应用数学和力学,第 24 卷 第 5 期(2003 年 5 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2003) 05_0461_05

一维耦合格点映射中的周期解

郑永爱[1,2], 刘曾荣[2]

(1. 扬州大学 数学系, 扬州 225006;
2. 上海大学 数学系, 上海 200436)

(我刊编委刘曾荣来稿)

摘要: 证明了具有最临近耦合的一维耦合格点映射关于时间为周期的非线性解的存在性 这一类系统能被看成无穷个耦合振子构成的阵列 给出了估计这类关于时间为周期的解存在的临界耦合强度的一种方法 对于一些特殊的关于时间为周期的非线性解, 证明了其空间的指数衰减性

关 键 词: 耦合格点映射; 非线性周期解; 反可积极限; logistic 映射
中图分类号: O175 文献标识码: A

引 言

近来, 耦合格点映射中的动力学引起了人们的极大关注[1~4] 人们已经发现耦合格点映射可以显示各种各样的时空行为: 时空间歇, 时空混沌, 峰和界面, 及各种非线性周期解 在本文中, 考虑一类一维无穷非线性耦合映射链, 证明了当耦合强度 充分小时周期解的存在性 我们采用了文[5~7] 中引进的反可积极限方法 在反可积极限(耦合强度 = 0), 我们要求某个各点上有周期 _q 的轨道, 其余的格点上有周期 _p 轨道(p q), 也就是说, 在反可积极限, 整个系统在相位空间呈现出一个周期 _r 轨道, 这里 r 是 p 和 q 的最小公倍数 证明了在 | | < $_0$ 时, 这个周期 _r 轨道有一个相同周期的唯一连续延拓 论证了周期 _r 轨道的连续延拓后, 我们又证明某些在反可积极限时特殊轨道的连续解将随着远离位置 0 呈现指数衰减性质 最后我们把此一般结果应用到一个具体的例子 耦合 Logistic 映射链

1 周期解的存在性

所取模型是一个最邻近耦合的耦合格点映射, 即

$$x^l_{n+1} = \frac{1}{\ }V(x^l_n) - W(x^{l+1}_n - x^l_n) + W(x^l_n - x^{l-1}_n), \tag{1}$$

其中 是耦合参数且 0 1, n 是离散时间步, l 是格点的指标 动力学函数 V 和耦合函数 W 是 C^1 进一步, 假设函数 $V(y)$ 有 h 个零点 $y_1, y_2, \ , y_h$ 当 = 0 时, 方程(1) 变为

$$V(x^l_n) = 0, \quad x^l_n = x^l_n = y_i \qquad (i = 1, 2 \ h;\ n, l \ \mathbf{Z}) \tag{2}$$

在反可积极限, 为了使整个系统呈现一个周期 _r 轨道, 我们在格点 0 放上某个周期 _q 轨道

收稿日期: 2001_10_26; 修订日期: 2002_09_20
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10171061)
作者简介: 郑永爱(1966), 男, 江苏兴化人, 副教授, 博士(E_mail: zhengyongai@163.com)

$(x^0_{n+q} = x^0_n)$ 和在链的其余格点放上某个周期 p 轨道$(x^l_{n+p} = x^l_n)$, 这里 r 表示p 和q 的最小公倍数　为了证明这个周期- r 轨道在非零　时能够被连续延拓, 我们首先给出隐函数定理[8]

引理 1(隐函数定理)[8] 假设

(　) 映射 $F: U(x_0, y_0) \quad X \quad Y \quad Z$ 定义在开邻域$U(x_0, y_0)$ 上, 而且 $F(x_0, y_0) = 0$, 这里 X, Y, 和 Z 是在$K = \mathbf{R}$ 或 $K = \mathbf{C}$ 上的巴拿赫空间

(　) 偏导数 F_y 在 $U(x_0, y_0)$ 上存在和 $F_y(x_0, y_0): Y \quad Z$ 是可逆和有界的

(　) F 和F_y 在(x_0, y_0) 上是连续的

那么下面结果是真的

1) 存在正数r_0 和 r, 对于满足　$x - x_0 \quad r_0$ 的每个$x \quad X$ 存在唯一$y(x) \quad Y$ 满足 $y(x) - y_0 \quad r$ 和$F(x, y(x)) = 0$

2) 如果 F 在(x_0, y_0) 的一个邻域是连续的, 那么 $y(\ )$ 在 x_0 的一个邻域是连续的

其次, 需要建立适当的空间 E :

$$E = \left\{ \left\{ x^l_n \right\}_{l \quad Z, n \quad (1, \quad , r)} \mid \mid x^l_n - x^l_n \mid \quad , x^l_n \quad \left\{ y_1, \quad , y_h \right\}, \right.$$
$$\left. x^l_{n+r} = x^l_n, \quad x^l_{n+r} = x^l_n, \quad n, l \quad \mathbf{Z} \right\}$$

