文章编号: 1000_0887(2003 05_0493_12

关于不可压、无粘流体的 Euler 方程初值问题的适定性(II)*

沈 臻

(上海大学 理学院 数学系, 上海 200436

(戴世强推荐

摘要: 以分层理论为基础, 讨论了不可压、无粘流体的 Euler 方程的形式可解性, 并给出了各类不适定初值问题存在形式解的条件与计算方法• 并讨论了超曲面上和超平面上初值问题的适定性并给出了存在不唯一解的例证•

关 键 词: Euler 方程; 不适定问题; 形式解; 末方程
中图分类号: O175.29 文献标识码: A

引 言

对于 Euler 方程的初、边值问题适定性的研究, 以不同的方法, 在不同的函数中有许多重要的结果[1]~[4]• 在《关于不可压、无粘流体的 Euler 方程初值问题的适定性(Ⅰ 》一文中, 讨论了超曲面 $\Sigma: \left\{t = t^{(0)} + g(x), g(x) \neq \text{常数}, g(0) = 0\right\} \subseteq R^4$ 的 Cauchy 问题不适定情况, 并给出了在 $\Sigma: \{t = 0\}$ 上满足相同条件的初值问题的两个不同的形式解, 以及给出了如何计算形式解的计算公式• 在本文中, 给出了 Euler 方程另外两类不适定的初值问题• 一类是在超曲面 $\Sigma: \left\{x = x^{(0)} + h(x_2, x_3, t), h(0) = 0\right\} \subseteq R^4$ 上的 Cauchy 问题不适定的各种可能以及判别方法, 给出了 Σ 上不适定 Cauchy 问题形式解的计算方法, 并对某些初值问题给出了这种解的有限形式• 另一类是在[5] 之后, 在超曲面 $\left\{t = t^{(0)} + g(x), g(0) = 0, g \text{ 不等于常数}\right\} \subseteq R^4$ 上给出了 Σ 上不适定 Cauchy 问题形式解的计算方法, 并对某些初值问题给出了这种解的有限形式•

Euler 方程的原型如下[6]:

$$D\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = -\dfrac{1}{\rho}\nabla P + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t), \\ \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0, \end{cases}$$

其中 $(\boldsymbol{x}, t) = (x_1, x_2, x_3, t) \in R^3 \times \mathbf{R} = V$, 记 $Z = R^3 \times \mathbf{R}^+$, 流体速度 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = (u_1(\boldsymbol{x}, t), u_2(\boldsymbol{x}, t), u_3(\boldsymbol{x}, t)) \in R^3$ 和压力 $P \in \mathbf{R}_+$ 是未知函数, 外力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t) = (F_1(\boldsymbol{x}, t), F_2(\boldsymbol{x}, t), F_3(\boldsymbol{x}, t))$(本文中设 $F_i \in C^\infty$, $i = 1, 2, 3$), 密度 $\rho > 0$ 是常数•

* 收稿日期: 2001_11_27; 修订日期: 2002_12_28
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19971054
作者简介: 沈臻(1977— ,女, 浙江宁波人,硕士(E_mail: jeansz@citiz.net •

文中涉及的符号请参看[5]•

1 初值问题存在形式解的条件

设 $R^3\times\mathbf{R}=V$, $R^3\times\mathbf{R}_+=Z$, V 上的 Euler 方程D 看成 Ehresmann 空间 $J^1(V,Z)$ 的局部坐标, 可将其写成以下形式(为方便起见设 $x_4=t$, $u_4=P$):

$$D\quad\begin{cases} f_1: p_4^1+u_1p_1^1+u_2p_2^1+u_3p_3^1+\dfrac{1}{\rho}p_1^4-F_1=0,\\ f_2: p_4^2+u_1p_1^2+u_2p_2^2+u_3p_3^2+\dfrac{1}{\rho}p_2^4-F_2=0,\\ f_3: p_4^3+u_1p_1^3+u_2p_2^3+u_3p_3^3+\dfrac{1}{\rho}p_3^4-F_3=0,\\ f_4: p_1^1+p_2^2+p_3^3=0,\end{cases}\tag{1}$$

并分别记上述各式的左端为 f_1,f_2,f_3,f_4, C^∞ 对应 $f_i: J^1(V,Z)\rightarrow\mathbf{R}(i=1,2,3,4)$, 则(1) 式可记为 $D=V(f_1,f_2,f_3,f_4)\subseteq J^1(V,Z)$•

已知结果是:

第一: D 的本方程

$$D_*=\bigcup_k D_k\qquad(k=-1,0,1,2,\cdots),$$

$$D_{-1}=V=R^4,\ D_0=J^0(V,Z),\ D_1=D=V(f_1,f_2,f_3,f_4),$$

$$D_k=V(\mathrm{e}_{i_1i_2\cdots i_{k-1}}(f_j),\ \mathrm{e}_{i_1i_2\cdots i_{k-2}}(f_j),\ \cdots,\mathrm{e}_{i_1}(f_j),f_j)$$

$$(k\geqslant 2;\ j,i_1,i_2\cdots i_{k-1}=1,2,3,4,\ i_1\leqslant i_2\leqslant\cdots\leqslant i_{k-1})$$

第二: $\rho_{3,k-1}: E_{3,k-1}(D)\rightarrow W_{3,k-1}(V,Z)$ 的分层

$$W_{3,k-1}(V,Z)=S^t_{3,k-1}(D)\cup S^1_{3,k-1}(D)\cup S^2_{3,k-1}(D)\cup T_{3,k-1}(D),$$

这里 $E_{3,k-1}(V,Z)\subseteq G_3^*(TJ^{k-1}(V,Z))\times_{J^{k-1}(V,Z)}J^k(V,Z)$,

$$W_{3,k-1}(V,Z)=\operatorname{Im}p_1(E_{l,k-1}(V,Z))\subseteq G_3^*(TJ^{k-1}(V,Z))•$$

纤维空间:

$$\rho^2_{3,k-1}: E^2_{3,k-1}(D)\rightarrow S^2_{3,k-1}(D),$$

其纤维维数为 2•

以上结果可参看[1]•

对于所讨论的 D 的不适定问题, 其分析过程类似于[5], 得到如下结果:

(i) 两类初值问题形式解的存在条件

设 $x^{(0)}\in V=R^3\times\mathbf{R}$, D 的一组初始条件$(\sigma_0,\gamma_0)\in I_\infty(\Delta_3,D)$,

