

文章编号: 1000-0887(2003) 05_0529_08

小垂度粘弹性索非线性响应及振动主动控制*

李映辉¹, 高庆¹, 殷学纲²

(1 西南交通大学 应用力学与工程系, 成都 610031; 2. 重庆大学 工程力学系, 重庆 400044)

(张汝清推荐)

摘要: 研究具有初始应力的小垂度粘弹性索的非线性动态响应及振动主动控制。在假定索材料的本构关系为一般微分本构类型的基础上, 建立小垂度粘弹性索的运动微分方程; 应用 Galerkin 方法将其转化为可用 Runge_Kutta 数值积分方法求解的一系列三阶非线性常微分方程。在仅考虑面内的横向振动及忽略非线性的情况下得到了连续状态空间中的状态方程, 将状态方程离散为差分方程形式, 并用矩阵指数来逐步近似状态转移矩阵; 基于二次性能指标的最小化得到了最优的控制力与状态向量。最后通过数值仿真研究说明了粘性参数对索动态响应的影响。

关键词: 小垂度粘弹性索; Revlon 材料; 动力响应; 振动主动控制

中图分类号: TU501; TU511.3⁺2 文献标识码: A

引 言

由于索具有高强度、轻质量、柔性大、固有阻尼小在工程中被广泛应用。它可用来支承结构, 传输材料, 拖动车辆等。因此索的动力分析模型在索的动态响应分析及振动控制中起到非常重要的作用。

近二十年来, 很多学者对索及索结构的非线性振动及其动力稳定性行为进行了研究, 并且在文献中可以找到大量的关于索的固有频率^[1], 非线性自由振动^[2]及强迫振动^[3]的报道。Takahashi^[4]研究了索的线性参数稳定性, 并给出了共振的不稳定区域。Perkins^[5]利用摄动分析方法研究了由于索的支座移动而引起的索的非线性参数振动问题。Mote 和 Perkins^[6]研究了运动索在三维空间中的振动。

在所有的这些研究中, 都假设索的材料为线弹性的情况下进行的, 但是随着新的塑性材料和复合材料在工程上的广泛应用, 并且大多数材料并不满足 Hooke 定律。Coleman 和 Noll 证明在小变形条件下, 简单各向同性材料可以用积分或微分类型的线性粘弹性模型描述。同时, 很多工程设计也需要了解结构的粘弹性行为^[7, 8, 9], 例如: 磁带的蠕变分析, 导管的振动、带锯的运动等问题。并且为了克服金属索过重而引起的大垂度, 以及金属索易于生锈被腐蚀的缺点, 粘弹性的索、弦和带在工程中得到了应用。关于粘弹性弦和粘弹性带的动力学特性已经引起了人们的关注, Fung 和 Huang^[7, 8]等研究了运动粘弹性弦的瞬时运动, Zhang 和 Zu^[9]讨论了参

* 收稿日期: 2002_05_18; 修订日期: 2003_01_06

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(5936140); 国家教委博士点基金资助项目; 航空工业总公司基金资助项目

作者简介: 李映辉(1964—), 男, 四川南江人, 博士, 副教授(E-mail: li_yinghui@sina.com)。

数激励运动带动力学响应及动力稳定性。但是文献中尚未见关于粘弹性索的动力学特性及振动控制方面的报道。本文研究小垂度粘弹性索的非线性动力响应及振动主动控制。建立了小垂度粘弹性索的运动微分方程及连续状态空间中的状态方程;基于二次性能指标的最小化得到了最优的控制力与状态向量。数值仿真研究材料参数对索动态响应的影响。

1 控制微分方程

1.1 静态平衡构形

如图 1,假设研究的索是均匀,轴向应变很小,轴向应力在横截面均匀分布,横截面面积为 A ,长度为 L ,索与水平线夹角为 θ ,质量密度为 ρ 。由于材料的弹性模量很高,因此可以认为索的静态平衡构形在重力作用面内为抛物线,于是

$$\begin{cases} w^{(s)} = \frac{1}{2}(\gamma L^2 / \sigma^{(s)})[(x/L) - (x/L)^2], \\ u^{(s)} = 0, v^{(s)} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

