应用数学和力学, 第 24 卷 第 5 期(2003 年 5 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2003) 05_0512_07

压电热弹性动力学的 Gurtin 型分区变分原理

黄 泊

(北京理工大学 应用力学系, 北京 100081)

(酷江推荐)

摘要: 建立有关压电热弹性动力学的各种 Gurtin 型分区变分原理, 由此变分原理可以得到压电热弹性动力学所有方程式、关系式和边界条件, 并且可以直接得到各相邻区域交界面上的连续条件 Gurtin 型分区变分原理是压电热弹性动力学的重要组成部分, 并能反映压电热弹性动力学初值_边值问题的全部特征

关 键 词: 压电热弹性动力学; 变分原理; 分区变分原理

中图分类号: O343.1 文献标识码: A

引 言

弹性动力学的微分方程可以通过对时间变量的卷积而被变换成积分微分方程[1~3] 这种方法原则上也可以用于压电材料的动力学方程 对于压电热弹性体的动力理论, Nowacki[4,5], Chandrasekharaiah[6], Iesan[7] 等人曾进行了一些研究 但是, 有关压电热弹性动力学的各种分区变分原理至今还没有系统建立 罗恩和邝君尚虽然建立了关于压电热弹性动力学的各种简化 Gurtin 型变分原理[8] 但美中不足的是, 各种动力学简化 Gurtin 型变分原理中必然包含速度项, 加速度项和反映初始条件的体积分项, 这些项目不便于近似计算 Gurtin 型变分原理不显含速度项和加速度项, 并将初始条件并入到运动方程中简化了体积分项, 这些优点使 Gurtin 型变分原理更适合作为动力学有限单元法的理论基础 本文系统地建立了有关压电热弹性动力学的各种 Gurtin 型分区变分原理, 由此变分原理可以得到由简化 Gurtin 型变分原理能得到的所有方程和边界条件, 并且可以直接得到各相邻区域交界面上的连续条件 Gurtin 型分区变分原理是压电热弹性动力学的重要组成部分, 并能反映压电热弹性动力学初值_边值问题的全部特征

1 压电热弹性动力学的基本方程和条件

设压电热弹性体所在区域为 V, 其边界为 S, V 为三维空间的正则区域 对于压电热弹性体动力学, 其基本方程、边界条件、初始条件和连续条件如下:

应变位移关系

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{1}$$

收稿日期: 2001_01_20; 修订日期: 2003_01_20
作者简介: 黄泊(1958) , 男, 副教授, 已发表论文十余篇(Tel: 010- 62399298)

运动方程

$$t * \quad_{ij,j} + \quad f_i = \quad u_i, \tag{2}$$

其中$f_i = \quad t * f_i + \quad t u_{0i} + \quad u_{0i}$,* 表示对时间的卷积

Maxwell 方程

对于拟静电场有:

$$D_{i,i} = \quad_e, \tag{3a}$$

$$E_i = - \quad_{,i}, \tag{3b}$$

式中 D_i 为电位移, E_i 为电场强度, 为电位, $_e$ 为体电荷密度

热梯度温度关系

$$g_i = \quad_{,i}, \tag{4}$$

热传导方程

$$q_i = - \quad k_{ij} \, g_j, \tag{5a}$$

$$g_i = - \quad_{ij} \, q_j, \tag{5b}$$

本构方程

$$_{ij} = \quad E_{ijkl} \, e_{kl} - \quad_{kij} \, E_k - \quad_{ij} \tag{6a}$$

或

$$e_{ij} = \quad C_{ijkl} \quad_{kl} - \quad_{kij} \, D_k + \quad_{ij} \quad, \tag{6b}$$

$$D_i = \quad_{ijk} \, e_{jk} + \quad a_{ij} \, E_j + \quad d_i \quad, \tag{7a}$$

或

$$E_i = \quad_{ijk} \quad_{jk} + \quad b_{ij} D_j + \quad e_i \quad, \tag{7b}$$

式中 $E_{ijkl}, C_{ijkl}, \ _{kij}, \ _{kij}, \ _{ij}, \ _{ij}, a_{ij}, b_{ij}, d_i$ 和 e_i 均为材料常数