1 对于初值问题 (C_4)

$$\begin{cases}\sigma_g(\xi)=(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1^{(0)}+\xi_1,x_2^{(0)}+\xi_2,x_3^{(0)}+\xi_3,x_4^{(0)}+g(\xi)),\\ \gamma_g(\xi)=(\sigma_g(\xi),u_1(\xi),u_2(\xi),u_3(\xi),u_4(\xi)),\end{cases}\tag{2}$$

这里 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in\Delta_3$ 是 Δ_3 上的重心坐标, 对应 $g:\Delta_3\rightarrow\mathbf{R}$, $g\in C^\infty$, 并且 $g(0)=0$•

在给定初始条件 (σ_g,γ_g) 之后, 要决定相对应于(σ_g,γ_g) 的形式解, 其充分必要条件是存在 C^∞ 嵌入序列$\{\gamma_k^{(4)}\}$, $k\geqslant 1$, (见[7])

$$\gamma_k^{(4)}: \Delta_3\rightarrow J^k(V,Z)$$

$$\gamma_k^{(4)}(\xi)=(x_1(\xi),x_2(\xi),x_3(\xi),x_4(\xi),u_i(\xi),p^{i}_{j,|\lambda|}{}^{\lambda}(\xi),p^{i}_{j,|\mu|}{}^{\mu}(\xi))$$

$$(i, j = 1, 2, 3, 4;\ |\lambda| \leqslant k-1;\ |\mu| = k),$$

使得

$$\begin{aligned}
&\alpha_0^k \circ \gamma_k^{(4)} = \gamma_g,\\
&\alpha_{-1}^k \circ \gamma_k^{(4)} = \sigma_g,\\
&\alpha_{k-1}^k \circ \gamma_{k-1}^{(4)} = \gamma_k^{(4)},\\
&\gamma_k^{(4)*} \omega = 0\ \forall \omega \in I_k(V, Z),\\
&\gamma_k^{(4)}(\Delta_3) \subseteq D_k \subseteq J^k(V, Z),\\
&\alpha_{-1}^k \circ \gamma_k^{(4)} = \sigma_g,\\
&\alpha_0^k \circ \gamma_k^{(4)} = \gamma_g,
\end{aligned}$$

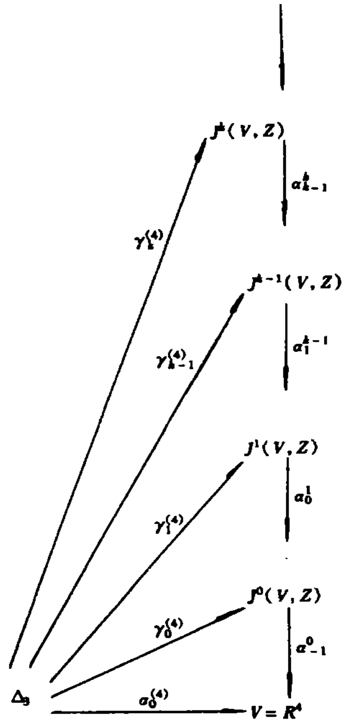

图 1

如图 1 所示: 根据序列 $\{\gamma_k^{(4)}\}$, 即可写出以幂级数形式表现的形式解其各阶系数•

2　对于初值问题(C_1 :

$$\begin{cases}
\sigma_h(\xi) = (x_1, x_2, x_3, x_4) = \\
\qquad (x_1^{(0)} + h(\xi), x_2^{(0)} + \xi_2, x_3^{(0)} + \xi_3, x_4^{(0)} + \xi_4),\\
\gamma_h(\xi) = (\sigma_h(\xi), u_1(\xi), u_2(\xi), u_3(\xi), u_4(\xi)),
\end{cases}$$

这里 $\xi = (\xi_2, \xi_3, \xi_4) \in \Delta_3$ 是 Δ_3 上的重心坐标, 对应 $h: \Delta_3 \to \mathbf{R}$, $h \in C^\infty$, 并且 $h(0) = 0$•

在给定初始条件 (σ_h, γ_h) 之后, 如何求其相对应的形式解, 其分析类似于(1 •

(ii)　初值问题 (C_4) 的适定性分析

该初值问题的计算均在 $W_{3,k-1}(V, Z) \subseteq G_3^*(TJ^{k-1}(V, Z))$ 的开覆盖 $\{U_i\}(i = 1, 2, 3, 4)$ 中的第四开集 U_4 中进行•

设 $\tau \in U_4$, τ 由 $J^{k-1}(V, Z)$ 在点 $p(\tau)$ 的三个切向量生成:

$$p(\tau) = (x_1, x_2, x_3, x_4, u_i, p^i_{j,|\lambda|}) \in J^{k-1}(V, Z),$$

$$\begin{cases}
\eta_1 = (1, 0, 0, \delta_1, \hat{u}_i(1), \hat{p}^{i}_{j,|\lambda|}{}^{\lambda}(1)),\\
\eta_2 = (0, 1, 0, \delta_2, \hat{u}_i(2), \hat{p}^{i}_{j,|\lambda|}{}^{\lambda}(2)),\\
\eta_3 = (0, 0, 1, \delta_3, \hat{u}_i(3), \hat{p}^{i}_{j,|\lambda|}{}^{\lambda}(3)), (i = 1, 2, 3, 4,\ |\lambda| \leqslant k-1,\ k \geqslant 1)•
\end{cases}$$

根据分层结果[1], 则得到 $\tau \in U_4 \cap S^2_{3,k-1}(D)$ 的充要条件是:

$$\begin{cases}
\delta_2 \varphi^{(4)}_{1,k-1} = \delta_1 \varphi^{(4)}_{2,k-1},\quad \delta_3 \varphi^{(4)}_{1,k-1} = \delta_1 \varphi^{(4)}_{3,k-1},\\
\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 \neq 0,\quad \delta = 1 - \delta_1 u_1 - \delta_2 u_2 - \delta_3 u_3 = 0,
\end{cases} \qquad (3$$

