto 法不具有收敛性质(iii)(见[10, 14, 12, 13, 15, 8])• 从上述的收敛结果不难看出, 我们的算法优于 Pe g_Li 和 Qi_Liao 的算法以及许多已存在的光滑化方法•

1 算法及其收敛性分析

首先给出 $\boldsymbol{N}$ 是垂直分块 P_0 矩阵和垂直分块 R_0 的矩阵的定义(见[7])•

定义 1.1 若矩阵 $\boldsymbol{N} \in R^{n\times n}$ 的第 i 行是从垂直分块矩阵 $\boldsymbol{N}$ 的第 i 块 $\boldsymbol{N}^i$ 中抽取的, 则称 $\boldsymbol{N} \in R^{n\times n}$ 是垂直分块矩阵 $\boldsymbol{N}$ 的代表子矩阵; 若垂直分块矩阵 $\boldsymbol{N}$ 的所有代表子矩阵都是 P_0 矩阵, 则称 $\boldsymbol{N}$ 是垂直分块 P_0 矩阵; 称 $\boldsymbol{N}$ 是垂直分块 R_0 矩阵, 如果

$$\begin{pmatrix} \min\left\{x_1, N_1^1\boldsymbol{x}, \cdots, N_{m_1}^1\boldsymbol{x}\right\} \\ \vdots \\ \min\left\{x_n, N_1^n\boldsymbol{x}, \cdots, N_{m_n}^n\boldsymbol{x}\right\} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{0}•$$

不难看出, 垂直线性互补问题 VLCP$(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{q})$ 等价于非光滑方程

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) := -\begin{pmatrix} \max\left\{-x_1, -s_1^1(\boldsymbol{x}), \cdots, -s_{m_1}^1(\boldsymbol{x})\right\} \\ \vdots \\ \max\left\{-x_n, -s_1^n(\boldsymbol{x}), \cdots, -s_{m_n}^n(\boldsymbol{x})\right\} \end{pmatrix} = \mathbf{0}•$$

我们的算法是基于非光滑方程 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ 的光滑近似方程来给出的, 而其光滑近似方程是利用凝聚函数得到的• 凝聚函数的定义如下(见 Li[16])• 设 $g_i: R^n \rightarrow \mathbf{R}$, $i = 1, \cdots, m$ 是连续可微函数, 定义

$$g(\boldsymbol{x}) := \max\left\{g_1(\boldsymbol{x}), \cdots, g_m(\boldsymbol{x})\right\},$$

则 $g(\boldsymbol{x})$ 在 R^n 上是连续的但几乎处处不可微• 对任意的 $\mu > 0$, $g(\boldsymbol{x})$ 的凝聚函数定义为

$$g(\boldsymbol{x},\mu):=\mu\ln\left(\sum_{j=1}^{m}\exp(g_j(\boldsymbol{x})/\mu)\right),$$

则 $g(\boldsymbol{x},\mu)$ 在 $R^n\times R_{++}$ 上连续可微且 $\lim_{\mu\to 0}g(\boldsymbol{x},\mu)=g(\boldsymbol{x})$. 利用上述的凝聚函数技巧,可以得到下面光滑函数 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\mu)$ 的近似 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})$

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\mu):=-\begin{pmatrix}\mu\ln\left(\exp\left(-\frac{x_1}{\mu}\right)+\sum_{j=1}^{m_1}\exp\left(-\frac{s_j^1(\boldsymbol{x})}{\mu}\right)\right)\\ \vdots\\ \mu\ln\left(\exp\left(-\frac{x_n}{\mu}\right)+\sum_{j=1}^{m_n}\exp\left(-\frac{s_j^n(\boldsymbol{x})}{\mu}\right)\right)\end{pmatrix}. \tag{1}$$

显然, $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\mu)$ 在 $R^n\times R_{++}$ 上连续可微且 $\lim_{\mu\to 0}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\mu)=\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})$. 下面有关 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\mu)$ 的性质也成立(见 Pe g_Li [7]和Qi_Liao[8]).

引理 1.1 (i) 设 $\boldsymbol{N}$ 是一个垂直分块P_0矩阵. 若 $\mu>0$, 则 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\mu)$ 连续可微且矩阵 $\boldsymbol{G}'_x(\boldsymbol{x},\mu)$ 非奇异.

