

文章编号: 1000-0887(2003) 05_0505_07

基于哈密顿体系的平面无限解析元^{*}

孙雁^{1*}, 周钢², 刘正兴¹

(1. 上海交通大学 工程力学系, 上海 200030;
2. 上海交通大学 应用数学系, 上海 200030)

(钟万勰推荐)

摘要: 在有限元法中, 无限域的问题不便于处理求解。但无限域往往可以由规则的无限外域再加上有限的局部域组成。将无限域问题中的有限局部域用有限元法处理, 在规则的无限外域中建立极坐标系, 将规则无限域问题导向哈密顿体系, 利用本征向量展开的方法, 推导出一种新的半解析无限解析元, 其刚度阵是精确的。该单元可用常规方法作为一个超级有限单元与有限的局部域连接。数值计算结果表明, 该单元具有精度高, 应用方便, 数据处理非常简单的特点。对无限域问题的数值求解有重要意义。该方法可推广到三维无限域问题中。

关键词: 无限域; 无限元; 哈密顿体系; 本征向量展开; 有限元
中图分类号: O343 **文献标识码:** A

引 言

结构工程中会遇到一些无限域问题, 如隧道、地基工程等。另外许多实际工程计算中, 当被关心的计算对象几何尺寸较小, 而周围结构的几何尺寸相对很大而且几何形状很规则时, 计算模型有可能被简化为结构处于无限域的问题。无限大在解析解的解决范围是十分有限的^[1~3], 因此许多实际课题要用有限元法来计算。对付无限域问题, 在有限元法处理中, 对应的方法是采用无限元^[4~5], 或者是在结构周围划出一个较大的区域, 用有限单元近似地模拟无限域。无限元是为了描述远场的弹性性质的。远场的区域往往已成为规则的形状。对于规则形区域, 其实正是分离变量法与本征向量展开^[6~7]求解的用武之地。本征函数展开是解析法, 由此得到的无限规则域刚度就是精确的。这对于无限域问题的数值求解有重要意义。

本文在处理无限域问题时, 首先以一定的半径 R 画圆, 将问题划分成内部的有限局部域和外部的无限规则域。有限局部域用常规的有限元法来处理。对于规则的无限外域问题将其导向哈密顿体系^[8]。由此就可利用分离变量法和本征向量展开法, 推导出一种新的无限解析元。然后将该单元作为一个超级单元或作为一个子结构与有限局部域连接。这样整个无限域问题中的规则无限区域就处理成了一个单元, 而该无限单元的刚度阵是精确的。采用无限解析元处理无限域问题可大大提高计算精度, 降低计算工作量。

* 收稿日期: 2001_02_10; 修订日期: 2002_12_24

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10132020); 上海市科学技术委员会资助项目(00QA14013)

作者简介: 孙雁(1965—), 女, 上海人, 副教授, 博士(E-mail: sunyan07@sh163c.sta.net.cn)

1 问题的描述

图1是一典型的扇形域。对于一个具体的无限域问题,我们总能找到一个合适的、确定的 R ,然后作圆弧,作为区分有限局部区域和无限规则外域的分界线。如图1所示,以 R_1 为半径的扇形域内即为有限局部区域,在有限局部区域内,可用常规有限元法来处理,其坐标系可根据结构特点另行建立。当 $R_2 \rightarrow \infty$ 时, R_1 对应的圆弧线之外就是规则的无限外域了。本文将针对这一规则无限外域在极坐标系中进行讨论。为方便起见,这里只讨论以 $\theta = 0$ 为对称的情况。

考虑图1所示的扇形无限规则区域:

$$R_1 \leq r \leq R_2 \rightarrow \infty \quad (-\Theta \leq \theta \leq \Theta).$$

采用极坐标, u, v 分别表示径向和环向位移,可

写出H_R变分原理

$$\delta \int_{-\Theta}^{\Theta} \int_{R_1}^{R_2} \left[\alpha_r \frac{\partial u}{\partial r} + \alpha_\theta \left(\frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \tau_\theta \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{2E} (\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 - 2\nu\sigma_r\sigma_\theta) + 2(1+\nu)\tau_\theta^2 \right] r dr d\theta = 0. \quad (1)$$