此即末方程 $E(S^2_{3,k-1}(D))$

其中

$$\varphi^{(4)}_{i,k-1}(\tau) = \Phi^{(4)}_{i,k-1} - u_1 p^{i}_{4^{k-1}}(1) - u_2 p^{i}_{4^{k-1}}(2) - u_3 p^{i}_{4^{k-1}}(3) - \frac{1}{\rho} p^{4}_{4^{k-1}}(i)$$

$$(i = 1, 2, 3,\ k = 1, 2, \cdots)• \qquad (4$$

(4 中 $\Phi^{(4)}_{i,k-1}$ 的计算公式如下:

$$\Phi^{(4)}_{i,k-1} = \frac{\partial^{k-1} F_i}{\partial x_4^{k-1}} - C^1_{k-1}\left(p^1_4 p^i_{14^{k-2}} + p^2_4 p^i_{24^{k-2}} + p^3_4 p^i_{34^{k-2}}\right) -$$

$$
\begin{aligned}
&C_{k-1}^{2}\left(p_4^{1\,2}p_{14}^{i\,k-3}+p_4^{2\,2}p_{24}^{i\,k-3}+p_4^{3\,2}p_{34}^{i\,k-3}\right)-\cdots-\\
&C_{k-1}^{l}\left(p_4^{1\,l}p_{14}^{i\,k-1-l}+p_4^{2\,l}p_{24}^{i\,k-1-l}+p_4^{3\,l}p_{34}^{i\,k-1-l}\right)-\cdots-\\
&C_{k-1}^{k-2}\left(p_4^{1\,k-2}p_{14}^{i}+p_4^{2\,k-2}p_{24}^{i}+p_4^{3\,k-2}p_{34}^{i}\right)-\\
&\left(p_4^{1\,k-1}p_1^{i}+p_4^{2\,k-1}p_2^{i}+p_4^{3\,k-1}p_3^{i}\right),
\end{aligned}
\qquad (5
$$

其中 $i=1,2,3,\ k=1,2,\cdots$

这里带^的符号表示的是一般意义下的情况•

定理 1 设 C^{∞} 超曲面 $\Sigma:\left\{t=t^{(0)}+g(x_1,x_2,x_3)\right\}\subseteq R^4$, $g(0)=0$, $g(x_1,x_2,x_3)$ 不等于常数, 并在其上给出初始条件 $u_i\mid_{\Sigma}$, $P\mid_{\Sigma}(i=1,2,3)$, 则此初值问题存在形式解的充要条件是对 $\forall k\geqslant 1$, 有

$$
\operatorname{rank}\boldsymbol{M}_k=\operatorname{rank}\boldsymbol{M}_k=2,
$$

即

$$
\delta_2\varphi_{1,k-1}^{(4)}=\delta_1\varphi_{2,k-1}^{(4)},\quad \delta_3\varphi_{1,k-1}^{(4)}=\delta_1\varphi_{3,k-1}^{(4)},\ \delta_3\varphi_{2,k-1}^{(4)}=\delta_2\varphi_{3,k-1}^{(4)},
$$

$$
\delta=1-\delta_1u_1-\delta_2u_2-\delta_3u_3=0,\ \delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2\neq 0,
$$

其中 $\delta_l=\partial g/\partial\xi_l(l=1,2,3)$•

证明 设 $(x_1^0,x_2^0,x_3^0,x_4^0)=(0,0,0,0)\in R^4=V$

由于 $D_0=J^0(V,Z)$, 因此初始条件为:

$$
\sigma_g(\xi)=(0+\xi_1,0+\xi_2,0+\xi_3,0+g(\xi)),
$$

$$
\gamma_g(\xi)=(\sigma(\xi),u_1(\xi),u_2(\xi),u_3(\xi),u_4(\xi))\text{•}
$$

现在考虑 $k=1$, 此时 D 的 1 阶本方程 $D_1=D$, 根据前面叙述, 要根据 γ_g 来确定 $\gamma_1^{(4)}$• 并且 $\gamma_1^{(4)}$ 要满足:

$$
\gamma_1^{(4)*}\omega=0\qquad(\forall\omega\in I_1(V,Z)),
$$

$$
\gamma_1^{(4)}(\xi)\subseteq D,
$$

这里 $\omega_i=\mathrm{d}u_i-(p_1^i\mathrm{d}x_1+p_2^i\mathrm{d}x_2+p_3^i\mathrm{d}x_3+p_4^i\mathrm{d}x_4)\qquad(i=1,2,3,4)$•

因此就得到关于 $p_4^i(i=1,2,3,4)$ 的如下方程组:

$$
(*)_1:\begin{cases}
\delta p_4^1+\left(\dfrac{-\delta_1}{\rho}\right)p_4^4=\varphi_{1,0}^{(4)},\quad \delta p_4^2+\left(\dfrac{-\delta_2}{\rho}\right)p_4^4=\varphi_{2,0}^{(4)},\\
\delta p_4^3+\left(\dfrac{-\delta_3}{\rho}\right)p_4^4=\varphi_{3,0}^{(4)},\ \delta_1p_4^1+\delta_2p_4^2+\delta_3p_4^3=\varphi_{4,0}^{(4)},
\end{cases}
$$

其中

$$
\delta=1-\delta_1u_1-\delta_2u_2-\delta_3u_3,
$$

$$
\varphi_{i,0}^{(4)}=\Phi_{i,0}^{(4)}-u_1u_i(1)-u_2u_i(2)-u_3u_i(3)-\frac{1}{\rho}u_4(i)\quad(i=1,2,3),
$$

$$
\varphi_{4,0}^{(4)}=u_1(1)+u_2(2)+u_3(3),
$$

$$
\delta_l=\frac{\partial g}{\partial\xi_l}\qquad(l=1,2,3;\ i=1,2,3,4),
$$

$$
\Phi_{i,k-1}^{(4)}=F_i^{(4)}\qquad(1,2,3)\text{•}
$$

此时, 由于 $g(\xi)\neq$ 常数, 所以

$$
\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2\neq 0\text{•}
$$

根据分层结果, 要使 $\operatorname{Im}\gamma_1^{(4)}\in S_{3,0}^2(D)$ 其充分必要条件, 即 $(*)_1$ 有解的充分必要条件是:

$$\delta = 0,\quad \delta_2\varphi^{(4)}_{1,0} = \delta_1\varphi^{(4)}_{2,0},\quad \delta_3\varphi^{(4)}_{1,0} = \delta_1\varphi^{(4)}_{3,0},\quad \delta_3\varphi^{(4)}_{2,0} = \delta_2\varphi^{(4)}_{3,0}$$

因此, 在满足上述条件下, 求得 $\gamma_1^{(4)}$ 为

$$\gamma_1^{(4)}(\xi) = (\gamma_g(\xi), p_l^i(\xi)),$$

其中 p_4^i 由$(*)_1$ 决定• 而其它 $p_l^i = u_i(l) - \delta_l p_4^i$, $i = 1, 2, 3, 4$, $l = 1, 2, 3$•

在一般情况下, $k \geqslant 2$, 假设已求得 $\gamma^{(4)}_{k-1}$, 并且 $\gamma^{(4)}_{k-1}$ 满足以下条件:

$$\alpha^{k-1}_{-1}\circ\gamma^{(4)}_{k-1} = \sigma_g,\quad \alpha^{k-1}_0\circ\gamma^{(4)}_{k-1} = \gamma_g,$$

$$\gamma^{(4)*}_{k-1}\omega = 0, (\forall\omega\in I_{k-1}(V, Z)),\quad \gamma^{(4)}_{k-1}(\Delta_3)\subseteq D_{k-1}\text{•}$$