电焓 $H(e_{ij}, E_i, \ )$ 和余电焓 $(\ _{ij}, D_i, \ )$ 分别定义为

$$H(e_{ij}, E_i, \ ) = \frac{1}{2} E_{ijkl} \, e_{ij} * \ e_{kl} - \frac{1}{2} a_{ij} \, E_i * \ E_j - \quad_{kij} \, E_k * \ e_{ij} -$$

$$\quad_{ij} \, e_{ij} * \quad - \ d_i E_i * \quad - \frac{c_{\mathrm{e}}}{2T_1} \ * \quad, \tag{8a}$$

$$(\ _{ij}, D_i, \ ) = \frac{1}{2} D_{ijkl} \quad_{ij} * \quad_{kl} - \frac{1}{2} b_{ij} \, D_i * \ D_i - \quad_{kij} \, d_k * \quad_{ij} +$$

$$\quad_{ij} \quad_{ij} * \quad - \ e_i D_i * \quad - \frac{c}{2T_1} \ * \tag{8b}$$

式中 $= T - T_1, T$ 为绝对温度, T_1 为绝对参考温度, c_e 为无应变比热, c 为无应力比热

能量方程

$$q_{i,i} + \quad c_{\mathrm{e}} \quad + \quad_{ij} T_1 e_{ij} + \ d_i T_1 E_i = \ r, \tag{9a}$$

$$q_{i,i} + \quad c \quad + \quad_{ij} T_1 \quad_{ij} - \ e_i T_1 D_i = \ r \tag{9b}$$

其中 r 为单位体积内热源的热产生率

边界条件

位移边界条件 $\qquad u_i = u_i \qquad (S \quad S_u),$ (10)

应力边界条件 $\qquad _{ij} n_j = P_i \qquad (S \quad S_p),$ (11)

电位边界条件 $\qquad = \qquad (S \quad S \ ),$ (12)

电位移边界条件 $\qquad D_i n_i = D \qquad (S \quad S_D),$ (13)

温度边界条件 $\qquad = \qquad (S \quad S \ ),$ (14)

热流边界条件 $q_i n_i = Q_i \quad (S \quad S)$, (15)

并且

$$S_u \quad S_P = S \quad S_D = S \quad S_Q =$$

初始条件

$$t_1 = 0,$$

$$u_i(t_1) = u_{0i}, \tag{16}$$

$$u_i(t_1) = u_{0i}, \tag{17}$$

$$(t_1) = {}_0, \tag{18}$$

$$(t_1) = {}_0 \tag{19}$$

交界面 S_0 上的连续条件

交界面位移连续条件 $u_i^{(m)} = u_i^{(m)}$, (20)

交界面应力连续条件 ${}_{ij}^{(m)} n_j^{(m)} + {}_{ij}^{(m)} n_j^{(m)} = 0$, (21)

交界面电位连续条件 ${}^{(m)} = {}^{(m)}$, (22)

交界面电位移连续条件 $D_i^{(m)} n_i^{(m)} + D_i^{(m)} n_i^{(m)} = 0$, (23)

交界面温度连续条件 ${}^{(m)} = {}^{(m)}$, (24)

交界面热流连续条件 $q_i^{(m)} n_i^{(m)} + q_i^{(m)} n_i^{(m)} = 0$ (25)

从(9a),(17),(18)和(19)可得

$$1 * q_{i,i} + c_e + {}_{ij} T_1 e_{ij} + d_i T_1 E_i = R, \tag{26}$$

$$R = 1 * r + c_e {}_0 + {}_{ij} T_1 u_{0i,j} - d_i T_1 {}_{0,i} \tag{27}$$

2 分区变分原理

2.1 9 类变量分区变分原理

这里只讨论动力学问题,各个变量均是时间 t 的函数,设压电热弹性体可以分为 n 个部分,即 $V_m (m = 1, 2, \quad, n)$, V_m 和 V_m 的交界面为 S_0,在任意时刻 t,设在 S_0 上从 V_m 指向 V_m 的法向单位矢量为 $n_i^{(m)}(t)$,从 V_m 指向 V_m 的法向单位矢量为 $n_i^{(m)}(t)$,则有