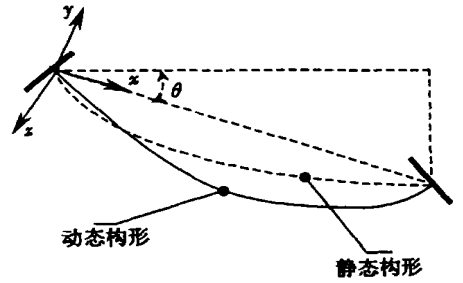


图 1 粘弹性索模型系统

其中, $u^{(s)}$, $v^{(s)}$, $w^{(s)}$ 分别为静态平衡构形中索在轴向,面外和面内的位移, $\sigma^{(s)}$ 为静态平衡构形中索的轴向应力, γ 为索的重力在 y 轴方向的分量,即:

$$\gamma = \rho g \cos \theta, \quad (2)$$

其中, g 是重力加速度常量 (9.81 m/s^2)。

1.2 Reylon 材料本构方程

Reylon 材料的一维本构方程为^[7]:

$$\sum_{j=0}^R a_j \frac{d^j \sigma}{dt^j} = \sum_{j=0}^P b_j \frac{d^j \varepsilon}{dt^j} \quad (a_0 \neq 0, b_0 \neq 1) \quad (3)$$

方程(3)也可表示为:

$$A \sigma = B \varepsilon,$$

其中算子 A 和 B 定义如下:

$$A = \sum_{j=0}^R a_j \frac{d^j}{dt^j}, \quad B = \sum_{j=0}^P b_j \frac{d^j}{dt^j}.$$

对三参数模型,其线性粘弹性材料的微分本构关系为:

$$\sigma + \frac{E_1 + E_2}{\eta_2} \sigma = E_1 \varepsilon + \frac{E_1 E_2}{\eta_2} \varepsilon \quad (5)$$

由方程(3)与方程(5)得到

$$\begin{aligned} a_0 &= (E_1 + E_2) / \eta_2, \quad a_1 = 1, \\ b_0 &= E_1 E_2 / \eta_2, \quad b_1 = E_1, \quad R = 1, \quad P = 1 \end{aligned}$$

1.3 运动方程

索运动的偏微分方程可以根据静态轴向应力 $\sigma^{(s)}$, 动态轴向应力 σ , 索的轴向位移 u , 面外位移 v , 面内位移 w , 在 x, y, z 方向的分布力 X, Y, Z 表示为^[10]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ (\sigma^{(s)} + \sigma) \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma \right\} + X = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

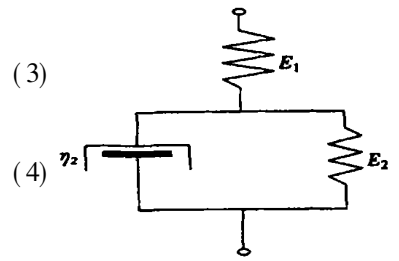


图 2 线性粘弹性材料模型

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (\sigma^{(s)} + \sigma) \frac{\partial v}{\partial x} \right\} + Y &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (\sigma^{(s)} + \sigma) \frac{\partial w}{\partial x} + \sigma \frac{\partial w^{(s)}}{\partial x} \right\} + Z &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (6a, b, c)$$

在 x 轴方向的 Lagrangian 应变分量 $\varepsilon(x, t)$ 可以用位移 u, v, w 表示为:

$$\varepsilon(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w^{(s)}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2. \quad (7)$$

由于张紧索的轴向惯性力很小可以忽略, 并假设分布力 X 为 0, 根据上述两假设, 与位移 u 相关的应变很小, 方程 (6), (7) 分别简化为:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0. \quad (8)$$

$$\varepsilon(x, t) = \frac{\partial w^{(s)}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2. \quad (9)$$