根据 $(\sigma_g, \gamma^{(4)}_{k-1})$ 重复 $k = 1$ 时以上计算过程, 即可得如下关于 $p^i_{4^k}$ 的方程组$(*)_k$:

$$(*)_k:\begin{cases}\delta p^1_{4^k} + \left(-\dfrac{\delta_1}{\rho}\right)p^4_{4^k} = \varphi^{(4)}_{1,k-1},\quad \delta p^2_{4^k} + \left(-\dfrac{\delta_2}{\rho}\right)p^4_{4^k} = \varphi^{(4)}_{2,k-1},\\ \delta p^3_{4^k} + \left(-\dfrac{\delta_3}{\rho}\right)p^4_{4^k} = \varphi^{(4)}_{3,k-1},\quad \delta_1 p^1_{4^k} + \delta_2 p^2_{4^k} + \delta_3 p^3_{4^k} = \varphi^{(4)}_{4,k-1}\text{•}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\varphi^{(4)}_{i,k-1} = \Phi^{(4)}_{i,k-1} - u_1 p^i_{4^{k-1}}(1) - u_2 p^i_{4^{k-1}}(2) - u_3 p^i_{4^{k-1}}(3) - \dfrac{1}{\rho}p^i_{4^{k-1}}(i)\quad (i = 1, 2, 3),\\ \varphi^{(4)}_{4,k-1} = p^1_{4^{k-1}}(1) + p^2_{4^{k-1}}(2) + p^3_{4^{k-1}}(3),\end{cases}\qquad (6$$

$$\delta_l = \frac{\partial g}{\partial\xi_l},\quad p^i_{j,|\lambda|}(l) = \frac{\partial p^i_{j,\lambda}(\xi)}{\partial\xi_l}\qquad (l = 1, 2, 3;\ i, j = 1, 2, 3, 4;\ |\lambda| \leqslant k - 1)\text{•}$$

(6 式中 $\Phi^{(4)}_{i,k-1}$ 的计算公式为:

$$\Phi^{(4)}_{i,k-1} = \frac{\partial\Phi^{(4)}_{i,k-2}}{\partial x_4} - p^1_4 p^i_{14^{k-2}} - p^2_4 p^i_{24^{k-2}} - p^3_4 p^i_{34^{k-2}}\quad (i = 1, 2, 3)\text{•}\qquad (7$$

记

$$\boldsymbol{M}_k = \begin{bmatrix}\delta & 0 & 0 & -\dfrac{\delta_1}{\rho}\\ 0 & \delta & 0 & -\dfrac{\delta_2}{\rho}\\ 0 & 0 & \delta & -\dfrac{\delta_3}{\rho}\\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{M}_k = \begin{bmatrix}\delta & 0 & 0 & -\dfrac{\delta_1}{\rho} & \varphi_{1,k-1}\\ 0 & \delta & 0 & -\dfrac{\delta_2}{\rho} & \varphi_{2,k-1}\\ 0 & 0 & \delta & -\dfrac{\delta_3}{\rho} & \varphi_{3,k-1}\\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & 0 & \varphi_{4,k-1}\end{bmatrix}\text{•}$$

显然, $(*)_k$ 有解的充分必要条件是:

$$\delta = 0,\quad \delta_2\varphi^{(4)}_{1,k-1} = \delta_1\varphi^{(4)}_{2,k-1},\quad \delta_3\varphi^{(4)}_{1,k-1} = \delta_1\varphi^{(4)}_{3,k-1},\quad \delta_3\varphi^{(4)}_{2,k-1} = \delta_2\varphi^{(4)}_{3,k-1}$$

即

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{M}_k = \operatorname{rank}\boldsymbol{M}_k = 2,$$

于是据此即可全决定

$$\gamma^{(4)}_k(\xi) = (\gamma^{(4)}_{k-1}(\xi), p^i_{j,\lambda_k}(\xi)),$$

其中 $p^i_{4^k}$ 由$(*)_k$ 决定, 而其它 $p^i_{j,\mu l} = p^i_{j\mu}(l) - \delta_l p^i_{j\mu-1}{}_4$, $|\mu| = k - 1$ $(l = 1, 2, 3;\ i = 1, 2, 3, 4)$•

证明完毕•

(ii)　初值问题 (C_1) 的适定性分析

该初值问题的计算均在 $W_{3,k-1}(V, Z)\subseteq G^*_3(TJ^{k-1}(V, Z))$ 的开覆盖$\{U_i\}(i = 1, 2, 3, 4)$

中的第一开集 U_1 中进行(U_2 和 U_3 与 U_1 的情况有类似的结论)•

设 $\tau \in U_1$, τ 由$J^{k-1}(V,Z)$ 在点$p(\tau)$ 的三个向量生成:

$$p(\tau)=(x_1,x_2,x_3,x_4,u_i,p^i_{j,|\lambda|}^{\lambda})\in J^{k-1}(V,Z),$$

$$\begin{cases}\eta_2=(\alpha_2,1,0,0,\hat{u}_i(2),\hat{p}^{i}_{j,|\lambda|}^{\lambda}(2)),\\ \eta_3=(\alpha_3,0,1,0,\hat{u}_i(3),\hat{p}^{i}_{j,|\lambda|}^{\lambda}(3)),\\ \eta_4=(\alpha_4,0,0,1,\hat{u}_i(4),\hat{p}^{i}_{j,|\lambda|}^{\lambda}(4))\qquad(i=1,2,3,4;\ |\lambda|\leqslant k-1;\ k\geqslant 1)\bullet\end{cases}$$

根据分层结果, 则得到 $\tau\in U_1\cap S^2_{3,k-1}(D)$ 的充要条件是:

$$-\alpha_2\varphi^{(1)}_{1,k-1}=\varphi^{(1)}_{2,k-1},\ -\alpha_3\varphi^{(1)}_{1,k-1}=\varphi^{(1)}_{3,k-1},$$
$$\alpha=-\alpha_4+u_1-\alpha_2u_2-\alpha_3u_3=0,\tag{8}$$

此即末方程 $E(S^2_{3,k-1}(D))$•

其中

$$\begin{cases}\varphi^{(1)}_{1,k-1}(\tau)=\Phi^{(1)}_{1,k-1}-p^{1}_{1}{}^{k-1}(4)-u_2p^{1}_{1}{}^{k-1}(2)-u_3p^{1}_{1}{}^{k-1}(3)\\ \varphi^{(1)}_{i,k-1}(\tau)=\Phi^{(1)}_{i,k-1}-p^{i}_{1}{}^{k-1}(4)-u_2p^{i}_{1}{}^{k-1}(2)-u_3p^{i}_{1}{}^{k-1}(3)-\dfrac{1}{\rho}p^{4}_{1}{}^{k-1}(i),\end{cases}\tag{9}$$