空间 E 是一个巴拿赫空间且有上确界范数　$X \quad = \sup\left\{ \mid x^l_n \mid, \quad l \quad \mathbf{Z}, n \quad (1, \quad , r) \right\}$

我们可以得到如下的关于周期 r 轨道的存在性定理:

定理 1　如果 $y_1; y_2; \quad ; y_h$ 是函数$V(y)$ 的简单零点, 那么 $\quad _0 > 0$ 当 $0 < \quad < \quad _0$ 时, 对于 $\quad = 0$ 时由方程(1) 给出的周期 r 轨道$X = \{x^l_n\}_{l \quad \mathbf{Z}, n \quad (1, \quad , r)}$ 存在唯一连续延拓为方程(1) 的周期 r 轨道$X = \{x^l_n\}_{l \quad \mathbf{Z}, n \quad (1, \quad , r)}$

证明　我们定义一个映射 $F: E \quad \mathbf{R} \quad E$, 这个映射由下面等式给出

$$F^l_n = \quad x^l_{n+1} - \quad V(x^l_n) + \quad W(x^{l+1}_n - x^l_n) - \quad W(x^l_n - x^{l-1}_n) \tag{3}$$

显然 F 的零点与方程(1) 的解一一对应　因为 V 和W 是C^1, 且 $F(X, 0) = 0$, 故如果我们能证明在 $\quad = 0$ 时, 微分算子 $DF = \frac{\ F}{\ x}$ 是有界可逆的　那么由引理 1 我们知道对于　充分小, 存在一个唯一点 $X \quad E$ 满足$F(X, \ ) = 0$

为此方程(3) 关于 x^l_n 微分, 可得到

$$\frac{\ F^j_m}{\ x^l_n} = \quad _{l,j} \quad _{m+1,n} - \quad V(x^j_m) \quad _{m,n} \quad _{l,j} + \quad W(x^{j+1}_m - x^j_m)(\quad _{l,j+1} - \quad _{l,j}) \quad _{m,n} -$$
$$W(x^j_m - x^{j-1}_m)(\quad _{l,j} - \quad _{l,j-1}) \quad _{m,n} \tag{4}$$

$\quad = 0$ 上式变为

$$\left.\frac{\ F^j_m}{\ x^l_n}\right|_{\ = 0} = - \quad V(x^j_m) \quad _{m,n} \quad _{l,j} \tag{5}$$

因此 $DF \mid _{\ = 0}$ 在空间指标上是块对角的, 其块为

$$\boldsymbol{Q}_l = \begin{pmatrix} - \ V(x^l_1) & 0 & 0 \\ 0 & - \ V(x^l_2) & 0 \\ & & \\ 0 & 0 & - \ V(x^l_r) \end{pmatrix}$$

因为 $x^l_i \quad \{y_1, y_2, \quad , y_h\}(i = 1, 2, \quad , r)$, 所以 $x^l_i(i = 1, 2, \quad , r)$ 是函数 V 的简单零点, 即 $V(x^l_i) \quad 0$　这样 Q_l 是可逆的, 由此可推出$DF \mid _{\ = 0}$ 是有界可逆的　根据引理 1, 我们知道对

于充分小 ，方程(1) 在 $= 0$ 时给出周期 _r 轨道 $X = \{x_n^l\}_{l \quad \mathbf{Z}, n \quad (1, \quad , r)}$ 存在唯一连续延拓的周期 _r 轨道 $X = \{x_n^l\}_{l \quad \mathbf{Z}, n \quad (1, \quad , r)}$

注 1 如果我们可以给出函数 V 和 W 的充分的信息，那么定理 1 中的 的下界 $_0$ 是能够得到

假定 $\mathrm{D}F^{-1}(X, 0) \quad M$，并存在 $_0, h > 0$，当 $X - X \quad h, | \quad | \quad _0$ 时满足

$$\mathrm{D}F(X, \quad) - \mathrm{D}F(X, 0) \qquad \frac{1}{2M}$$

和

$$F(X, \quad) \qquad \frac{h}{2M},$$

那么在定理 1 中 $_0$ 就是 的一个下界

注2 如果在 $= 0$ 时，方程(1) 离散周期 _r 轨道由 $X = \{x_n^l\}$ 给出，这儿 $x_n^l = 0(l \quad 0\ l \quad \mathbf{Z}\ n \quad \mathbf{Z})$, $x_{n+r}^0 = x_n^0, (n \quad \mathbf{Z})$，即在反可积极限对于所有在 $\mathbf{Z}$ 中的 l 和 n，我们在位置 0 放一个周期 _r 轨道和在链的其余位置放周期 _1 轨道，我们证明上面的轨道 $X = \{x\}_{l \quad \mathbf{Z}, n \quad (1, \quad , r)}$ 的一个连续延拓 $X = \{x_n^i\}_{l \quad \mathbf{Z}, n \quad (1, \quad , r)}$ 在空间为指数衰减