对方程 (6) 作用微分算子 A , 并使用方程 (4), (8), (9) 得到由位移 v, w 表示的运动控制偏微分方程及位移边界条件:

$$\begin{aligned} a_0 \sigma^{(s)} v_{xx} + a_1 \sigma^{(s)} v_{xxt} + b_0 v_{xx} (w_x^{(s)} w_x + 0.5 v_x^2 + 0.5 w_x^2) + \\ b_1 v_{xx} (w_x^{(s)} w_{xt} + v_x v_{xt} + w_x w_{xt} + \\ b_0 v_x (w_{xx}^{(s)} w_x + w_x^{(s)} w_{xx} + v_x v_{xx} + w_x w_{xx}) + \\ b_1 v_x (w_{xx}^{(s)} w_{xt} + w_x^{(s)} w_{xxt} + v_{xx} v_{xt} + v_x v_{xxt} + w_{xx} w_{xt} + w_x w_{xxt}) + \\ a_0 Y + a_1 Y_t = a_0 \rho u + a_1 \rho u_t, \end{aligned} \quad (10a)$$

$$\begin{aligned} a_0 \sigma^{(s)} w_{xx} + a_1 \sigma^{(s)} w_{xxt} + b_0 w_{xx} (w_x^{(s)} w_x + 0.5 v_x^2 + 0.5 w_x^2) + \\ b_1 w_{xx} (w_x^{(s)} w_{xt} + v_x v_{xt} + w_x w_{xt}) + b_0 w_x (w_{xx}^{(s)} w_x + w_x^{(s)} w_{xx} + v_x v_{xx} + w_x w_{xx}) + \\ b_1 w_x (w_{xx}^{(s)} w_{xt} + w_x^{(s)} w_{xxt} + v_{xx} v_{xt} + v_x v_{xxt} + w_{xx} w_{xt} + w_x w_{xxt}) + \\ w_{xx}^{(s)} [b_0 (w_x^{(s)} w_x + 0.5 v_x^2 + 0.5 w_x^2) + \\ b_1 (w_{xx}^{(s)} w_{xt} + v_x v_{xt} + w_x w_{xt})] + \\ w_x^{(s)} [b_0 (w_{xx}^{(s)} w_x + w_x^{(s)} w_{xx} + v_x v_{xx} + w_x w_{xx}) + \\ b_1 (w_{xx}^{(s)} w_{xt} + w_x^{(s)} w_{xxt} + v_{xx} v_{xt} + v_x v_{xxt} + w_{xx} w_{xt} + w_x w_{xxt})] + \\ a_0 Z + a_1 Z_t = a_0 \rho w + a_1 \rho w_t, \end{aligned} \quad (10b)$$

$$v(0, t) = v(L, t) = w(0, t) = w(L, t) = 0, \quad (10c)$$

其中, $(\cdot)_x = \partial(\cdot)/\partial x$, $(\cdot)_{xx} = \partial^2(\cdot)/\partial x^2$, ...