$$n_i^{(m)}(t) = - n_i^{(m)}(t) \tag{28}$$

对于互不相关得任意函数 u_i, ${}_{ij}$, , D_i, , q_i,由散度定理可得用卷积表示的积分恒等式

$$\int_V \left(\frac{1}{2} u_j * u_j + t * {}_{ji} * u_{j,i} + t * D_i * {}_{,i} + t * \frac{1}{T_1} * q_i * {}_{,i} \right) \mathrm{d}V + \int_V \left(- \frac{1}{2} u_j * u_j + t * {}_{ji,i} * u_j + t * D_{i,i} + t * \frac{1}{T_1} * q_{i,i} * \right) \mathrm{d}V - \int_S \left(t * {}_{ji} * u_j + t * D_i * + t * \frac{1}{T_1} * q_i * \right) n_i \mathrm{d}S = 0 \tag{29}$$

和分区积分恒等式

$$\sum_{m=1}^{n} \left\{ \int_{V_m} \left(\frac{1}{2} u_j * u_j + t * {}_{ji} * u_{j,i} + t * D_i * {}_{,i} + t * \frac{1}{T_1} * q_i * {}_{,i} \right) \mathrm{d}V + \int_{V_m} \left(- \frac{1}{2} u_j * u_j + t * {}_{ji,i} * u_j + t * D_{i,i} * + t * \frac{1}{T_1} * q_{i,i} * \right) \mathrm{d}V - \int_{S_m} \left(t * {}_j * u_j + t * D_i * + t * \frac{1}{T_1} * q_i * \right) n_i \mathrm{d}S - \right.$$

$$\int_{S_0}\left[t * \ {}_{ji}^{(m)} * \ u_j^{(m)} + \ t * \ D_i^{(m)} * \quad {}^{(m)} + \ t * \ \frac{1}{T_1} * \ q_i^{(m)} * \quad {}^{(m)} \right] n_i^{(m)} \mathrm{d}S \Big\} = \ 0 \tag{30}$$

对于互不相关的任意函数 $_{ij}, e_{ij}, D_i, E_i$, 下列以卷积表示的积分关系式恒成立

$$\int_{V_m}\Big[A(\ {}_{ij}, e_{ij}, D_i, E_i, \ ) - \ {}_{ij} * \ e_{ij} + \ D_i * \ E_i + H(e_{ij}, E_i, \ ) + \quad (\ {}_{ij}, D_i, \ )\Big] \mathrm{d}V = \ 0 \tag{31}$$

式中

$$A(\ {}_{ij}, e_{ij}, D_i, E_i, \ ) = \frac{1}{2}(\ {}_{ij} - \ E_{ijkl}e_{kl} + \ {}_{kij}E_k + \ {}_{ij}\ ) * \ (e_{ij} - \ C_{ijkl}\ {}_{kl} + \ {}_{kij}D_k - \ {}_{ij}\ ) - \frac{1}{2}(D_i - \ {}_{ijk}e_{jk} - \ a_{ij}E_j - \ d_i\ ) * \ (E_i - \ {}_{ijk}\ {}_{jk} - \ b_{ij}D_j - \ e_i\ )$$

对于互不相关的任意函数 q_i, g_i , 下列以卷积表示的积分关系式恒成立

$$\int_{V_m}\left[C(q_i, g_i) - \ \frac{1}{T_1} * \ q_i * \ g_i - \ \frac{k_{ij}}{2T_1} * \ g_i * \ g_j - \ \frac{{}_{ij}}{2T_1} * \ q_i * \ q_j \right] \mathrm{d}V = \ 0, \tag{32}$$