引入变换 $\xi = \ln r$,并引进变量 $S_r = r\alpha_r, S_\theta = r\tau_\theta, S_0 = r\alpha_\theta$,于是方程(1)成为

$$\delta \int_{-\Theta}^{\Theta} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left[S_r \frac{\partial u}{\partial \xi} + S_0 \left(u + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + S_\theta \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} - v + \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{2E} (S_r^2 + S_\theta^2 - 2\nu S_r S_\theta) + 2(1+\nu) S_0^2 \right] d\xi d\theta = 0. \quad (2)$$

区域就成为 $\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2, -\Theta \leq \theta \leq \Theta$,其中 u, v, S_r, S_θ, S_0 为独立变函数。

将方程(2)先对 S_0 取max,有

$$\nu S_r + E \left(u + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) = S_0, \quad (3)$$

代入式(1),消去 S_0, u, v 是位移, S_r, S_θ 为其对偶变量,令

$$\mathbf{q} = (u, v)^T, \quad \mathbf{p} = (S_r, S_\theta)^T, \quad (4)$$

再用一点代表对 ξ 的微商,于是得到哈密尔顿体系的变分原理

$$\delta \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{-\Theta}^{\Theta} [\mathbf{p}^T \mathbf{q}' - H(\mathbf{q}, \mathbf{p})] d\xi d\theta = 0, \\ H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = S_r \left[\nu u + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] - S_\theta \left[\frac{\partial u}{\partial \theta} - v \right] - \frac{E}{2} \left(u + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{2E} [(1-\nu^2) S_r^2 + 2(1+\nu) S_r S_\theta], \quad (5)$$

将变分原理展开,得到对偶方程组

$$\mathbf{v}' = \mathbf{H}\mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{D} \\ -\mathbf{B} & -\mathbf{A}' \end{bmatrix}, \quad (6)$$

其中

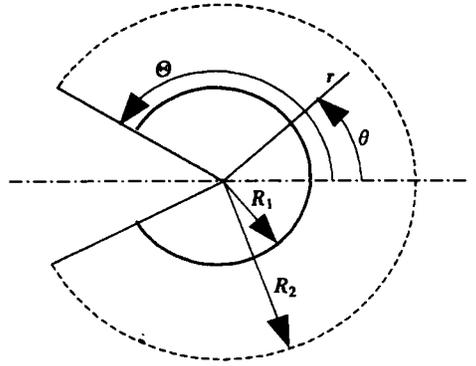


图1 无限规则外域示意图

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} -\frac{(1-\nu^2)}{E} & 0 \\ 0 & -\frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -E & -E \left(\frac{d\bullet}{d\theta} \right) \\ \frac{d}{d\theta}(E\bullet) & \frac{d}{d\theta} \left(E \frac{d\bullet}{d\theta} \right) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -\nu & -\nu \frac{d\bullet}{d\theta} \\ -\frac{d\bullet}{d\theta} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} -\nu & \frac{d\bullet}{d\theta} \\ \frac{d}{d\theta}(\nu\bullet) & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \right. \quad (7)$$

以及在 $\theta = 0$ 处的对称条件或反对称条件:

$$v = 0, \quad S_{r,0} = 0 \quad (\text{当 } \theta = 0 \text{ 时}) \quad (8a)$$

或

$$u = 0, \quad \frac{dv}{d\theta} + \nu \frac{S_r}{E} = 0 \quad (\text{当 } \theta = 0 \text{ 时}) \quad (8b)$$

和在 $\theta = \ominus$ 的自由边界条件:

$$S_{\theta} = 0, \quad u + \frac{dv}{d\theta} + \nu \frac{S_r}{E} \quad (\text{当 } \theta = \ominus \text{ 时}) \quad (9)$$

方程(6)是齐次的,利用分离变量法,有

$$v_i = \Psi_i e^{\mu \xi}, \quad \mathbf{H} \Psi = \mu \Psi, \quad \Psi_i = \begin{bmatrix} q_i \\ p_i \end{bmatrix}, \quad (10)$$

式中 Ψ_i 是本征函数向量,只是 θ 的函数.