2 指数衰减性

关于注 2 中提到的方程(1) 的周期 _r 轨道 $X = \{x_n^l\}_{l \quad \mathbf{Z}, n \quad (1, \quad , r)}$，我们有下面的指数衰减的结果

定理 2 只要 $\mathrm{D}F$ 是可逆的，当 $l|$ 时，对于注 2 中得到的周期 _r 轨道在格点 l 上的范数 $\boldsymbol{x}^l$ 为指数衰减，这里 $\boldsymbol{x}^l = \{x_n^l\}_{l \quad \mathbf{Z}, n \quad (1, \quad , r)}$ 和 $\boldsymbol{x}^l = \max_{n \quad (1, \quad , r)} | x_n^l |$

证明 为了证明这个定理，下面的结果[9] 是需要的：

( ) 由于映射有最邻近的耦合结构，故存在一个实数 > 1，对于 $1 < \quad <$ ，满足

$$(\quad) = \sup_{[0, \quad _0]} \sup_{l \quad Z\ j \quad Z} (\mathrm{D}F^{-1})_{lj} \quad ^{|l-j|} < \tag{6}$$

( ) 只要 $\mathrm{D}F$ 是可逆的，就有

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}} = - \mathrm{D}F^{-1} \frac{F}{} \tag{7}$$

进一步，如果 F 在 $(X, 0)$ 的某个邻域是连续的，那么轨道 $X(\quad)$ 在 $= 0$ 的某个邻域是连续的

现在我们证明定理 假设对于 $(1/ \quad , 1), \quad [0, \quad _0]$ 和 $l \quad \mathbf{Z}$ 满足

$$\boldsymbol{x}^l = \max_{n \quad (1, \quad , r)} | x_n^l | \quad K(\quad) \quad ^{|l|} \tag{8}$$

这里 $K(0) = \quad \boldsymbol{X}(0)$

根据(3)，可导出

$$\frac{F_n^l}{} = x_{n+1}^l + W(x_n^{l+1} - x_n^l) - W(x_n^l - x_n^{l-1}), \tag{9}$$

因为 W 是 C^1，根据中值定理经过简单的计算，可得到

$$\frac{F}{} \qquad K(\quad) C \quad ^{|l|}, \tag{10}$$

这里 C 是某常数 由(6)，(7)，(9)，我们得到

$$\frac{\boldsymbol{x}^l}{} \qquad (DF^{-1})_{lj} \quad \frac{F^l}{}$$

$$(\mathrm{D}F)_{lj}^{-1} \quad ^{-|l-j|} \quad ^{|i-j|+|j|} K(\quad) C$$

$$(\frac{1}{\ })K(\ )^{|l|}C$$

$$\frac{d}{d}(K(\ )^{|l|})$$

这里如果选取 $K(\ )$ 满足

$$K(\ ) = K(0)\exp(C\ (\frac{1}{\ })\ ) \tag{11}$$

最后一个不等式成立 这样当 0 $_0$ 时, 如果微分方程(7) 的流初始位于域(8) 中, 那么它永远不会离开那个区域; 现在初始条件 $X(0)$ 在区域(8), 因此 $X(\ )$ 在那个区域