其中

$$C(q_i, g_i) = \ \frac{1}{2T_1}(q_i + \ k_{ij}g_i) * \ (g_i + \ {}_{ij}q_j),$$

对于互不相关得任意函数 $u_i, \ {}_{ij}, \ \ , D_i, \ \ , q_i$, 下列积分关系式在交界面上成立

$$\begin{aligned} - \int_{S_0}\left[t * \ {}_{ij}^{(m)} * \ u_j^{(m)} + \ t * \ D_i^{(m)} \ {}^{(m)} + \ t * \ \frac{1}{T_1} * \ q_i^{(m)} * \ {}^{(m)} \right] n_i^{(m)} \mathrm{d}S = \\ \int_{S_0} t * \Big\{\big[(\ {}_{ji}^{(m)} n_i^{(m)} + \ {}_{ji}^{(m\,)} n_i^{(m\,)}) * \ u_j^{(m\,)} - \ {}_{ji}^{(m)} n_i^{(m)} * \ u_j^{(m)}\big] - \\ (\ {}_{ji}^{(m)} n_i^{(m)} + \ {}_{ji}^{(m\,)} n_i^{(m\,)}) * \ u_j^{(m)}\Big\} \mathrm{d}S + \\ \int_{S_0} t * \Big\{(D_i^{(m)} n_i^{(m)} + \ D_i^{(m\,)} n_i^{(m\,)}) * \ {}^{(m\,)} - \ D_i^{(m)} n_i^{(m)} * \ {}^{(m)} - \\ (D_i^{(m)} n_i^{(m)} + \ D_i^{(m\,)} n_i^{(m\,)}) * \ {}^{(m\,)}\Big\} \mathrm{d}S + \\ \int_{S_0} t * \ \frac{1}{T_1} * \Big\{(q_i^{(m)} n_i^{(m)} + \ q_i^{(m\,)} n_i^{(m\,)}) * \ {}^{(m\,)} - \ q_i^{(m)} n_i^{(m)} * \ {}^{(m)} - \\ (q_i^{(m)} n_i^{(m)} + \ q_i^{(m\,)} n_i^{(m\,)}) * \ {}^{(m\,)}\Big\} \mathrm{d}S \end{aligned} \tag{33}$$

为在变分中直接得到交界面上的连续条件, 设定变分约束条件如下

$$ {}_{ij}^{(m)} = \ 0, \quad D_i^{(m\,)} = \ 0, \quad q_i^{(m\,)} = \ 0 \tag{34}$$

将关系式(31), (32), (33) 代入恒等式(30), 经整理可得

$$ {}_9(\ {}_{ij}, e_{ij}, u_i, D_i, E_i, \ , q_i, g_i, \ ) + \ {}_9(\ {}_{ij}, e_{ij}, u_i, D_i, E_i, \ , q_i, g_i, \ ) = \ 0, \tag{35}$$

其中泛函 $_9$ 和 $_9$ 分别为

$$\begin{aligned} {}_9 = \sum_{m=1}^{n}\Big\{ \int_{V_m}\Big\{ \frac{1}{2}\ u_j * \ u_j + \ t * \ {}_{ij} * \left[\frac{1}{2}(u_{i,j} + \ u_{j,i} - \ e_{ij})\right] + \\ t * \ D_i * \ (\ {}_{,i} + \ E_i) + \ t * \ H(e_{ij}, E_i, \ ) + \\ t * \ \frac{1}{T_1} * \ q_i * \ (\ {}_{,i} - \ g_i) - \ t * \ \frac{k_{ij}}{2T_1} * \ g_i * \ g_j - \\ f_j * \ u_j + \ t * \ {}_e * \quad + \ t * \ \frac{R}{T_1} * \Big\} \mathrm{d}V + \ {}_B^m + \ {}_{IB}^m \Big\} \end{aligned} \tag{36}$$

$$
{}_9 = \sum_{m=1}^{n}\left\{\int_{V_m}\left\{-\frac{1}{2} u_j * u_j + (t * {}_{ij*} + f_j) * u_j + t * (D_{i,i} - {}_e) * + \right.\right.
$$

$$
t * ({}_{ij}, D_i,) + t * A({}_{ij}, e_{ij}, E_i, D_i,) + t * (\frac{1}{T_1} * q_{i,i} - \frac{R}{T_1}) * -
$$

$$
\left.\left. t * \frac{{}^{ij}}{2T_1} * q_i * q_j + t * C(q_i, g_i)\right\} \mathrm{d}V + {}^m_B + {}^m_{IB}\right\} \tag{37}
$$