(ii) $-G_i(\boldsymbol{x})\leqslant G_i(\boldsymbol{x},\mu)\leqslant G_i(\boldsymbol{x})+\mu\ln(m_i+1)$, $\forall i\in\mathbf{I}$.

(iii) $\boldsymbol{N}$ 是一个垂直分块R_0矩阵当且仅当$\lim_{\|\boldsymbol{x}\|\to\infty}\|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\|/\|\boldsymbol{x}\|\geqslant C_0$, 其中 $C_0>0$ 为一常数.

(iv) $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\mu)$ 在 $R^n\times\mathbf{R}_+$ 上是一局部 Lipschitz 连续和强半光滑函数(见[8], 定理 3.5).

令 $z:=(\boldsymbol{x},\mu)$. 我们的算法基于以下的光滑方程

$$\boldsymbol{H}(z):=\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},\mu):=\begin{pmatrix}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\mu)\\ \mu\end{pmatrix}=0.$$

众所周知线性函数 μ 是强半光滑的, 因此由引理 1.1(i)和(iv) 可推出

引理 1.2 (i) $\boldsymbol{H}$ 在$R^n\times R_{++}$ 上连续可微且其 Jacobi 为

$$\boldsymbol{H}'(z)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{G}'_x(z) & \boldsymbol{G}'_\mu(z)\\ \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{pmatrix}.$$

若 $\boldsymbol{N}$ 是垂直分块P_0 矩阵, 则 $\boldsymbol{H}'(z)$ 对任意的 $z\in R^n\times R_{++}$ 是非奇异的.

(ii) $\boldsymbol{H}(z)$ 在 $R^n\times\mathbf{R}_+$ 上是一局部 Lipschitz 连续和强半光滑函数.

下面我们给出求解垂直线性互补问题VLCP$(\boldsymbol{N},\boldsymbol{q})$ 的一步光滑 Newto 法.

算法 1.1

步 0 选择 $\delta,\sigma\in(0,1)$. 任取$\boldsymbol{x}^0\in R^n$和 $\mu_0\in R_{++}$. 令$\boldsymbol{z}^0:=(\boldsymbol{x}^0,\mu_0)$, $\sigma_0:=\min\left\{\sigma,\mu_0\right\}$. 选取 $\beta>0$ 使得 $\beta\geqslant\|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{z}^0)\|/\mu_0$. 置 $k:=0$.

步 1 若 $\mu_k=0$, 计算结束. $\boldsymbol{x}^k$ 是VLCP$(\boldsymbol{N},\boldsymbol{q})$ 的解. 否则, 转向步 2.

步 2 求 $\Delta z^k:=(\Delta\boldsymbol{x}^k,\Delta\mu_k)$ 使得

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{z}^k)+\boldsymbol{H}'(\boldsymbol{z}^k)\Delta\boldsymbol{z}^k=\begin{pmatrix}0\\ \sigma_k\mu_k\end{pmatrix}. \tag{2}$$

步 3 求 $\lambda_k=\max\left\{1,\delta,\delta^2,\dots\right\}$ 使得

$$\|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{z}^k+\lambda_k\Delta\boldsymbol{z}^k)\|\leqslant\beta[1-(1-\sigma_k)\lambda_k]\mu_k. \tag{3}$$

步 4 置 $\boldsymbol{z}^{k+1}:=\boldsymbol{z}^k+\lambda_k\Delta\boldsymbol{z}^k$, $k:=k+1$. 转向步 1.

