

文章编号: 1000-0887(2003) 05-0455-06

# 横向非均升温下弹性梁的热过屈曲<sup>\*</sup>

李世荣<sup>1,3</sup>, 程昌钧<sup>2</sup>, 周又和<sup>3</sup>

(1. 甘肃工业大学 理学院, 兰州 730050; 2. 上海大学 力学系, 上海 200072;  
3. 兰州大学 力学系, 兰州 730000)

(我刊编委程昌钧来稿)

**摘要:** 基于轴向可伸长梁的几何非线性理论和打靶法, 研究了两端不可移简支弹性梁在横向非均匀分布升温场作用下的热弹性屈曲响应。着重分析了横向升温变化对热过屈曲变形的影响, 给出了相应的特性曲线。数值结果表明, 由于横向温度改变会产生热弯曲内力, 因此过屈曲平衡路径与有初始变形梁的过屈曲平衡路径相似。

**关键词:** 弹性梁; 横向变温; 热过屈曲; 打靶法; 数值解  
**中图分类号:** O343      **文献标识码:** A

## 引 言

受轴向约束的弹性梁在升温场内要产生轴向压应力, 当这种压力超过一定极限时梁将会发生超出其原始平衡状态的热过屈曲。因此, 杆的热屈曲问题的研究对处于变温环境工作的结构以及某些热敏弹性元件的设计具有十分重要的意义。梁(柱)的热弹性过屈曲变形是由于其轴线方向的热膨胀引起的。因此, 在分析杆这类问题时必须采用可伸长梁的几何非线性理论<sup>[1~9]</sup>。有关可伸长梁(柱)在机械载荷作用下的过屈曲分析可见 Stemple<sup>[1]</sup>(1990)、程昌钧<sup>[2]</sup>(1991)、Antman<sup>[3]</sup>(1995)、李世荣<sup>[4]</sup>(1997)和 Filipich<sup>[5]</sup>(2000)等人的研究工作。Conffin 和 Bloom<sup>[6]</sup>曾用椭圆积分法分析了两端不可移简支弹性柱的湿热过屈曲问题, 用数值积分法给出了相应的过屈曲平衡路径。本文作者也曾基于可伸长梁的几何非线性理论, 采用打靶法<sup>[10]</sup>数值分析了两端不可移简支、简支、夹紧、夹紧<sup>[7]</sup>以及简支、夹紧<sup>[8,9]</sup>弹性杆在均匀变温下的热过屈曲。然而, 在许多实际工程问题中, 存在着升温沿横向非均匀变化的情况。由于沿横向变化的变温会在梁内产生热弯矩, 从而会导致梁的弯曲变形, 并与屈曲变形相耦合。本文将在文[6~9]的基础上, 研究在轴向均匀、横向非均匀变化的升温场作用下两端不可移简支梁的过屈曲行为, 给出相应的过屈曲平衡路径。

## 1 问题的数学模型

考虑一未变形长度为  $l$  的两端不可移简支矩形等截面弹性梁(见图 1)。矩形截面的宽为

\* 收稿日期: 2001\_04\_10; 修订日期: 2002\_09\_20

基金项目: 科技部基础研究重大项目前期预研专项基金资助项目()

作者简介: 李世荣(1957—), 男, 甘肃永登人, 教授, 博士(E-mail: lsr@gsut.edu.cn)。

$b$ , 高为  $h$ 。假设从自然状态起, 梁的上表面和下表面的升温分别为  $T^+$  和  $T^-$ , 且升温沿横向为线性变化, 则梁内的温度场可表示为

$$T = \frac{(T^+ + T^-)}{2} + \frac{(T^+ - T^-)}{h} \eta = T_m + \frac{T_d}{h} \eta \quad \left(-\frac{h}{2} \leq \eta \leq \frac{h}{2}\right), \quad (1)$$

其中  $T_m = (T^+ + T^-)/2$  和  $T_d = T^+ - T^-$  分别为横截面内的平均升温 and 上下表面的升温之差。

记梁在变形前轴线上一点的坐标为  $(x, y)$  且  $x \in [0, l]$ ,  $y = 0$ 。当梁发生热弯曲或热屈曲后, 物质点  $C(x, 0)$  移到点  $C'(x + u, w)$ , 其中  $u(x)$ ,  $w(x)$  分别为  $C$  点在  $x$  和  $y$  方向的位移。这里假设在变形过程中横截面尺寸不变, 服从 Kirchhoff 假设, 其轴线仍在  $x, y$  平面内。由轴线可伸长梁的几何非线性理论<sup>[1~7]</sup>可得下列几何关系

$$\frac{ds}{dx} = \Lambda, \quad \frac{du}{dx} = \Lambda \cos \theta - 1, \quad \frac{dw}{dx} = \Lambda \sin \theta, \quad (2)$$