其中 $i=2,3$, $k=1,2,\cdots$•

(9) 中 $\Phi^{(1)}_{i,k-1}(i=1,2,3)$ 的计算公式如下:

$$\begin{aligned}\Phi^{(1)}_{i,k-1}=\frac{\partial^{k-1}F_i}{\partial x_1^{k-1}}&-C^1_{k-1}\left(p^{1}_{1}p^{i}_{1}{}^{k-1}+p^{2}_{1}p^{i}_{1}{}^{k-2}{}_2+p^{3}_{1}p^{i}_{1}{}^{k-2}{}_3\right)-\\ &C^2_{k-1}\left(p^{1}_{1}{}^{2}p^{i}_{1}{}^{k-2}+p^{2}_{1}{}^{2}p^{i}_{1}{}^{k-3}{}_2+p^{3}_{1}{}^{2}p^{i}_{1}{}^{k-3}{}_3\right)-\cdots-\\ &C^l_{k-1}\left(p^{1}_{1}{}^{l}p^{i}_{1}{}^{k-l}+p^{2}_{1}{}^{l}p^{i}_{1}{}^{k-1-l}{}_2+p^{3}_{1}{}^{l}p^{i}_{1}{}^{k-1-l}{}_3\right)-\cdots-\\ &C^{k-2}_{k-1}\left(p^{1}_{1}{}^{k-2}p^{i}_{1}{}^{2}+p^{2}_{1}{}^{k-2}p^{i}_{12}+p^{3}_{1}{}^{k-2}p^{i}_{13}\right)-\\ &\left(p^{1}_{1}{}^{k-1}p^{i}_{1}+p^{2}_{1}{}^{k-1}p^{i}_{2}+p^{3}_{1}{}^{k-1}p^{i}_{3}\right),\end{aligned}\tag{10}$$

这里带$\wedge$的符号表示的是一般意义下的情况•

定理2 设 C^∞ 超曲面 $\Sigma:\{x=x^{(0)}+h(x_2,x_3,t),h(0)=0\}\subseteq R^4$, 并在其上给出初始条件 $u_i|_\Sigma$, $P|_\Sigma$, $i=1,2,3$, 则此初值问题存在形式解的充要条件是

对 $\forall k\geqslant 1$, 有

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{N}_k=\mathrm{rank}\boldsymbol{N}_k=2,$$

即

$$-\alpha_2\varphi^{(1)}_{1,k-1}=\varphi^{(1)}_{2,k-1},\ -\alpha_3\varphi^{(1)}_{1,k-1}=\varphi^{(1)}_{3,k-1},$$
$$\alpha=u_1-u_2\alpha_2-u_3\alpha_3-\alpha_4=0,$$

其中 $\alpha_l=\partial h/\partial\xi_l(l=2,3,4)$•

证明 设 $(x_1^0,x_2^0,x_3^0,x_4^0)=(0,0,0,0)\in R^4=V$,

由于 $D_0=J^0(V,Z)$, 因此初始条件为:

$$\sigma_h(\xi)=(h(\xi)+\xi_1,0+\xi_2,0+\xi_3,0+\xi_4),$$
$$\gamma_h(\xi)=(\sigma_h(\xi),u_1(\xi),u_2(\xi),u_3(\xi),u_4(\xi))\bullet$$

现在考虑 $k=1$, 此时 D 的1阶本方程$D_1=D$, 根据前面叙述, 要根据 γ_h 来确定 $\gamma_1^{(1)}$• 并且 $\gamma_1^{(1)}$ 要满足:

$$\gamma_1^{(1)*}\omega=0\qquad(\forall\omega\in I_1(V,Z)),\quad \gamma_1^{(1)}(\xi)\subseteq D,$$

这里 $\omega_i = \mathrm{d}u_i - (p^i_1\mathrm{d}x_1 + p^i_2\mathrm{d}x_2 + p^i_3\mathrm{d}x_3 + p^i_4\mathrm{d}x_4)\ (i = 1, 2, 3, 4)$•

因此就得到如下关于 $p^i_4 (i = 1, 2, 3, 4)$ 的方程组:

$$(*)'_1: \begin{cases} \alpha p^1_1 + \dfrac{\alpha}{\rho} p^4_1 = \varphi^{(1)}_{1,0}, \quad \alpha p^2_1 + \left(\dfrac{-\alpha_2}{\rho}\right) p^4_1 = \varphi^{(1)}_{2,0}, \\ \alpha p^3_1 + \left(\dfrac{-\alpha_3}{\rho}\right) p^4_1 = \varphi^{(1)}_{3,0}, \quad p^1_1 - \alpha_2 p^2_1 + \alpha_3 p^3_1 = \varphi^{(1)}_{4,0}, \end{cases}$$

其中

$$\alpha = u_1 - u_2\alpha_2 - u_3\alpha_3 - \alpha_1,$$
$$\varphi^{(1)}_{1,0} = \Phi^{(1)}_{1,0} - u_1(4) - u_2u_1(2) - u_3u_1(3),$$
$$\varphi^{(1)}_{i,0} = \Phi^{(1)}_{i,0} - u_i(4) - u_2u_i(2) - u_3u_i(3) - \frac{1}{\rho}u_4(i) \quad (i = 2, 3),$$
$$\varphi^{(1)}_{4,0} = - u_2(2) - u_3(3),$$
$$\alpha_l = \frac{\partial h}{\partial \xi_l} \quad (l = 2, 3, 4; i = 2, 3),$$
$$\Phi^{(1)}_{i,0} = F^{(1)}_i \quad (i = 1, 2, 3)•$$

根据分层结果, 要使 $\mathrm{Im}\,\gamma^{(1)}_1 \in S^2_{3,0}(D)$ 其充分必要条件, 即$(*)'_1$有解的充分必要条件是:

$$-\alpha_2\varphi^{(1)}_{1,0} = \varphi^{(1)}_{2,0}, \quad -\alpha_3\varphi^{(1)}_{1,0} = \varphi^{(1)}_{3,0}, \quad \alpha = 0$$

因此, 在满足上述条件下, 求得 $\gamma^{(1)}_1$ 为

$$\gamma^{(1)}_1(\xi) = (\gamma_h(\xi), p^i_l(\xi)),$$

其中 p^i_1 由$(*)'_1$决定• 而其它 $p^i_l = u_i(l) - \alpha_l p^i_4 (i = 1, 2, 3, 4, l = 2, 3, 4)$•