2 本征值与本征函数向量

限于篇幅,本文以无缺陷全圆情况为例说明推导过程.其它问题方法类同.此时侧边界条件(9)应当用周期条件取代,即

$$\begin{cases} u(\xi - \pi) = u(\xi, \pi), & v(\xi - \pi) = v(\xi, \pi), \\ S_r(\xi - \pi) = S_r(\xi, \pi), & S_{\theta}(\xi - \pi) = S_{\theta}(\xi, \pi). \end{cases} \quad (11)$$

根据本征方程(10),可解出对应的本征解.由于有周期性和对称的要求,本征根 μ 必然是 $0, \pm 1, \pm 2, \dots$.考虑无限域 ξ 的取值范围, $\xi \rightarrow \infty$,只有 $\text{Re}(\mu) < 0$ 的本征解是适当的.本征向量解为:

$$\begin{cases} u = A_u \cos(1 + \mu)\theta + C_u \cos(1 - \mu)\theta, \\ v = A_v \sin(1 + \mu)\theta + C_v \sin(1 - \mu)\theta, \\ S_r = A_r \cos(1 + \mu)\theta + C_r \cos(1 - \mu)\theta, \\ S_{\theta} = A_{\theta} \sin(1 + \mu)\theta + C_{\theta} \sin(1 - \mu)\theta. \end{cases} \quad (12)$$

本征解按 $\theta = \pi/2$ 可分为对称变形和反对称变形两组.常数 $A_u, A_v, \dots, C_{\theta}$ 应满足方程(10), (11),有

$$A_r = -A_{\theta}, \quad A_u = -A_v, \quad \mu A_v = (1 + \nu)A_{\theta}/E, \quad (13)$$

$$\begin{cases} E\mu(1 - \mu)C_u + (-3 + \nu + \mu + \mu\nu)C_{\theta} = 0, \\ (1 - \mu)C_r - (3 - \mu)C_{\theta} = 0, \\ E\mu(1 - \mu)C_v + (3 - \nu + \mu + \mu\nu)C_{\theta} = 0, \end{cases} \quad (14)$$

取 $A_v = 1$,其余常数可由(13),(14)式确定.

3 无限解析元的刚度矩阵

在以上推导的基础上,将规则的扇形无限外域处理成一个超级单元,推导出刚度阵,这样就可以和有限元法结合了。而这个无限大扇形外域单元是用上述分析法来求解的,因此称之为无限解析元。

考虑以 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi/2$ 为对称变形的情况。在 $0 \leq \theta \leq \Theta = \pi/2$ 内设有 n_r 个节点与结构的有限元节点相连,平面问题每个节点有两个位移 u, v , 但 $\theta = 0$ 的 1 号节点只有 u , $\theta = \pi/2$ 的 n_r 号节点也只有 u , 因此该超级单元共有 $2n_r - 2$ 个出口位移。与此对应,应该有 $2n_r - 2$ 个本征解。即

$$v(\xi, \theta) = \sum_{i=1}^{2n_r-2} a_i \Psi_i e^{(\mu_i \xi)}, \quad (15)$$

其中 a_i ($i = 1, 2, \dots, 2n_r - 2$) 为待定常数, $\mu_i = -i$ ($i = 1, 2, \dots, (2n_r - 2)$)。

根据与结构有限元节点相连接的 n_r 个点的 $2n_r - 2$ 个位移,可以将待定常数 a_i ($i = 1, 2, \dots, 2n_r - 2$) 确定。即位移向量顺次取成 $(u_1 = 1; u_2 = 0; v_2 = 0; u_3 = 0; 0; \dots)^T, (u_1 = 0; u_2 = 1; v_2 = 0; u_3 = 0; 0; \dots)^T, (0; 0; 1; 0; 0; \dots)^T, \dots$ 共 $2n_r - 2$ 组位移向量时,由式(15)可以解出 $2n_r - 2$ 组常数 a_i 。将这些常数按列组成 $(2n_r - 2) \times (2n_r - 2)$ 的矩阵 T , 它可以将扇形无限超级单元的出口位移转换到 a_i 。