其中  $s(x)$  为梁变形后的轴线弧长,  $\Lambda(x)$  为与轴线伸长有关的未知函数 (stretching), 它可由位移  $u(x)$ 、 $w(x)$  表示为

$$\Lambda = \sqrt{(1 + du/dx)^2 + (dw/dx)^2}. \quad (3)$$

$\theta(x)$  为挠曲线切线与  $x$  轴正向的夹角。由 Kirchhoff 平截面假设, 可得横截面上任意点的正应变为<sup>[4,5]</sup>

$$\varepsilon(x, \eta) = \Lambda - 1 - \frac{d\theta}{dx} \eta \quad \left(-\frac{h}{2} \leq \eta \leq \frac{h}{2}\right). \quad (4)$$

考虑梁的材料为线性热弹性的, 则应力-应变关系为

$$\sigma = E(\varepsilon - \alpha T), \quad (5)$$

其中  $E$ ,  $\alpha$  分别为弹性模量和热膨胀系数。将(1)和(4)式代入(5)式并关于横截面积  $A$  积分, 可得轴力  $N$  和弯矩  $M$  如下

$$N = \iint_A \sigma dA = EA(\Lambda - 1 - \alpha T_m), \quad (6)$$

$$M = \iint_A \sigma \eta dA = -EI \left[ \frac{d\theta}{dx} + \frac{\alpha T_d}{h} \right], \quad (7)$$

其中  $I$  为横截面的惯性矩。

由文献[5, 6]可知, 内力  $N$  和  $M$  满足平衡方程

$$N + P \cos \theta = 0, \quad (8)$$

$$M + Pw = 0. \quad (9)$$

其中  $P$  为梁端的水平约束反力。将(6)式和(7)式分别代入方程(8), (9), 可得

$$\begin{cases} \Lambda = -p \cos \theta / EA + \alpha T_m + 1, \\ \frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{EI}(Pw + \alpha T_d / h). \end{cases} \quad (10)$$

采用无量纲变换

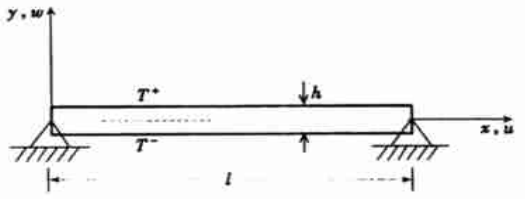


图1 两端不可移简支梁示意图

$$\begin{cases} X = \frac{x}{l}, S = \frac{s}{l}, U = \frac{u}{l}, \\ W = \frac{w}{l}, \delta = \frac{l}{h}, p = \frac{l^2 p}{EI}, \\ \tau_m = 12 \delta^2 \alpha T_m, \\ \tau_d = 12 \delta^2 \alpha T_d, \end{cases} \quad (11)$$

可得问题的无量纲控制方程如下

$$\frac{dS}{dX} = \Lambda, \quad \frac{dU}{dX} = \Lambda \cos \theta - 1, \quad \frac{dW}{dX} = \Lambda \sin \theta, \quad \frac{d\theta}{dX} = -pW - \frac{\tau_d}{12\delta} \quad (12)$$

其中  $\Lambda = (-p \cos \theta + \tau_m) / (12\delta^2) + 1$ , (13)

对于两端不可移简支梁, 利用变形的对称性可得无量纲形式的边界条件

$$S(0) = 0, \quad U(0) = 0, \quad W(0) = 0, \quad \theta(0) = \beta, \quad (14a)$$

$$U\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad \theta\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad (14b)$$

其中  $\beta$  为端部横截面转角, 这里作为梁的变形控制参数。这样, 杆的热过屈曲问题就归结为在边界条件(14)下, 求解非线性常微分方程(12)。这是一包含  $S(X)$ ,  $U(X)$ ,  $W(X)$ ,  $\theta(X)$  四个未知函数的强非线性常微分方程的两点边值问题, 其中包含了温度参数  $\tau_m$ 、 $\tau_d$  和约束反力参数  $p$ 。