注 1.1 算法 1.1 是基于 Qi_Liao 的算法结构给出的, 它的最大特点是在扰动 Newto 方程(2) 中用 $\sigma_k=$

$\min\left\{\sigma, \mu_k\right\}$ 来代替原来的项(见[8])。这可以保证算法 1.1 既具有全局线性收敛性又具有局部二次收敛性。另外，我们的线性搜索(3)也不同于[7, 8]中的线性搜索。象 Qi_Liao 的算法一样，算法 1.1 每次迭代仅需解一个线性系统(2)和实施一次 Armijo_型线性搜索(3)。

对任意给定的 $\beta > 0$ 和 $\mu > 0$，定义集合

$$\Omega := \left\{(\boldsymbol{x}, \mu) \in R^n \times R^{++} : \|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}, \mu)\| \leqslant \beta\mu\right\}. \tag{4}$$

则由算法 1.1 的步 0 知 $\boldsymbol{z}^0 \in \Omega$。而且，我们有下面的定理

定理 1.1 若 $\boldsymbol{N}$ 是垂直分块 P_0 矩阵，则算法 1.1 有定义且产生无穷序列 $\left\{\boldsymbol{z}^k = (\boldsymbol{x}^k, \mu_k)\right\}$。而且，$0 < \mu_{k+1} < \mu_k \leqslant \mu_0$ 和 $\boldsymbol{z}^k \in \Omega$ 对所有 $k \geqslant 0$ 成立。

证明 若 $\mu_k > 0$，则由引理 1.2(ⅰ)知矩阵 $\boldsymbol{H}'(\boldsymbol{z}^k)$ 非奇异。因此，步 2 在第 k 次迭代有定义。对任意的 $\lambda \in (0, 1]$，定义

$$\Psi(\lambda) := \|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{z}^k + \lambda\Delta\boldsymbol{z}^k)\|. \tag{5}$$

由(2)可推出

$$\Delta\mu_k = -(1 - \sigma_k)\mu_k. \tag{6}$$

故对任意的 $\lambda \in (0, 1]$ 有

$$\mu_k + \lambda\Delta\mu_k = (1 - \lambda)\mu_k + \lambda\sigma_k\mu_k > 0$$

成立。于是引理 1.1(ⅰ)表明 $\boldsymbol{G}(\cdot)$ 在 $\boldsymbol{z}^k$ 附近连续可微。故由(5)和(2)可得

$$\lim_{\lambda \to 0} \Psi'(\lambda) = -\|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{z}^k)\| < 0.$$

因此必存在一常数 $\bar\lambda \in (0, 1]$ 使得

$$\|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{z}^k + \lambda\Delta\boldsymbol{z}^k)\| \leqslant \beta[1 - (1 - \sigma_k)\lambda]\mu_k$$

对所有 $\lambda \in (0, \bar\lambda]$ 成立。这表明步 3 在第 k 次迭代有定义。因此由(6)和步 3～4 的定义可推知 $\lambda_k \in (0, 1]$ 并且

$$\mu_{k+1} = (1 - \lambda_k)\mu_k + \lambda_k\sigma_k\mu_k > 0, \quad \|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{z}^{k+1})\| \leqslant \beta\mu_{k+1}.$$

另一方面，

$$\mu_{k+1} \leqslant [1 - (1 - \sigma)\lambda_k]\mu_k < \mu_k.$$

于是对 k 进行数学归纳法并由 $\boldsymbol{z}^0 \in \Omega$ 及以上的论述可推出定理的结论成立。证毕。 □

定理 1.2 设 $\boldsymbol{N}$ 是垂直分块 P_0 矩阵，$\left\{\boldsymbol{z}^k = (\boldsymbol{x}^k, \mu_k)\right\}$ 是算法 1.1 产生的无穷迭代序列。则 $\left\{\mu_k\right\}$ 和 $\left\{\|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{z}^k)\|\right\}$ 均收敛于 0 并且 $\left\{\boldsymbol{z}^k\right\}$ 的每个聚点都是 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{z}) = 0$ 的解。

证明 由定理 1.1 可知 $\left\{\mu_k\right\}$ 单调下降有下界并且

$$\|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{z}^k)\| = \sqrt{\|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{z}^k)\|^2 + \mu_k^2} \leqslant (\beta + 1)\mu_k, \tag{7}$$

故 $\left\{\mu_k\right\}$ 和 $\left\{\|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{z}^k)\|\right\}$ 必收敛。设 $\boldsymbol{z}^* = (\boldsymbol{x}^*, \mu_*)$ 为 $\left\{\boldsymbol{z}^k = (\boldsymbol{x}^k, \mu_k)\right\}$ 的任一聚点，则必有

$$\lim_{k \to \infty} \mu_k = \mu_* \geqslant 0, \quad \lim_{k \to \infty} \|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{z}^k)\| = \|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{z}^*)\|.$$