3 一 个 例 子

如果取 $V(x) = x(1- x)$, $W(x) = x$, 那么(1) 变成

$$x^l_{n+1} = x^l_n(1- x^l_n) - (x^{l+1}_n + x^{l-1}_n - 2x^l_n), \tag{12}$$

系统(12) 是无穷耦合的 Logistic 映射链 在反可积极限时, (12) 成为

$$x^l_n(1- x^l_n) = 0 \tag{13}$$

因此

$$x^l_n = x^l_n = 0, 1 \tag{14}$$

我们用下列方法构造(13) 的一个解: 在位置 0 的格点上处于 一个周期_2 轨道($x^0_1 = 0, x^0_2 = 1, x^0_{n+2} = x^0_n$), 和在链的其余位置处于不动点($x^l_1 = 0, x^l_{n+1} = x^l_n, l \quad 0, l \quad \mathbf{Z}$), 那么整个系统呈现一个周期_2 轨道 据定理 1, 对于 $(0, \ _0)$, 方程(13) 的周期_2 轨道 $X = \{x^l_n\}_{l \ \mathbf{Z}, n \ (1,2)}$ 有一个唯一连续延拓的(12) 的周期_2 轨道 $X = \{x^l_n\}_{l \ \mathbf{Z}, n \ (1,2)}$ 进一步, 根据定理2 轨道 $X = \{x^l_n\}_{l \ \mathbf{Z}, n \ (1,2)}$ 在空间上有指数衰减性 同时我们也能给出它的下界 $_0$ 由(3), (4), (5), 我们得到

$$F^l_n = x^l_{n+1} - x^l_n(1- x^l_n) + (x^{l+1}_n + x^{l-1}_n - 2x^l_n), \tag{15}$$

$$\frac{F^j_m}{x^l_n} = \ _{l,j}\ _{m+1,n} - (1- 2x^j_m)\ _{m,n}\ _{l,j} + \ _{m,n}(\ _{l,j+1} + \ _{l,j-1} - 2\ _{l,j}), \tag{16}$$

$$\left.\frac{F^j_m}{x^l_n}\right|_{=0} = - (1- 2x^j_m)\ _{m,n}\ _{l,j} \tag{17}$$

再由(17), 这可得 $\mathrm{D}F^{-1}(X, 0) = 1 = M$

另一方面, 根据(15) 和(16), 我们有

$$\mathrm{D}F(X, \ ) - \mathrm{D}F(X, 0) \quad 2 \quad \{x^l_n\} - \{x^l_n\} \quad + 5 \ ,$$

$$F(X, \ ) \quad = 2$$

如果设 $h = 2/13$, $_0 = 1/26$, 那么当 $X - X \quad 2/13$, $|\ | \quad _0 = 1/26$, 就可得下面的估计式

$$\mathrm{D}F(X, \ ) - \mathrm{D}F(X, 0) \quad \frac{1}{2M},$$

$$\boldsymbol{F}(X, \ ) \quad \frac{h}{2M}$$

因此由注 1, 我们得到 的一个下界 $_0 = 1/26$

[参 考 文 献]

[1] Crutchfield J P, Kaneko K. Phenomenology of spatio_temporal chaos directions in chaos[J]. World

Scientific Secries Directions in Condensed Matler Physics, 1987, **1**(3): 272) 353.

[2] Kaneko K. Pattern dynamics in spatiotemporal chaos[J]. Physica D, 1989, **34**(1): 1) 41.

[3] Coutinho R, Fernandez B. Extended symbolic dynamic in bistable CML: Existence and stability of fronts[J]. Physica D, 1997, **108**(1): 60) 80.

[4] Abel M, Spicci M. Nonlinear localized periodic solutions in a coupled map lattice[J]. Physica D, 1998, **119**(1): 22) 33.

[5] Aubry S, Abramovici G. Chaotic trajectories in the standard map, the concept of anti_integrability[J]. Physica D, 1990, **43**(2): 199) 219.

[6] Mackay R S, Aubry S. Proof of existence of breathers for time_reversible or Hamiltonian networks of weakly coupled oscillators[J]. Nonlinearity, 1994, **7**(6): 1623) 1643.

[7] Aubry S. Breathers in nonlinear lattices: existence, linear stability and quantization[J]. Physica D, 1997, **103**(3): 201) 250.

[8] Zeidler E. Nonlinear Functional Analysis and Its Applications, Fixed_Pointed Theorem [M]. New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo: Springer_Verlag, 1986.

[9] Baesens C, Mackay R S. Exponential localisation of linear response in networks with exponentially decaying coupling[J]. Nonlinearity, 1997, **10**(4): 931) 940.

Periodic Solutions in One_Dimensional Coupled Map Lattices

ZHENG Yong_ai[1,2], LIU Zeng_rong[2]

(1. Department of Mathematics, Yangzhou University, Yangzhou 225006, P. R. China;
2. Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200436, P. R. China)

Abstract: It is proven that the existence of nonlinear solutions with time period in one_dimensional coupled map lattice with nearest neighbor coupling. This is a class of systmes whose behavior can be regarded as infinite array of coupled oscillators. A method for estimating the critical coupling strength below which these solutions with time period persist is given. For some particular nonlinear solutions with time period, exponential decay in space is proved.

Key words: coupled map lattice; nonlinear periodic solution; anti_integrable limit; logistic map