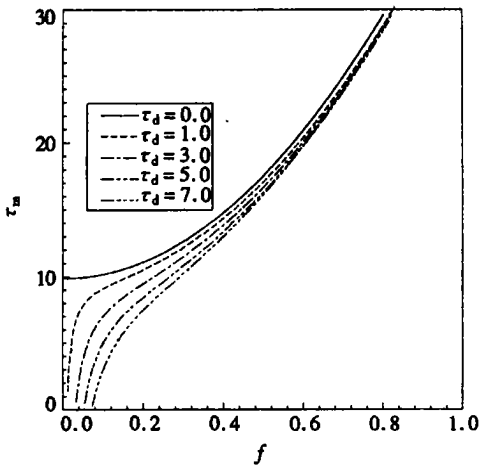


图2 不同横向升温参数  $\tau_d$  对应的过屈曲平衡路径  $\tau_m f$

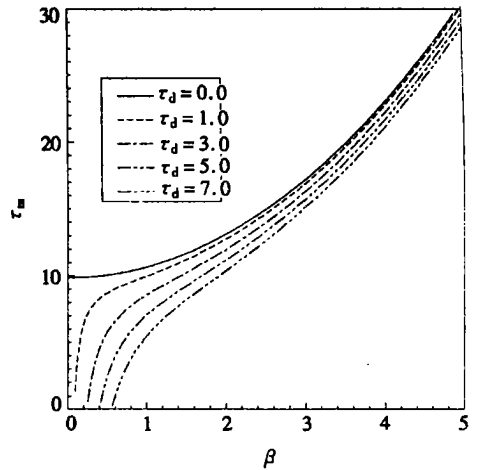


图3 不同横向升温参数  $\tau_d$  对应的过屈曲平衡路径  $\tau_m \beta$

## 2 数值方法及结果

由于非线性边值问题(12)~(14)的强非线性, 其解析解难以获得。这里, 采用打靶法求得了问题的数值解。首先采用 Runge\_Kutta 方法求解初值问题(12), (14a), 可得如下形式解

$$S = S(X; \beta, \tau_m, \tau_d, p), \quad U = U(X; \beta, \tau_m, \tau_d, p), \quad (15a)$$

$$W = W(X; \beta, \tau_m, \tau_d, p), \quad \theta = \theta(X; \beta, \tau_m, \tau_d, p), \quad (15b)$$

如果  $U$  和  $\theta$  满足(14b), 亦即

$$U = U\left(\frac{1}{2}; \beta, \tau_m, \tau_d, p\right) = 0, \quad \theta = \theta\left(\frac{1}{2}; \beta, \tau_m, \tau_d, p\right) = 0, \quad (16)$$