在上两式中分别有

$$
{}^m_B = \int_{S_{mP}} t * (- P_j) * u_j \mathrm{d}S + \int_{S_{mu}} t * (u_j - u_j) * {}_{ji} n_i \mathrm{d}S +
$$

$$
\int_{S_{mD}} t * (- D) * \mathrm{d}S + \int_{S_m} t * (-) * D_i n_i \mathrm{d}S +
$$

$$
\int_{S_{mQ}} t * (- Q) * \mathrm{d}S + \int_{S_m} t * \frac{1}{T_1} * (-) * q_i n_i \mathrm{d}S , \tag{38}
$$

$$
{}^m_B = -\left\{\int_{S_{mP}} t * ({}_{ji} n_i - P_j) * u_j \mathrm{d}S + \int_{S_{mu}} t * u_j * {}_{ji} n_i \mathrm{d}S + \right.
$$

$$
\int_{S_{mD}} t * (D_i n_i - D) * \mathrm{d}S + \int_{S_m} t * * D_i n_i \mathrm{d}S +
$$

$$
\left. \int_{S_{mQ}} t * (q_i n_i - Q) * \mathrm{d}S + \int_{S_m} t * \frac{1}{T_1} * * q_i n_i \mathrm{d}S \right\}, \tag{39}
$$

$$
{}^m_{IB} = \int_{S_0} t * \left\{\left({}^{(m)}_{ji} n^{(m)}_i + {}^{(m)}_{ji} n^{(m)}_i\right) * u^{(m)}_j - {}^{(m)}_{ji} n^{(m)}_i * u^{(m)}_j\right\} \mathrm{d}S +
$$

$$
\int_{S_0} t * \left\{\left(D^{(m)}_i n^{(m)}_i + D^{(mc)}_i n^{(mc)}_i\right) * \mathrm{U}^{(mc)} - D^{(m)}_i n^{(m)}_i * \mathrm{U}^{(m)}\right\} \mathrm{d}S +
$$

$$
Q_{S_0} t * \frac{1}{T_1} * \left\{\left(q^{(m)}_i n^{(m)}_i + q^{(mc)}_i n^{(mc)}_i\right) * \mathrm{H}^{(mc)} - q^{(m)}_i n^{(m)}_i * \mathrm{H}^{(m)}\right\} \mathrm{d}S, \tag{40}
$$

$$
\#^m_{IB} = - Q_{S_0} t * \left\{\left(\mathrm{R}^{(m)}_{ji} n^{(m)}_i + R^{(mc)}_{ji} n^{(mc)}_i\right) * u^{(mc)}_j + \right.
$$

$$
\left(D^{(m)}_i n^{(m)}_i + D^{(mc)}_i n^{(mc)}_i\right) * \mathrm{U}^{(mc)} +
$$

$$
\left. \frac{1}{T_1} * \left(q^{(m)}_i n^{(m)}_i + q^{(mc)}_i n^{(mc)}_i\right) * \mathrm{H}^{(mc)}\right\} \mathrm{d}S \# \tag{41}
$$

定理 1 当且仅当 $\mathrm{R}_{ij}, e_{ij}, u_i, D_i, E_i, U, q_i, g_i, H$ 是混合问题(1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (10) ~ (26) 式的解, 则必定满足下列变分式

$$
\mathrm{D}\,0_9 = 0 \quad 或 \quad \mathrm{D}\,\#_9 = 0\# \tag{42}
$$

证 将(36) 式对自变函数 $\mathrm{R}_{ij}, e_{ij}, u_i, D_i, E_i, U, q_i, g_i, H$ 变分, 可得

$$
\mathrm{D}\,0_9 = \underset{m=1}{\overset{n}{6}}\left\{Q_{V_m}\left\{\left({}_Q u_j - t * \mathrm{R}_{ji,i} - \Theta_j\right) * \mathrm{D}u_j + t * (Q_e - D_{i,i}) * \mathrm{D}U + \right.\right.
$$

$$
t * \left(\frac{5H}{5H} - \frac{1}{T_1} * q_{i,i} * + \frac{R}{T_1}\right) * \mathrm{D}H + t * \left(\frac{5H}{5e_{ij}} - R_{ij} *\right) \mathrm{D}e_{ij} +
$$