计算单元刚度阵就是计算整个单元的变形能,而变形能即为式(2)中的泛函。将式(15)代入式(2)中的泛函,利用分部积分及解式(15)已满足全部方程及边界条件的特点,有单元变形能

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{\Theta} [S_r(\theta) u(\theta) + S_{\theta}(\theta) v(\theta)] d\theta = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{R}_a \mathbf{a}, \quad (16)$$

式中 \mathbf{a} 是由 a_i ($i = 1, 2, \dots, 2n_r - 2$) 所组成的向量, \mathbf{R}_a 为相对 \mathbf{a} 而言的单元刚度阵,

$$(\mathbf{R}_a)_{ij} = \int_0^{\Theta} [S_{ri}(\theta) u_j(\theta) + S_{r\theta i}(\theta) v_j(\theta)] d\theta. \quad (17)$$

为了从 \mathbf{a} 变换到出口位移向量 $\mathbf{d} = (u_1; u_2; v_2; \dots; u_{n_r})^T$, 则有

$$\mathbf{a} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{d}, \quad \mathbf{K}_e = \mathbf{T}^T \mathbf{R}_a \mathbf{T}, \quad (18)$$

\mathbf{K}_e 就是超级单元的刚度矩阵了。本征函数向量的共轭辛正交关系保证了刚度阵的对称性。注意此时单元局部坐标是极坐标,当与结构有限元相连,需进行坐标变换。组装方式与一般的有限单元完全一样。在计算得到超级单元出口位移以后,用式(18)计算 \mathbf{a} , 由式(15)、(3)可得到出口节点的 S_r, S_{θ} 和 S_0 , 然后就得到出口节点应力分量的计算结果。对无限规则区域的应力值计算,只需输入相应点的极坐标值,根据式(15)、(3)就可计算得到对应的应力分量值,而此时的计算结果是沿径向解析的,具有良好的计算精度。这样,一个无限大的规则区域在导向哈密顿体系后,就可化归成一个无限解析单元了,这不仅大大简化了计算工作量,同时由于该单元的解析性质,大大提高了计算精度。这一点可以由后面的数算例看出。

4 数值算例

算例 1

如图 2 所示,计算对象为一圆筒结构处于无限大区域内,圆筒内边界受均布内压,外边界

受均布外压。假设 $q_1 = 100 \text{ N/m}^2$, $q_2 = 200 \text{ N/m}^2$ 。圆筒的材料常数为 $E_1 = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, $\nu_1 = 0.3$; 圆筒外无限大弹性体的弹性常数为 $E_2 = 2 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, $\nu_2 = 0.35$ 。圆筒结构内径为 1.2 m , 外径为 2.0 m 。根据对称性, 取图 2 中的 $1/4$ 为计算对象, 取半径 $R = 1.0 \text{ m}$ 的圆为无限规则外域与内部有限域的分界线。有限元与无限解析元的计算模型如图 3 所示。整个扇形无限外域用一个 5 节点的无限解元处理, R_2 取值可趋于无穷; 其内部有限域用有限元处理, 图 3 中的 1, 2, ..., 5 既是无限解析元的节点号, 也是有限单元的节点号。计算结果如表 1 所示。本文解的计算模型共划分了 8 个有限单元, 一个无限单元, 15 个节点; 表中有有限元解的计算模型区域半径取为 10 m , 全部采用有限元计算, 共划分了 80 个单元, 99 个节点。当有限元网格加密时, 发现有限元解向本文解靠拢。