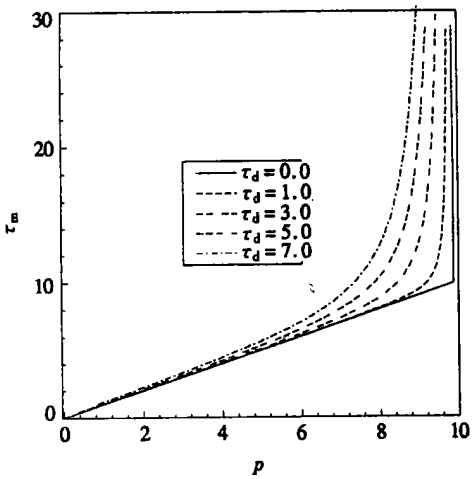


图4 不同横向升温参数  $\tau_d$  对应的过屈曲平衡路径  $\tau_m-p$  曲线

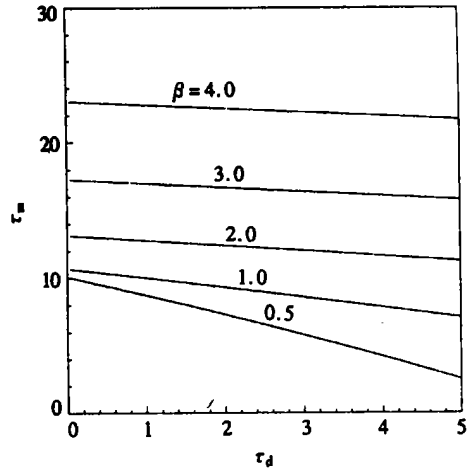


图5 不同梁端转角  $\beta$  对应的特征关系  $\tau_m-\tau_d$  曲线

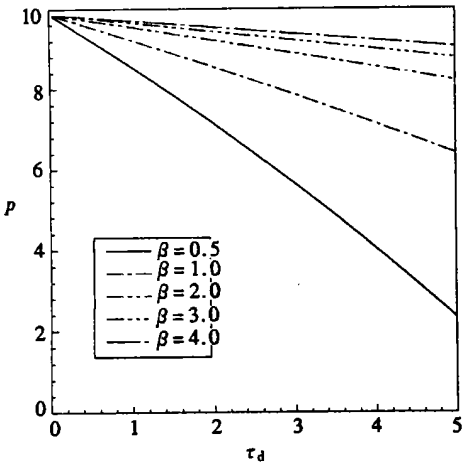


图6 不同梁端转角  $\beta$  对应的特征关系  $p-\tau_d$  曲线

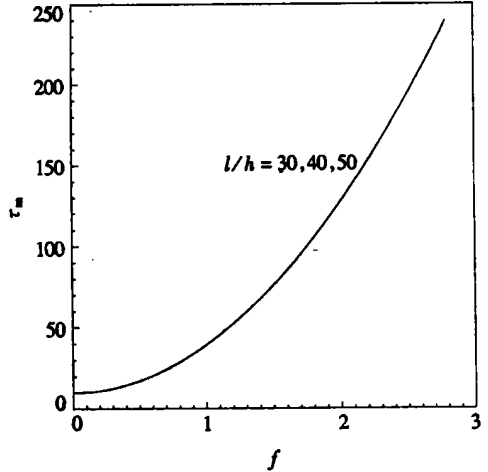


图7 均匀加热梁 ( $\tau_d = 0$ ) 的过屈曲平衡路径  $\tau_m-f$  曲线

则可知(15)正是边值问题(12)、(14)的解。方程(16)即为问题的特征方程,其中包含了载荷参数  $\tau_m, p$  和  $\tau_d$ 。对于给定的变形控制参数  $\beta$  和横向变化升温参数  $\tau_d$ ,可采用 Newton\_Raphson 方法对其迭代求解<sup>[6-10]</sup>,获得方程的根  $\tau_m, p$ 。

图2和图3分别绘出了给定不同横向升温参数  $\tau_d$  时由曲线  $\tau_m-f$  和  $\tau_m-\beta$  定义的过屈曲平衡路径。其中  $f = w(l/2)/h = W(1/2)\delta$  为梁的中心点无量纲挠度,转角  $\beta$  的单位为度。结果表明,在平均升温参数  $\tau_m < (\tau_m)_{cr}$  时横向升温产生的弯曲变形为主要变形,而在平均升温参数  $\tau_m > (\tau_m)_{cr}$  时,则过屈曲变形逐渐成为主要变形,其中  $(\tau_m)_{cr} = 9.8697 \approx \pi^2$  为  $\tau_d = 0$  时梁发生失稳的临界温度<sup>[7]</sup>。这些特点与具有初始变形梁的过屈曲特性类似。图4给出与图2、图3同样条件下平均升温参数  $\tau_m$  与纵向反力  $p$  的关系曲线。

图5、图6分别为给定变形控制参数  $\beta$  (或变形状态) 时平均升温参数  $\tau_m$  和反力参数  $p$  随横向升温  $\tau_d$  的变化曲线,结果再次表明,随着变形的不断增加,  $\tau_d$  对  $\tau_m$  和  $p$  的影响越来越小,