$$
t * \left[\frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) - e_{ij}\right] * \mathrm{D}R_{ij} + t * (U_{,i} + E_i) * \mathrm{D}D_i +
$$

$$
t * \left(\frac{5H}{5E_i} + D_i *\right) \mathrm{D}E_i + t * (H_{,i} - g_i) * \mathrm{D}q_i -
$$

$$t*\left(\frac{1}{T_1}*q_i+\frac{k_{ij}}{T_1}*g_i\right)*\mathrm{D}g_i\Big\}\mathrm{d}V+Q_{S_{mP}}t*(\mathrm{R}_{ji}n_i-P_j)*\mathrm{D}u_j\mathrm{d}S+$$

$$Q_{S_{mP}}t*(u_j-u_j)*\mathrm{DR}_{ji}n_j\mathrm{d}S+Q_{S_{mP}}t*(D_in_i-D)*\mathrm{DU}\mathrm{d}S+$$

$$Q_{S_{mP}}t*(U-U)*\mathrm{D}u_j\mathrm{d}S+Q_{S_{mP}}t*(q_in_i-Q)*\mathrm{DH}\mathrm{d}S+$$

$$Q_{S_{mP}}t*\frac{1}{T_1}*(H-H)*\mathrm{D}q_in_i\mathrm{d}S+Q_{S_0}t*\left[\left(\mathrm{R}_{ji}^{(m)}n_i^{(m)}+\mathrm{R}_{ji}^{(mc)}n_i^{(mc)}\right)*\mathrm{D}u_j^{(mc)}+\right.$$

$$\left(u_j^{(mc)}-u_j^{(m)}\right)*\mathrm{DR}_{ji}^{(m)}n_i^{(m)}+\left(D_i^{(m)}n_i^{(m)}+D_i^{(mc)}n_i^{(mc)}\right)*\mathrm{DU}^{(mc)}+$$

$$\left(U^{(mc)}-U^{(m)}\right)*\mathrm{DD}_i^{(m)}n_i^{(m)}+\frac{1}{T_1}*\left(q_i^{(m)}n_i^{(m)}+q_i^{(mc)}n_i^{(mc)}\right)*\mathrm{DH}^{(mc)}+$$

$$\left.\frac{1}{T_1}*(H^{(mc)}-H^{(m)})*\mathrm{D}q_i^{(m)}n_i^{(m)}\right]\mathrm{d}S\Big\}\#\tag{43}$$

充分性　若 $\mathrm{R}_{ij}, e_{ij}, u_i, D_i, E_i, U, q_i, g_i, H$ 是混合问题(1)~(26)式的解，则(43)式必定为零，即(42)式成立#

必要性　若(42)式成立，在(43)式中，由于 $\mathrm{DR}_{ij}, De_{ij}, Du_i, DD_i, DE_i, DU, Dq_i, Dg_i, DH$ 的任意性，故可得(1)，(2)，(3)，(4)，(5a)，(6a)，(7a)，(10)~(15)，(20)~(26)，即 $\mathrm{R}_{ij}, e_{ij}, u_i, D_i, E_i, U, q_i, g_i, H$ 是混合问题(1)~(26)的解#

0_9 和 $\#_9$ 分别是9类变量 Gurtin 型变分原理的势能形式和余能形式的泛函# 对于互不相关的任意函数 $\mathrm{R}_{ij}, e_{ij}, u_i, D_i, E_i, U, q_i, g_i, H$，它们之间满足关系式(35)#

2.2　6类变量分区变分原理

当 $\mathrm{R}_{ij}, e_{ij}, D_i, E_i$，满足(6a)和(7a)式，$q_i, g_i$ 满足(5a)式，(35)式变成为

$$0_6(\mathrm{R}_{ij}, u_i, D_i, U, q_i, H)+\#_6(\mathrm{R}_{ij}, u_i, D_i, U, q_i, H)=0,\tag{44}$$