2 非线性动力响应

定义无量纲参数

$$V = v/L, \quad W = w/L, \quad \xi = x/L,$$

$$c_1 = \sqrt{E_1/\rho}, \quad c_2 = \sqrt{\sigma^{(s)}/\rho},$$

$$\tau = c_2 t/L, \quad k_1 = E_1 E_2 L / \rho c_2^3,$$

$$k_2 = c_1/c_2, \quad k_3 = (E_1 + E_2)L / \rho c_2,$$

$$\lambda = g \cos \theta / c_2^2, \quad W^{(s)} = w^{(s)} / \lambda.$$

于是方程 (1) 和 (10) 变为如下无量纲方程

$$W^{(s)} = 0.5(\xi - \xi^2),$$

$$\begin{aligned}
& k_3 V_{\xi\xi} + k_1 V_{\xi\xi} (W_{\xi}^{(s)} W_{\xi} + 0.5 V_{\xi}^2 + 0.5 W_{\xi}^2) + k_2^2 V_{\xi\xi} (W_{\xi}^{(s)} W_{\xi\tau} + \\
& V_{\xi} V_{\xi\tau} + W_{\xi} W_{\xi\tau}) + k_1 V_{\xi} (W_{\xi\xi}^{(s)} W_{\xi} + W_{\xi}^{(s)} W_{\xi\xi} + V_{\xi} V_{\xi\xi} + W_{\xi} W_{\xi\xi}) + \\
& k_2^2 V_{\xi} (W_{\xi\xi}^{(s)} W_{\xi\tau} + W_{\xi}^{(s)} W_{\xi\xi\tau} + V_{\xi\xi} V_{\xi\tau} + V_{\xi} V_{\xi\xi\tau} + \\
& W_{\xi\xi} W_{\xi\tau} + W_{\xi} W_{\xi\xi\tau}) + Y(\xi, \tau) = k_3 V_{\tau\tau} + V_{\tau\tau\tau}, \\
& k_3 W_{\xi\xi} + k_1 W_{\xi\xi} (W_{\xi}^{(s)} W_{\xi} + 0.5 V_{\xi}^2 + 0.5 W_{\xi}^2) + k_2^2 W_{\xi\xi} (W_{\xi}^{(s)} W_{\xi\tau} + \\
& V_{\xi} V_{\xi\tau} + W_{\xi} W_{\xi\tau}) + k_1 W_{\xi} (W_{\xi\xi}^{(s)} W_{\xi} + W_{\xi}^{(s)} W_{\xi\xi} + V_{\xi} V_{\xi\xi} + W_{\xi} W_{\xi\xi}) + \\
& k_2^2 W_{\xi} (W_{\xi\xi}^{(s)} W_{\xi\tau} + W_{\xi}^{(s)} W_{\xi\xi\tau} + V_{\xi\xi} V_{\xi\tau} + V_{\xi} V_{\xi\xi\tau} + \\
& W_{\xi\xi} W_{\xi\tau} + W_{\xi} W_{\xi\xi\tau}) + W_{\xi}^{(s)} [k_1 (W_{\xi}^{(s)} W_{\xi} + 0.5 V_{\xi}^2 + 0.5 W_{\xi}^2) + \\
& k_2^2 (W_{\xi}^{(s)} W_{\xi\tau} + V_{\xi} V_{\xi\tau} + W_{\xi} W_{\xi\tau})] + Z(\xi, \tau) = k_3 W_{\tau\tau} + W_{\tau\tau\tau}, \\
& V(0, \tau) = V(1, \tau) = W(0, \tau) = W(1, \tau) = 0
\end{aligned} \tag{11}$$

由于方程(11)不能精确求解,为得到近似解,使用 Galerkin 方法分离变量,于是令:

$$\begin{aligned}
V(\xi, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\tau) \phi_n = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\tau) \sin(n\pi\xi), \\
W(\xi, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} g_n(\tau) \phi_n = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(\tau) \sin(n\pi\xi).
\end{aligned} \tag{12}$$

代入方程(11)得到

$$\begin{aligned}
& \dots + k_3 \ddot{f}_m + \sum_{i=1}^{\infty} A_{mf} f_i + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (B_{mjf} g_j + C_{mjf} g_j^2) + \\
& \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (E_{mijf} f f k + E_{mijf} g_j g_k + F_{mijf} f f k + F_{mijf} g_j g_k) + Y_m = 0, \\
& \dots + k_3 \ddot{g}_m + \sum_{i=1}^{\infty} (A_{mg} g_i + A_{mg} g_i^2) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (B_{mjg} g_i g_j + C_{mjg} f_j + D_{mjg} g_j^2 + D_{mjg} f_j^2) + \\
& \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (E_{mijk} g_i f f k + E_{mijk} g_i g_j g_k + F_{mijk} g_i f f k + F_{mijk} g_i g_j g_k) + Z_m = 0,
\end{aligned} \tag{13}$$