在一般情况下, 假设已求得 $\gamma^{(1)}_{k-1}$, 并且 $\gamma^{(1)}_{k-1}$ 满足以下条件:

$$\alpha^{k-1}_{-1} \circ \gamma^{(1)}_{k-1} = \sigma_h, \quad \alpha^{k-1}_0 \circ \gamma^{(1)}_{k-1} = \gamma_h,$$
$$\gamma^{(1)*}_{k-1}\,\omega = 0 \quad (\forall\,\omega \in I_{k-1}(V, Z)); \quad \gamma^{(1)}_{k-1}(\Delta_3) \subseteq D_{k-1}•$$

根据 $(\sigma_h, \gamma^{(1)}_{k-1})$ 重复 $k = 1$ 时以上计算过, 即可得如下关于 $p^i_{1^k}(\xi)(i = 1, 2, 3, 4)$ 的方程组$(*)'_k$:

$$(*)'_k: \begin{cases} \alpha p^1_{1^k} + \dfrac{\alpha}{\rho} p^4_{1^k} = \varphi^{(1)}_{1,k-1}, \quad \alpha p^2_{1^k} + \left(\dfrac{-\alpha_2}{\rho}\right) p^4_{1^k} = \varphi^{(1)}_{2,k-1}, \\ \alpha p^3_{1^k} + \left(\dfrac{-\alpha_3}{\rho}\right) p^4_{1^k} = \varphi^{(1)}_{3,k-1}, \quad p^1_{1^k} - \alpha_2 p^2_{1^k} + \alpha_3 p^3_{1^k} = \varphi^{(1)}_{4,k-1}• \end{cases}$$

其中

$$\alpha = u_1 - u_2\alpha_2 - u_3\alpha_3 - \alpha_4,$$
$$\varphi^{(1)}_{1,k-1} = \Phi^{(1)}_{1,k-1} - p^1_{1^{k-1}}(4) - u_2p^1_{1^{k-1}}(2) - u_3p^1_{1^{k-1}}(3),$$
$$\varphi^{(1)}_{i,k-1} = \Phi^{(1)}_{i,k-1} - p^1_{1^{k-1}}(4) - u_2p^i_{1^{k-1}}(2) - u_3p^i_{1^{k-1}}(3) - \frac{1}{\rho}p^4_{1^{k-1}}(i) \quad (i = 2, 3), \qquad (11$$
$$\varphi^{(1)}_{4,k-1} = - p^2_{1^{k-1}}(2) - p^3_{4^{k-1}}(3),$$
$$\alpha_l = \frac{\partial h}{\partial \xi_l}, \quad p^i_{j,\lambda}(l) = \frac{\partial p^i_{j,\lambda}(\xi)}{\partial \xi_l},$$
$$(l = 2, 3, 4; i = 2, 3; j = 1, 2, 3, 4; |\lambda| \leqslant k - 1)•$$

(10 式中 $\Phi^{(1)}_{m,k-1}(m = 1, 2, 3)$ 的计算公式为:

$$\Phi^{(1)}_{m,k-1} = \frac{\partial \Phi^{(1)}_{m,k-2}}{\partial x_1} - p^1_1 p^i_{1^{k-2}} - p^2_1 p^i_{1^{k-2}2} - p^3_1 p^i_{1^{k-2}3} \qquad (i = 1, 2, 3)\cdot \qquad (12$$

记

$$N_k = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} \\ 0 & \alpha & 0 & \frac{-\alpha_2}{\rho} \\ 0 & 0 & \alpha & \frac{-\alpha_3}{\rho} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_k = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & \varphi^{(1)}_{1,k-1} \\ 0 & \alpha & 0 & \frac{-\alpha_2}{\rho} & \varphi^{(1)}_{2,k-1} \\ 0 & 0 & \alpha & \frac{-\alpha_3}{\rho} & \varphi^{(1)}_{3,k-1} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & \varphi^{(1)}_{4,k-1} \end{bmatrix}\cdot$$

显然, $(*)'_k$ 有解的充分必要条件是:

$$-\alpha_2 \varphi^{(1)}_{1,k-1} = \varphi^{(1)}_{2,k-1}, \quad -\alpha_3 \varphi^{(1)}_{1,k-1} = \varphi^{(1)}_{3,k-1}, \quad \alpha = 0$$

即

$$\mathrm{rank} N_k = \mathrm{rank} N_k = 2,$$

于是据此即可完全决定

$$\gamma^{(1)}_k(\xi) = (\gamma^{(1)}_{k-1}(\xi), p^i_{j,\lambda_k}),$$

其中 $p^i_{1^k}$ 由 $(*)'_k$ 决定, 而其它 $p^i_{j\mu l} = p^{i\mu}_j(l) - \alpha p^{i\mu 1}_j$, $|\mu| = k-1$, $l = 2, 3, 4$, $i = 1, 2, 3, 4\cdot$

证明完毕$\cdot$

2 计算实例

例 1 设 $\Sigma: \{t = g(\boldsymbol{x}) = x_1\} \subseteq R^4$, 则 $\delta_1 = 1$, $\delta_i = 0$, $i = 2, 3$, 取 $\boldsymbol{x}^{(0)} = \mathbf{0} \in V = R^3 \times \mathbf{R}$, 初始条件 (σ_g, γ_g) 如下:

$$\begin{cases} \sigma_g(\xi) = (\xi_1 + 0, \xi_2 + 0, \xi_3 + 0, 0 + x_1), \\ \gamma_g(\xi) = (\sigma_g(\xi), u_i(\xi)) \qquad (i = 1, 2, 3, 4), \end{cases}$$

并设 $F_1 = x_1 + x_4$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$,

$$u_1|_\Sigma = 1, \quad u_i|_\Sigma = 0 (i = 2, 3), \quad P|_\Sigma = P_0 \quad (P_0 \text{ 是常数})\cdot$$

即考虑的 Cauchy 问题为

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial x_4} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_4}{\partial x_1} - x_4 - x_1 = 0, \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_4} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_4}{\partial x_2} = 0, \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_4} + u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_4}{\partial x_3} = 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0, \quad u_1|_{t=x_1} = 1, \quad u_i|_{t=x_1} = 0\ (i = 2, 3), \quad P|_{t=x_1} = P_0, \end{cases}$$

求这问题的形式解, 其计算过程如下:

根据 (σ_g, γ_g) 的定义, 必须有 $\mathrm{Im}\,\gamma_g \subseteq D_0$, $\gamma^*_g \omega = 0\ (\forall \omega \in I_0(V, Z))$, 因此初始值 $u_i(\xi)$ $(i = 1, 2, 3)$ 必须满足

$$\begin{cases} \varphi^{(4)}_{2,0} = F_2 - u_1 u_1(1) - u_2 u_1(2) - u_3 u_1(3) - \frac{1}{\rho} u_4(2) = 0, \\ \varphi^{(4)}_{3,0} = F_3 - u_1 u_1(1) - u_2 u_1(2) - u_3 u_1(3) - \frac{1}{\rho} u_4(3) = 0\cdot \end{cases}$$

于是可求得 $p_4^4 = -\rho\varphi_{1,0}^{(4)}$, $p_4^1 = \varphi_{4,0}^{(4)}$, $\varphi_{1,0}^{(4)}$, $\varphi_{4,0}^{(4)}$ 的计算公式见(6)• 而 p_4^2, p_4^3 可设任意值• 其余的

$$p_l^i = u_i(l) - \delta p_4^i = \frac{\partial u_i(\xi)}{\partial \xi_l} - \delta p_4^i \qquad (i = 1, 2, 3, 4;\ l = 1, 2, 3)\,•$$

$k \geqslant 2$, 要确定 $p_{j,|\lambda|}^{i\lambda}(\xi)(i, j = 1, 2, 3, 4;\ |\lambda| \leqslant k - 1)$, 即要求确定 $\gamma_k^{(4)}(\xi)$ 满足末方程(2 式•

于是可求得 $p_4^{4_k} = \rho\varphi_{1,k-1}^{(4)}$, $p_4^{1_k} = \varphi_{4,k-1}^{(4)}$, $\varphi_{1,k-1}^{(4)}$, $\varphi_{4,k-1}^{(4)}$ 的计算公式见(6)• 而 $p_4^{2_{k-1}}, p_4^{3_{k-1}}$ 可设任意值• 其余的 $p_{j,|\lambda|}^{i\lambda} = p_j^{i\lambda}(l) - \delta p_j^{i_{\lambda-1}}{}_4$, $i, j = 1, 2, 3, 4$, $l = 1, 2, 3$, $|\lambda| \leqslant k - 1$•

求出所有的 $p_{j,|\lambda|}^{i\lambda}(\xi)$, $k \geqslant 1$ 之后, 可得到形式解为

$$u_i(x) \sim \sum_{|\lambda|} \frac{1}{\lambda!} A_j^{i\lambda}(0) x^\lambda \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

其中

$$x^\lambda = x_1^\lambda + x_2^\lambda + x_3^\lambda + x_4^\lambda, \quad |\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4,$$

$$A_j^{i\lambda}(0) = p_{j,|\lambda|}^{i\lambda}(0)\,•$$

通过上述计算过程, 至少可得到三组有限形式的形式解:

$$\boldsymbol{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_3^{(1)} \\ p^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1x_2 - x_1x_3 + x_3x_4 - x_2x_4 \\ x_1x_2 - x_1x_3 + x_3x_4 - x_2x_4 \\ P_0 + \rho\left(x_1x_4 + \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{3}{2}x_4^2\right) \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ u_3^{(2)} \\ p^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}x_1^2x_2 - \frac{1}{2}x_1^2x_3 - x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + \frac{1}{2}x_2x_4^2 - \frac{1}{2}x_3x_4^2 \\ \frac{1}{2}x_1^2x_2 - \frac{1}{2}x_1^2x_3 - x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + \frac{1}{2}x_2x_4^2 - \frac{1}{2}x_3x_4^2 \\ P_0 + \rho\left(x_1x_4 + \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{3}{2}x_4^2\right) \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{u}^{(3)} = \begin{pmatrix} u_1^{(3)} \\ u_2^{(3)} \\ u_3^{(3)} \\ p^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \rho\left(\frac{1}{2}x_1^2x_2 - \frac{1}{2}x_1^2x_3 - x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + \frac{1}{2}x_2x_4^2 - \frac{1}{2}x_3x_4^2\right) \\ \rho\left(\frac{1}{2}x_1^2x_2 - \frac{1}{2}x_1^2x_3 - x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + \frac{1}{2}x_2x_4^2 - \frac{1}{2}x_3x_4^2\right) \\ P_0 + \rho\left(x_1x_4 + \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{3}{2}x_4^2\right) \end{pmatrix}\,•$$

例 2 设 $\Sigma: \{x_1 = 0\} \subseteq R^4$, 则 $\alpha_i = 0$, $i = 2, 3, 4$, 取 $x^{(0)} = 0 \in V = R^3 \times \mathbf{R}$, 初始条件$(\sigma_h, \gamma_h)$如下:

$$\begin{cases} \sigma_h(\xi) = (0 + 0, \xi_2 + 0, \xi_3 + 0, 0 + \xi_4), \\ \gamma_h(\xi) = (\sigma_h(\xi), u_i(\xi))(i = 1, 2, 3, 4), \end{cases}$$

并设 $F_1 = x_2 + x_4$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$,

$$u_i|_\Sigma = 0 \qquad (i = 1, 2, 3);\ P|_\Sigma = P_0 \qquad (P_0 \text{ 是常数})\,•$$

即考虑的 Cauchy 问题为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_4}+u_1\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}+u_2\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}+u_3\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u_4}{\partial x_1}-x_4-x_2=0,\\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_4}+u_1\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}+u_2\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}+u_3\dfrac{\partial u_2}{\partial x_3}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u_4}{\partial x_2}=0,\\ \dfrac{\partial u_3}{\partial x_4}+u_1\dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}+u_2\dfrac{\partial u_3}{\partial x_2}+u_3\dfrac{\partial u_3}{\partial x_3}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u_4}{\partial x_3}=0,\\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}+\dfrac{\partial u_3}{\partial x_3}=0,\quad u_i\mid_{x_1=0}=0\ (i=1,2,3),\quad P\mid_{x_1=0}=P_0\cdot\end{cases}$$

求这问题的形式解, 其计算过程如下:

根据 (σ_h, γ_h) 的定义, 必须有 $\operatorname{Im}\gamma_h\subseteq D_0$, $\gamma_h^*\omega=0$, $\forall\omega\in I_0(V,Z)$, 因此初始值 $u_i(\xi)$, $i=1,2,3$ 必须满足

$$\begin{cases}\varphi_{2,0}^{(1)}=F_2-u_2(4)-u_2u_2(2)-u_3u_2(3)-\dfrac{1}{\rho}u_4(2)=0,\\ \varphi_{3,0}^{(4)}=F_3-u_3(4)-u_2u_3(2)-u_3u_3(3)-\dfrac{1}{\rho}u_4(3)=0\cdot\end{cases}$$