而泛函 0_6 和 $\#_6$ 分别为

$$0_6=\sum_{m=1}^{n}\Big\{Q_{V_m}\Big\{\frac{1}{2}\mathrm{Q}u_j*u_j+t*\mathrm{R}_{ij}*u_{i,j}+t*D_i*\mathrm{U}_{,i}-t*7(\mathrm{R}_{ij}, D_i, H)+$$

$$t*\frac{1}{T_1}*q_i*\mathrm{H}_{,i}+t*\frac{\mathrm{K}_{ij}}{2T_1}*q_i*q_j-\mathrm{Q}f_j*u_j+t*\mathrm{Q}e\,U+$$

$$t*\frac{R}{T_1}*\mathrm{H}\Big\}\mathrm{d}V+0_B^m+0_{IB}^m\Big\},\tag{45}$$

$$\#_6=\sum_{m=1}^{n}\Big\{Q_{V_m}\Big\{-\frac{1}{2}\mathrm{Q}u_j*u_j+(t*\mathrm{R}_{ji,i}+\mathrm{Q}f_j)*u_j+t*(D_{i,i}-\mathrm{Q}e)*\mathrm{U}+$$

$$t*7(\mathrm{R}_{ij}, D_i, H)+t*\left(\frac{1}{T_1}*q_{i,i}-\frac{R}{T_1}\right)*\mathrm{H}-$$

$$t*\frac{\mathrm{K}_{ij}}{2T_1}*q_i*q_j\Big\}\mathrm{d}V+\#_B^m+\#_{IB}^m\Big\}\#\tag{46}$$

定理2　当且仅当 $\mathrm{R}_{ij}, u_i, D_i, U, q_i, H$ 是混合问题(2)，(3a)，(10)~(25)及下式

$$u_{i,j}=C_{ijkl}\mathrm{R}_{kl}-A_{kij}D_k+G_{ij}H,\tag{47}$$

$$-U_{,i}=A_{ikl}\mathrm{R}_{kl}+b_{ij}D_j+e_iH,\tag{48}$$

$$\mathrm{H}_{,i}=-K_{ij}q_j,\tag{49}$$

$$R=1*q_{i,i}+\mathrm{Q}cRH+G_{ij}T_1\mathrm{R}_{ij}-e_iT_1D_i\tag{50}$$

的解,则必定满足变分式 D0_6 = 0 或 D#$_6$ = 0#

0_6 和 #$_6$ 分别是 6 类变量 Gurtin 型变分原理的势能形式和余能形式的泛函# 对于互不相关的任意函数 R_{ij}, u_i, D_i, U, q_i, H,它们之间满足关系式(44)#

[参 考 文 献]

[1] Eringen A C, Suhubi E S. Elastodynamics[M]. New York: Academic Press, 1975.

[2] Ignaczak J. A completeness problem for stress equations of motion in the linear elasticity theory[J]. Arch Mech Stosowanej, 1963, 15(9): 956) 964.

[3] Gurtin M E. Variational principles for linear elastodynamics[J]. Arch Rational Mach Anal, 1964, 16(1): 34) 50.

[4] Nowacki W. Some general theorems of thermopiezoelectricity[J]. J Thermal Stress, 1978, 1(2): 171) 182.

[5] Nowacki W. Thermoelasticity[M]. 2nd Ed. Oxford: Pergamon Press, 1986.

[6] Chandrasekharaiah D S. A generalized linear thermoelasticity theory for piezoelectric media[J]. Acta Mechanica, 1988, 71(1): 39) 49.

[7] Iesan D. On some theorems in thermopiezoeletricity[J]. J Thermal Stress, 1989, 12(2): 209) 223.

[8] 罗恩,邝君尚. 压电热弹性动力学的一些基本原理[J]. 中国科学, A 辑, 1999, 29(9): 851) 858.

Gurtin_Type Region_Wise Variational Principles for Thermopiezoelectric Elastodynamics

HUANG Bo

(Department of Applied Mechanics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, P.R.China)

Abstract: The variation of new Gurtin_type region_wise variational principles results in continuous conditions, boundary conditions, all equations and relations in linear thermopiezoelectric elastodynamics. Gurtin_type region_wise variational principles comprise very important parts of linear thermopiezoelectric elastodynamics, and can fully characterize the initial_boundary_value problem in linear thermopiezoelectric elastodynamics.

Key words: thermopiezoelectric elastodynamics; variational principle; region_ wise variational principle