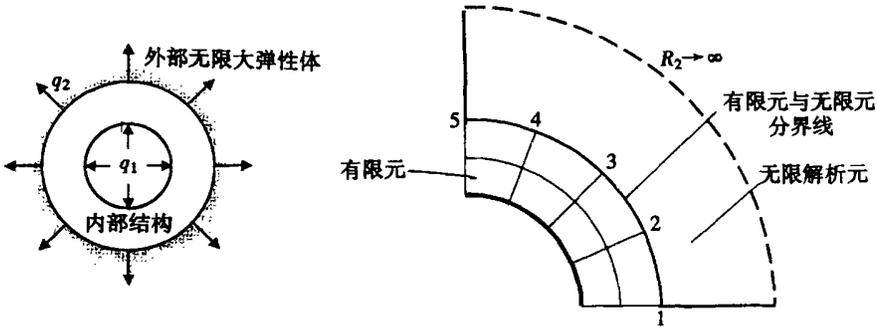


图 2 内部结构(圆筒)在无限大弹性体中

图 3 含无限解析元的计算模型

表 1 应力计算结果 单位: N/m^2

应 力		半径 R / m					
		0.8	1.0 (内部结构)	1.2	1.5	2.0	3.0
有限元解	$\sigma_r / (\text{N/m}^2)$	65.26	110.36	- 18.68	- 13.60	- 6.49	- 3.48
	$\sigma_\theta / (\text{N/m}^2)$	552.02	450.04	18.99	13.86	6.99	2.87
本文解	$\sigma_r / (\text{N/m}^2)$	69.05	114.56	- 19.11	- 12.23	- 6.88	- 3.06
	$\sigma_\theta / (\text{N/m}^2)$	560.29	457.36	19.11	- 12.23	6.88	- 3.06

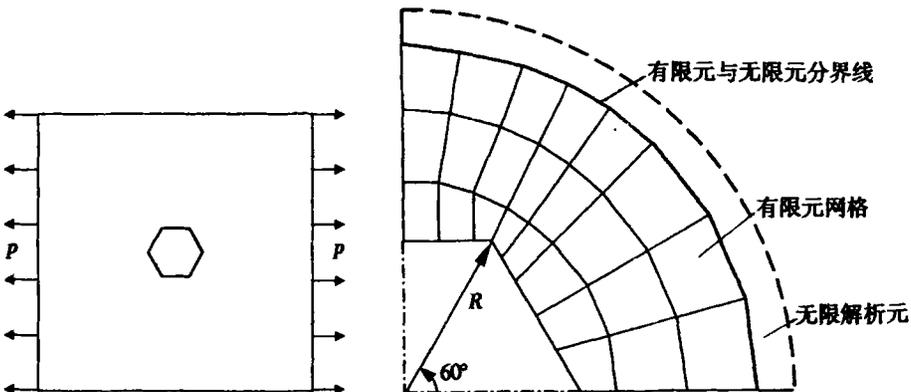


图 4 无限大薄板孔口问题

图 5 含无限解析元的计算模型

算例 2

无限大薄板的孔口问题。薄板受单向均匀拉伸, $p = 100 \text{ N/m}$ 。孔口形状如图 4 所示, 是一正六边形, 取高度为 1 m, 宽度为 0.866 m。按对称性, 如图 4 中的 1/4 为计算对象, 计算模型如图 5。假设 $E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, $\nu = 0.3$ 。在孔口不规则区域采用有限元处理, 在外部规则区域采用无限解析元处理, 有限区域和无限区域的分界线如图 5。计算结果如表 2。表 2 中, 本文解对应的计算模型如图 5, 有限单元数为 24 个, 另加一个无限解析元, 节点总数为 36。表中的有限元解, 为在距孔口较远处划出一较大区域, 全部采用有限元计算的计算结果。其中, 有限元 1 代表计算模型的区域半径取 5.0 m, 单元总数为 80, 节点总数为 99 时的计算结果; 有限元 2 代表计算模型区域半径取 10.0 m, 单元总数 104 为, 节点总数为 126 的计算结果。当区域取大, 单元加密时, 发现有限元计算结果向本文解靠拢。