若 $\mu_* > 0$，则由(6)及 $\sigma_k \leqslant \sigma$ 可推出

$$\mu_{k+1} = [1 - (1 - \sigma_k)\lambda_k]\mu_k \leqslant [1 - (1 - \sigma)\lambda_k]\mu_k. \tag{8}$$

因为 $0 < \sigma < 1$，在(8)中令 $k \to \infty$ 可得

$$\lim_{k \to \infty} \lambda_k = 0.$$

不失一般性，设 $\left\{\boldsymbol{z}^k\right\}$ 收敛于 $\boldsymbol{z}^*$。令 $\tau_k = \lambda_k/\delta$，于是由步 3 可推出

$$\|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{z}^k + \tau_k\Delta\boldsymbol{z}^k)\| > [1 - (1 - \sigma_k)\tau_k]\beta\mu_k. \tag{9}$$

在(9)中令 $k \to \infty$ 可得

$$\|G(z^*)\| \geqslant \beta\mu_* > 0. \tag{10}$$

另外, 由(9)和 $\beta\mu_k \geqslant \|G(z^k)\|$ 可推出

$$[\|G(z^k + \tau_k \Delta z^k)\| - \|G(z^k)\|] / \tau_k > -(1-\sigma_k)\|G(z^k)\|,$$

由此及(10)表明

$$(G(z^*)/\|G(z^*)\|)^{\mathrm{T}} G'(z^*)\Delta z^* \geqslant -(1-\sigma_*)\|G(z^*)\|, \tag{11}$$

这里 $\sigma_* = \min\{\sigma, \mu_*\} > 0$. 另一方面, 由(2)可得

$$(G(z^*))^{\mathrm{T}} G'(z^*)\Delta z^* = -\|G(z^*)\|^2. \tag{12}$$

根据(11)和(12)可得

$$-\|G(z^*)\| \geqslant -(1-\sigma_*)\|G(z^*)\|,$$

这表明 $\sigma_* \leqslant 0$, 矛盾. 故必有 $\mu_* = 0$. 从而由(7)可知 $H(z^*) = 0$. 定理成立. □

注 1.2 定理 1.2 表明 $\{z^k\}$ 的每个聚点都是 $H(z) = 0$ 的解并且其相应的 x_部分就是垂直线性互补问题 VLCP(N, q) 的解. 那么在何条件下 $\{z^k\}$ 存在聚点?下面的定理给出 $\{z^k\}$ 存在聚点的一个条件.

定理 1.3 设 N 是垂直分块 $P_0 + R_0$ 矩阵, $\{z^k = (x^k, \mu_k)\}$ 是算法 1.1 产生的无穷迭代序列. 则 $\{z^k\}$ 有界且其每个聚点都是 $H(z) = 0$ 的解.

证明 用反证法. 设 $\|z^k\| \to \infty (k \to \infty)$. 于是由定理 1.1 可知必有

$$\|x^k\| \to \infty \quad (k \to \infty). \tag{13}$$

因为 N 是垂直分块 R_0 矩阵, 根据引理 1.1(iii) 可知当 k 充分大时必有

$$\|G(x^k)\| \leqslant \frac{C_0}{2}\|x^k\|. \tag{14}$$

根据引理 1.1(ii), 我们有

$$\|G(x^k, \mu_k) - G(x^k)\| \leqslant \sqrt{n}\mu_k l(m) \leqslant \sqrt{n}\mu_0 l(m), \tag{15}$$

其中 $m = \max\{m_i : i \in \mathrm{I}\} + 1$. 因此由定理 1.1, (14) 和 (15) 可推出当 k 充分大时必有

$$\begin{aligned}
\frac{C_0}{2}\|x^k\| &\leqslant \|G(x^k)\| \leqslant \\
&\|G(x^k, \mu_k) - G(x^k)\| + \|G(x^k, \mu_k)\| \leqslant \\
&\sqrt{n}\mu_0 l(m) + \beta\mu_k \leqslant \sqrt{n}\mu_0 l(m) + \beta\mu_0,
\end{aligned}$$