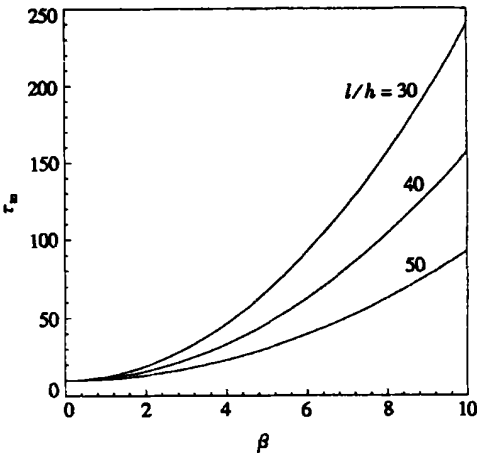


图8 均匀加热梁 ( $\tau_d = 0$ ) 的过屈曲平衡路径  $\tau_m$ - $\beta$  曲线

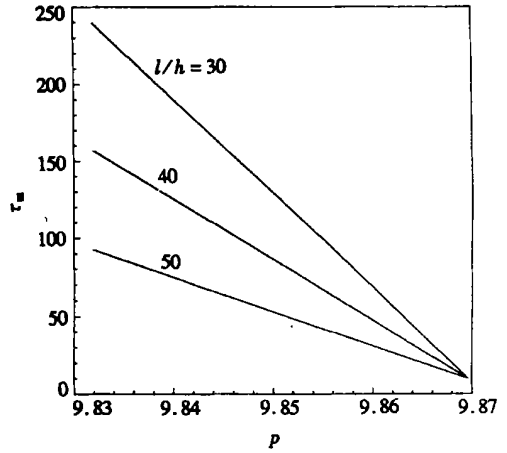


图9 均匀加热梁 ( $\tau_d = 0$ ) 的特征关系  $\tau_m$ - $p$  曲线

这与图2、图3所得结论一致。以上数值结果均是在  $\delta = l/h = 30$  条件下得到的。为了说明梁的长细比  $\lambda = \sqrt{A/I} = 2\sqrt{3}\delta$  对屈曲变形的影响, 在  $\tau_d = 0$  时, 获得了具有不同几何参数  $\delta$  的梁的过屈曲平衡路径。图7、图8、图9分别为  $\tau_m$ - $f$ 、 $\tau_m$ - $\beta$  和  $\tau_m$ - $p$  特性曲线。显然, 由图7可见,  $\tau_m$ - $f$  曲线与长细比参数  $\delta$  无关。图7、图8中, 曲线与坐标轴  $\tau_m$  共交于一点, 其坐标值即为临界温度参数  $\tau_m = (\tau_m)_{cr}$ , 该值也与  $\delta$  无关。但是, 实际临界升温  $(T_m)_{cr} = (\tau_m)_{cr} / (12\delta^2\alpha)$  显然与  $\delta$  有关。从图9可见, 梁在屈曲前(或  $\tau_m < (\tau_m)_{cr}$ ), 杆端无量纲束力  $p$  等于无量纲升温  $\tau_m$ ; 当梁处于临界屈曲状态, 即  $\tau_m = (\tau_m)_{cr}$  时,  $p$  达到最大值  $p_{max} = (\tau_m)_{cr}$ ; 当梁进入过屈曲状态之后, 随着过热过屈曲变形的增大, 约束反力  $p$  将微幅减小。

[参 考 文 献]

- [1] Stemple T. Extensional beam-columns: an exact theory[J]. Internat J Non-Linear Mech, 1990, 25(6): 615—623.
- [2] 程昌钧, 朱正佑. 结构的分叉与屈曲[M]. 兰州: 兰州大学出版社, 1991.
- [3] Antman S S. Non-Linear Problems of Elasticity [M]. Berlin: Springer Press, 1995.
- [4] 李世荣, 李忠. 压杆过屈曲分析中轴线不可伸长假设的定量讨论[J]. 兰州大学学报, 1997, 33(4): 43—46.
- [5] Filipich C P, Rosales M B. A further study on the post-buckling of extensible elastic rods[J]. Internat J Non-Linear Mech, 2000, 35(6): 997—1022.
- [6] Coffin D W, Bloom F. Elastica solution for the hygrothermal buckling of beam[J]. Internat J Non-Linear Mech, 1999, 34(6): 935—947.
- [7] 李世荣, 程昌钧. 加热弹性杆的热过屈曲分析[J]. 应用数学和力学, 2000, 21(2): 119—125.
- [8] 李世荣. 非对称支承弹性杆的热过屈曲[J]. 工程力学, 2000, 17(5): 115—119.
- [9] LI Shi-rong. A shooting method for thermal post-buckling of rods with pinned-fixed ends[J]. Journal of Gansu University of Technology, 2000, E, 4: 106—110.
- [10] William H P, Brain P F, San A T. Numerical Recipes—the Art of Scientific Computing [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1986.

## Thermal Post\_Buckling of an Elastic Beams Subjected to a Transversely Non\_Uniform Temperature Rising

LI Shi\_rong<sup>1,3</sup>, CHENG Chang\_jun<sup>2</sup>, ZHOU You\_he<sup>3</sup>

(1. School of Sciences, Gansu University to Technology, Lanzhou 730050, P. R. China;

2. Department of Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, P. R. China;

3. Department of Mechanics, Lanzhou University, Lanzhou 730000, P. R. China)

**Abstract:** Based on the non\_linear geometric theory of axially extensible beams and by using the shooting method, the thermal post\_buckling responses of an elastic beams, with immovably simply supported ends and subjected to a transversely non\_uniformly distributed temperature rising, were investigated. Especially, the influences of the transverse temperature change on the thermal post\_buckling deformations were examined and the corresponding characteristic curves were plotted. The numerical results show that the equilibrium paths of the beam are similar to what of an initially deformed beam because of the thermal bending moment produced in the beam by the transverse temperature change.

**Key words:** elastic beam; transverse temperature change; thermal post\_buckling; shooting method; numerical solution