表 2 应力计算结果 单位: N/m^2

$\theta = 60^\circ$	本文解		有限元解 1		有限元解 2	
	$\sigma_x / (\text{N/m}^2)$	$\sigma_y / (\text{N/m}^2)$	$\sigma_x / (\text{N/m}^2)$	$\sigma_y / (\text{N/m}^2)$	$\sigma_x / (\text{N/m}^2)$	$\sigma_y / (\text{N/m}^2)$
R / m						
0.5	302.54	84.41	308.90	85.51	304.04	84.79
0.6	173.67	6.08	177.50	5.45	175.54	6.12
0.8	140.62	-0.75	142.93	-2.03	140.62	-1.18
1.0	120.93	-1.02	129.60	-3.51	127.59	-2.64
1.5	110.67	-1.47	115.13	-3.25	113.62	-2.47
2.0	106.18	-1.03	109.20	-2.25	108.04	-1.59
3.0	102.81	-0.53	104.06	-1.07	103.84	-0.92
5.0	101.02	-0.20	100.30	-0.54	101.53	-0.42
8.0	100.40	-0.08	—	—	100.36	-0.07
10.0	100.25	-0.05	—	—	100.08	-0.13

5 结 论

由数值算例可以看出, 用无限解析元处理无限规则外域, 具有良好的计算精度, 这是由该单元解析的性质决定的。同时, 对于一个无限大的规则外域, 仅需用一个单元来处理, 这大大地简化了数据准备工作, 降低计算工作量。本文中的算例, 只是对无限解析元的正确性及其性能给予了验证和初步的体现。但由此可以看出, 这种无限解析元的优越性和潜在的应用前景。这种方法完全可以推广到三维无限域问题中。

[参 考 文 献]

- [1] 徐芝纶. 弹性力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1990.
- [2] Timoshenko S P, Goodier J N. Theory of Elasticity [M]. 3rd Ed. New York: McGraw_Hill, 1970.
- [3] Sokolnikoff I S. Mathematical Theory of Elasticity [M]. 2nd Ed. New York: McGraw_Hill, 1956.
- [4] Zienkiewicz O C, Taylor R W. The Finite Element Method [M]. Vol 2. 4th Ed. New York: McGraw_Hill, 1989.
- [5] 应隆安. 无限元方法[M]. 北京: 北京大学出版社, 1992.

- [6] ZHONG Wan_xie, Williams F W. Physical interpretation of the symplectic orthogonality of the eigen-solutions of a Hamiltonian or symplectic matrix[J]. Computers & Structures, 1993, 49(4): 749—750.
- [7] ZHONG Wan_xie. LIN Jia_hao. QU Chun_hang. The eigenvalue problem of the chain of identical sub-structures[J]. Acta Mechanica Sinica, 1991, 7(2): 169—177.
- [8] 钟万勰. 弹性平面扇形域问题及哈密顿体系[J]. 应用数学和力学, 1994, 15(12): 1057—1066.

Plane Infinite Analytical Element and Hamiltonian System

SUN Yan¹, ZHOU Gang², LIU Zheng_xing¹

(1. Department of Engineering Mechanics, Shanghai Jiaotong University,
Shanghai 200030, P. R. China;

2. Department of Applied Mathematics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, P. R. China)

Abstract: It is not convenient to solve those engineering problems defined in an infinite field by using FEM. An infinite area can be divided into a regular infinite external area and a finite internal area. The finite internal area was dealt with by the FEM and the regular infinite external area was settled in a polar coordinate. All governing equations were transformed into the Hamiltonian system. The methods of variable separation and eigenfunction expansion were used to derive the stiffness matrix of a new infinite analytical element. This new element, like a super finite element, can be combined with commonly used finite elements. The proposed method was verified by numerical case studies. The results show that the preparation work is very simple, the infinite analytical element has a high precision, and it can be used conveniently. The method can also be easily extended to a three-dimensional problem.

Key words: infinite field; infinite analytical element; Hamiltonian system; method of eigenfunction expansion; FEM