这与(13)矛盾. 故 $\{z^k\}$ 有界. 再根据定理 1.2 可知 $\{z^k\}$ 必有聚点且其每个聚点都是 $H(z) = 0$ 的解. 证毕. □

2 全局线性和局部二次收敛

这节讨论算法 1.1 的收敛速度. 设 N 是垂直分块 P_0 矩阵, $z^* = (x^*, \mu_*)$ 是算法 1.1 产生的迭代序列 $\{z^k = (x^k, \mu_k)\}$ 的一个聚点. 则由定理 1.2 知 $H(z^*) = 0$ 且 x^* 是 VLCP(N, q) 的解. 为了建立算法 1.1 的收敛速度, 我们假设 x^* 满足非奇异性条件, 即每个矩阵 $V \in \partial H(z^*)$ 是非奇异的. 应当指出非奇异性条件成立不能表明严格互补条件成立(见[10]).

定理 2.1 设 N 是垂直分块 P_0 矩阵, $z^* = (x^*, \mu_*)$ 是算法 1.1 产生的迭代序列 $\{z^k = (x^k, \mu_k)\}$ 的一个聚点. 若每个矩阵 $V \in \partial H(z^*)$ 是非奇异的, 则

(i) 对所有使得 z^k 充分靠近 z^* 的 k 成立 $\lambda_k \equiv 1$;

(ii) $\{z^k\}$ 全局收敛于 z^* 并且 $\{\mu_k\}$ 局部二次收敛于 0, 即 $\mu_{k+1} = O((\mu_k)^2)$;

(iii) $\{z^k\}$ 局部二次收敛于 z^*;

(iv) $\{\mu_k\}$ 全局 Q_线性收敛于 0·

证明　由定理 1.2 知 $\boldsymbol{H}(z^*) = 0$ 且 $\boldsymbol{x}^*$ 是 VLCP$(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{q})$ 的解· 因为每个矩阵 $\boldsymbol{V} \in \partial\boldsymbol{H}(z^*)$ 是非奇异的, 故由([17], 命题3.1) 知对所有使得 z^k 充分靠近 z^* 的 k 成立

$$\|\boldsymbol{H}'(z^k)^{-1}\| = O(1)\cdot \tag{16}$$

根据引理 1.2(ii), $\boldsymbol{H}(\cdot)$ 是强半光滑的, 故对所有使得 z^k 充分靠近 z^* 的 k 成立

$$\|\boldsymbol{H}(z^k) - \boldsymbol{H}(z^*) - \boldsymbol{H}'(z^k)(z^k - z^*)\| = O(\|z^k - z^*\|^2)\cdot \tag{17}$$

另一方面, 引理 1.2(ii) 表明 $\boldsymbol{H}(\cdot)$ 在 z^* 附近是 Lipschitz 连续的, 因此当 z^k 充分靠近 z^* 时有

$$\|\boldsymbol{H}(z^k)\| = O(\|z^k - z^*\|)\cdot \tag{18}$$

于是由(18) 及 $\mu_k \leqslant \|\boldsymbol{H}(z^k)\|$ 可推出

$$\sigma_k\mu_k = O((\mu_k)^2) = O(\|\boldsymbol{H}(z^k)\|^2) = O(\|z^k - z^*\|^2)\cdot \tag{19}$$

因此, 根据(16)、(17) 和(19) 可得

$$\begin{aligned}&\|z^k + \Delta z^k - z^*\| \leqslant \\ &\quad \|\boldsymbol{H}'(z^k)^{-1}\|[\|\boldsymbol{H}(z^k) - \boldsymbol{H}(z^*) - \boldsymbol{H}'(z^k)(z^k - z^*)\| + \sigma_k\mu_k] = \\ &\quad O(\|z^k - z^*\|^2)\cdot\end{aligned} \tag{20}$$

根据([18], 定理 3.1) 可知对所有使得 z^k 充分靠近 z^* 的 k 成立

$$\|z^k - z^*\| = O(\|\boldsymbol{H}(z^k) - \boldsymbol{H}(z^*)\|)\cdot \tag{21}$$