于是可求得 $p_1^4=-\rho\varphi_{1,0}^{(1)}$, $p_1^1=0$, $\varphi_{1,0}^{(1)}$, 的计算公式见(9)• 而 p_1^2, p_1^3 可设任意值• 其余的

$$p_l^i=u_i(l)-\alpha_l p_1^i=\frac{\partial u_i(\xi)}{\partial\xi_l}-\alpha_l p_1^i\qquad(i=1,2,3,4,\ l=2,3,4)\cdot$$

$k\geqslant 2$, 要确定 $p^i_{j;\lambda,|\lambda|}(\xi)\,(i,j=1,2,3,4;\ |\lambda|\leqslant k-1)$, 即要求确定 $\gamma_k(\xi)$ 满足末方程(8 式•

于是可求得 $p_{1^k}^4=\rho\varphi_{1,k-1}^{(1)}$, $p_{1^k}^1=\varphi_{4,k-1}^{(1)}$ 的计算公式见(11)• 而 $p_{1^{k-1}}^2, p_{1^{k-1}}^3$ 可设任意值• 其余的 $p^i_{j;\lambda,|\lambda|}=p_j^{i\lambda}(l)-\alpha_l p_j^{i\lambda-1}$, $i,j=1,2,3,4$, $l=2,3,4$, $|\lambda|\leqslant k-1$•

求出所有的 $p^i_{j;\lambda,|\lambda|}(\xi)\,(k\geqslant 1)$ 之后, 可得到形式解为

$$u_i(x)\sim\sum_{|\lambda|}\frac{1}{\lambda!}A_j^{i\lambda}(0)x^\lambda\qquad(i=1,2,3,4),$$

其中

$$x^\lambda=x_1^{\lambda}+x_2^{\lambda}+x_3^{\lambda}+x_4^{\lambda},\ |\lambda|=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4\qquad(i=1,2,3,4),$$

$$A_j^{i\lambda}(0)=p^i_{j;\lambda,|\lambda|}(0)\cdot$$

通过上述计算过程, 至少可得到三组有限形式的形式解:

$$\boldsymbol{u}^{(1)}=\begin{pmatrix}u_1^{(1)}\\ u_2^{(1)}\\ u_3^{(1)}\\ p^{(1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -x_1x_4\\ x_2^1+\dfrac{1}{2}x_1^2x_4^2\\ p_0+\rho(x_1x_2+x_1x_4)\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{u}^{(2)}=\begin{pmatrix}u_1^{(2)}\\ u_2^{(2)}\\ u_3^{(2)}\\ p^{(2)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -x_1x_4\\ \rho\left(x_2^1+\dfrac{1}{2}x_1^2x_4^2\right)\\ p_0+\rho(x_1x_2+x_1x_4)\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{u}^{(3)} = \begin{pmatrix} u_1^{(3)} \\ u_2^{(3)} \\ u_3^{(3)} \\ p^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_1x_4 \\ 0 \\ P_0 + \rho(x_1x_2 + x_1x_4) \end{pmatrix}.$$

3 小　　结

1　由本文和[5]可知,若要求 Eluer 方程在 $\left\{t = t^{(0)} + g(x)\right\} \subseteq R^4$ 和 $\left\{x_i = x_i^{(0)} + h(x_2, x_3, t)\right\} \subseteq R^4$ 超曲面上的初值问题是适定的,则需要有对 Σ 以及在 Σ 上的初值的限制•

2　当给定 $\Sigma \subseteq R^4$, $u_i\mid_\Sigma$, F_i 并且构成一个不适定问题,就可以构造任意多组形式解•

从构造过程中可以看出由于例 1 中的 $p_4^{2k}, p_4^{3k}, k \geqslant 1$ 和例 2 中的 $p_1^{2k}, p_1^{3k}, k \geqslant 1$ 的任意设置性,则使得构造任意多组形式解成为可能•

3　在一般情况下,方程中所含的参数往往是至关重要的•　但从本文中的两个例子中,可以看出参数 ρ 对于 Eluer 方程不适定的初值问题并没有起到所期望的作用•

本文和[5],已完成构造 Eluer 方程所有不适定初值问题的形式解及计算方法•

致谢　在本文的撰写和修改过程中,得到了钱伟长院士的热心帮助和指导,作者在此表示衷心的感谢•　导师施惟慧教授在成稿工程中给予作者的热忱关怀,无私帮助和悉心指导,在此表示感谢之情•

[参　考　文　献]

[1] SHIH Wei_hui. Solutions Analytiques de Quelques Equations aux Derives Partielles en Mecanique des Fluides[M]. Paris: Hermann, 1992.

[2] JIU Quan_sen, GU Jin_sheng. Some estimates on 2_D Euler equations[J]. Advances in Mathematics, 1999, **28**(1): 55—63.

[3] 酒全森. 二维 Eluer 方程的弱解存在性[J]. 汕头大学学报(自然科学版), 1995, **10**(2): 28—35.

[4] 尹会成, 仇庆久. 关于不可压缩的 Eluer 方程的一类解[J]. 数学年刊 A 辑(中文版), 1996, (4): 495—506.

[5] 沈臻. 关于不可压、无粘流体的 Eluer 方程初值问题的适定性(Ⅰ)[J]. 应用数学和力学, 2003, **24**(5): 484—492.

[6] Landau J, Lifchitz E. Mecanique des Fluides[M]. Moscou: Editions Mir, 1971.

[7] 施惟慧, 陈达段, 何幼桦. 分层理论与非线性偏微分方程基础[M]. 上海: 上海大学出版社, 2001.

[8] Baouendi S, Gulaouic C. Probeme de Cauchy[A]. In: Seminaire Schwarz[C]. Parie: Parie 11, Expose 22. 1997, 97—117.

[9] Ehresmann Ch. Introduction a la theorie de structures infinitesimales et des pseudo_groupes de lie[A]. In: Geometrie Diffierentielle de Collques du C N R S[C]. Strasdourg: Colloques du C N R S, 1953, 97—117.

On the Well Posedness of Initial Value Problem for Euler Equations of Incompressible Inviscid Fluid(Ⅱ)

SHEN Zhen
(Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200436, P. R. China

Abstract: The solvability of the Euler equations about imcompressible inviscid flow based on the stratification theory is discussed. And the conditions for the existence of formal solutions and the methods are presented for calculating all kinds of ill_posed initial value problems. Two examples are given as the evidence that the initial problems at the hyper surface does not exist any unique solution.

Key words: Euler equation; ill_posed problem; formal solution; equation secondaire