由引理 1.2(ii) 知 $\boldsymbol{H}(\cdot)$ 是 Lipschitz 连续的, 故由(21) 可推出所有使得 z^k 充分靠近 z^* 的 k 成立

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{G}(z^k + \Delta z^k)\| \leqslant \|\boldsymbol{H}(z^k + \Delta z^k)\| = O(\|z^k + \Delta z^k - z^*\|) = \\ &\quad O(\|z^k - z^*\|^2) = O(\|\boldsymbol{H}(z^k) - \boldsymbol{H}(z^*)\|^2) = \\ &\quad O(\|\boldsymbol{H}(z^k)\|^2)\cdot\end{aligned} \tag{22}$$

因为 $\lim_{k\to\infty}\|\boldsymbol{H}(z^k)\| = 0$, 根据

$$\|\boldsymbol{H}(z^k)\| = \max\{\|\boldsymbol{G}(z^k)\|, \mu_k\} \leqslant \max\{\beta\mu_k, \mu_k\}$$

和(22) 可推知对所有使得 z^k 充分靠近 z^* 的 k, $\lambda_k = 1$ 能满足(3)· 这表明(i) 成立· 因此对所有使得 z^k 充分靠近 z^* 的 k 成立

$$z^{k+1} = z^k + \Delta z^k,\quad \mu_{k+1} = \sigma_k\mu_k = O(\mu_k^2)\cdot$$

上式与(20) 可证得结论(ii) 和(iii) 成立·

下面来证明(iv)· 根据事实 $\sigma_k \leqslant \sigma$ 和(i) 可知存在正整数 $\bar{k} > 0$ 使得

$$\mu_{k+1} = \sigma_k\mu_k \leqslant \sigma\mu_k \qquad \forall k > \bar{k}\cdot \tag{23}$$

令 $\bar{\lambda} := \min\{\lambda_k \mid k \leqslant \bar{k}\}$, 则 $\bar{\lambda} > 0$ 并且

$$\mu_{k+1} = [1 - (1 - \sigma_k)\lambda_k]\mu_k \leqslant [1 - (1 - \sigma)\bar{\lambda}/2]\mu_k \qquad \forall k \leqslant \bar{k}\cdot \tag{24}$$

置

$$C := \max\{\sigma, [1 - (1 - \sigma)\bar{\lambda}/2]\}\cdot$$

则 $0 < C < 1$ 且由(23) 和(24) 可得

$$\mu_{k+1} \leqslant C\mu_k \qquad \forall k \geqslant 0\cdot$$

因此结论(iv) 成立· 证毕· □

注 2.1 定理 2.1 证得算法 1.1 的收敛结果优于 Che _Xiu 在([19], 定理 3.2)中对单调线性互补问题给出的收敛性分析和 Qi_Liao[8] 对广义垂直线性互补问题给出的算法的收敛性分析•

3 结 论

基于 Qi_Liao[8] 的算法结构并受 Che _Xiu[19] 算法的启发, 我们提出了一个求解垂直线性互补问题的光滑 Newto 法(算法 1.1)• 该算法每次迭代仅需一个线性系统和进行一次线性搜索• 在与[8]同样的假设条件下证得算法既具有全局线性收敛性又具有局部二次收敛性(见定理 2.1)• 然而, Qi_Liao[8] 的算法不具有全局线性收敛性(见定理 2.1(iv))• 另一方面, Che _Xiu[19] 在单调线性互补问题有严格可行点和非奇异性条件下证得他们的算法具有局部超线性和全局线性收敛性• 由此可见算法 1.1 优于 Qi_Liao[8] 和 Che _Xiu[19] 的算法•

[参 考 文 献]

[1] Cottle R W, Pang J S, Stone R W. The Li ear Compleme tarity Problem [M]. Boston: Academic Press, 1992.

[2] Cottle R W, Dantzig G B. A generalization of the linear complementarity problem[J]. Jour al of Combi atorial Theory, 1970, **8**(1): 79—90.

[3] Sun M. Monotonicity of mangsarian' s iterative algorithm for generalized linear complementarity problems[J]. J Math A al Appl, 1989, **144**(2): 474—485.

[4] Gowda M S, Sznajder R. A generalization of the Nash equilibrium theorem on bimatrix games[J]. I - ter at J Game Theory, 1996, **25**(1): 1—12.

[5] Ebiefung A A, Kostreva M M. The generalized Leontief input_output model and its application to the choice of the new technology[J]. A Oper Res, 1993, **44**(1): 161—172.

[6] Fujisawa T, Kuh E S. Piecewise_linear theory of nonlinear networks[J]. SIAM J Appl Math, 1972, **22**(1): 307—328.

[7] Peng J M, Lin Z H. A noninterior continuation method for generalized linear complementarity problems[J]. Math Programmi g, 1999, **86**(2): 533—563.

[8] Qi H, Liao L Z. A smoothing Newton method for extended vertical linear complementarity problems [J]. SIAM J Matrix A al Appl, 1999, **21**(1): 45—66.

[9] Billups S C, Dirkse S P, Ferris M C. A Comparison of algorithms for large_scale mixed complementarity problems[J]. Computatio al Optimizatio a d Applicatio s, 1997, **7**(1): 3—25.

[10] Qi L, Sun D, Zhou G. A new look at smoothing Newton methods for nonlinear complementarity problems and box constrained variational inequality problems[J]. Math Programmi g, 2000, **87**(1): 1—35.

[11] Zhou G, Sun D, Qi L. Numerical experiences for a class of squared smoothing Newton methods for box constrained variational inequality problems[A]. In: Fukushima M, Qi L Eds. Reformulatio _No - smooth, Piecewise Smooth, Semismooth a d Smoothi g Methods [C]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1998, 421—441.

[12] Qi H. A regularized smoothing Newton method for box constrained variational inequality problems with P_0_functions[J]. SIAM Jour al o Optimizatio , 2000, **10**(1): 315—330.

[13] Sun D. A regularization Newton method for solving nonlinear complementarity problems[J]. Applied Mathematics a d Optimizatio , 1999, **35**(1): 315—339.

[14] Chen X, Qi L, Sun D. Global and superlinear convergence of the smoothing Newton method and its application to general box_constrained variational inequalities[J]. Mathematics of Computatio ,

1998, **67**(2): 519—540.

[15] Kanzow C, Pieper H. Jacobian smoothing methods for nonlinear complementarity problems[J]. SIAM Jour al o Optimizatio , 1999, **9**(1): 342—373.

[16] LI X S. An aggregate function method for nonlinear programming[J]. Scie ce i Chi a, Ser A, 1991, **34**(3): 1467—1473.

[17] Qi L, Sun J. A nonsmooth version of Newton's method[J]. Math Programmi g, 1993, **58**(1): 353—367.

[18] Qi L. Convergence analysis of some algorithms for solving nonsmooth equations[J]. Mathematics of Operatio s Research, 1993, **18**(1): 227—244.

[19] Chen B, Xiu N. Superlinear noninterior one_step continuation method for monotone LCP in absence of strict complementarity[J]. Jour al of Optimizatio Theory a d Applicatio s, 2001, **108**(1): 317—332.

Global Linear and Quadratic One_Step Smoothing Newton Method for Vertical Linear Complementarity Problems

ZHANG Li_ping[1], GAO Zi_you[2]

(1. Departme t of Methematical Scie ces, Tsi ghua U iversity, Beiji g 100084, P.R. Chi a;
2. School of Traffic a d Tra sportatio , Norther Jiaoto g U iversity, Beiji g 100044, P.R. Chi a)

Abstract: A one_step smoothing Newton method is proposed for solving the vertical linear complementarity problem based on the so_called aggregation function. The proposed algorithm has the following good features: (i) it solves only one linear system of equations and does only one line search at each iteration; (ii) it is well_defined for the vertical linear complementarity problem with vertical block P_0 matrix and any accumulation point of iteration sequence is its solution. Moreover, the iteration sequence is bounded for the vertical linear complementarity problem with vertical block P_0+R_0 matrix; (iii) it has both global linear and local quadratic convergence without strict complementarity. Many existing smoothing Newton methods do not have the property(iii).

Key words: vertical linear complementarity problems; smoothing Newton method; global linear convergence; quadratic convergence