其中,

$$\begin{aligned}
A_{mi} &= -k_3 a_{mi}, \quad B_{mj} = -k_1 (b_{mj} + c_{mj}), \quad C_{nij} = -k_2^2 (2b_{mj} + d_{mj}), \\
E_{mijk} &= -k_1 \left(\frac{1}{2} e_{mj} k + e_{mkj} \right), \quad F_{mijk} = - (k_2^2 e_{mj} k + k_1 e_{mijk} + k_1 e_{nkij}), \\
A_{mi} &= -k_3 a_{mi} - k_1 h_{mi}, \quad A_{mi} = -k_2^2 h_{mi}, \quad B_{mj} = -k_1 \left(2b_{mj} + \frac{3}{2} d_{mj} \right), \\
C_{mij} &= -\frac{1}{2} k_1 d_{mj}, \quad D_{nij} = -2k_2^2 (b_{mj} + d_{mj}), \quad D_{mj} = -k_2^2 d_{mj}, \\
F_{mijk} &= -k_2^2 (e_{mijk} + e_{mkj} + e_{mijk}), \quad a_{mi} = \int_0^1 \phi_m \phi_i'' d\xi, \\
b_{mj} &= \int_0^1 w(\xi^{(s)}) \phi_m \phi_j' d\xi, \quad c_{mj} = \int_0^1 w(\xi^{(s)}) \phi_m \phi_j' d\xi, \\
d_{mj} &= \int_0^1 w(\xi^{(s)}) \phi_m \phi_i' d\xi, \quad e_{mijk} = \int_0^1 \phi_m \phi_i' \phi_j' \phi_k d\xi \\
h_{mi} &= \int_0^1 (w(\xi^{(s)}))^2 \phi_m \phi_i d\xi \\
Y_m &= \int_0^1 \phi_m Y(\xi, \tau) d\xi, \quad Z_m = \int_0^1 \phi_m Z(\xi, \tau) d\xi.
\end{aligned}$$

3 粘弹性索振动主动控制

仅考虑面内的横向振动, 取前 N 项并忽略非线性影响, 方程 (13) 表示为

$$\ddot{\mathbf{g}}(t) + \mathbf{K}\dot{\mathbf{g}}(t) + \mathbf{A}\mathbf{g}(t) + \mathbf{A}\mathbf{g}(t) = \mathbf{f}_c(t) + \mathbf{f}_e(t), \quad (14)$$

其中, $\mathbf{g}(t) = [g_1, g_2, \dots, g_N]^T$, $\mathbf{A} = (A_{ij})_{N \times N}$, $\mathbf{A} = (A_{ij})_{N \times N}$, $\mathbf{K} = k_3 \mathbf{I}_{N \times N}$, $\mathbf{f}_c(t)$ 为载荷向量, $\mathbf{f}_e(t)$ 为控制力向量. 在状态空间中, 方程 (14) 可以表示为状态方程形式

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{F}(t), \quad (15)$$

其中, $\mathbf{X}(t)$ 为状态向量, \mathbf{A} 为对称的系统矩阵, \mathbf{B} 为控制输入位置矩阵, $\mathbf{u}(t)$ 为控制力向量. 这些向量与矩阵可以表示为

$$\mathbf{X}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{g}(t) \\ \dot{\mathbf{g}}(t) \\ \ddot{\mathbf{g}}(t) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{A} & -\mathbf{A} & -\mathbf{K} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_e(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}.$$

方程 (14) 的解可以表示为

$$\mathbf{X}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{X}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\mathbf{F}(\tau)d\tau. \quad (16)$$

其中, $\Phi(t, t_0)$ 为非奇异的状态转移矩阵. 由于矩阵 \mathbf{A} 与 $\int_{t_0}^t \mathbf{A}d\tau$ 可换, 因此状态转移矩阵

$\Phi(t, t_0)$ 可以用矩阵指数表示为

$$\Phi(t, t_0) = \exp\left[\int_{t_0}^t \mathbf{A}d\tau\right]. \quad (17)$$

令 $t = (k+1)\Delta t$, $t_0 = k\Delta t$, 在 $k\Delta t$ 与 $(k+1)\Delta t$ 之间的输入控制力向量 $\mathbf{u}(t)$ 采样为常数. 并定义

$$\begin{cases} \mathbf{A}_d(k\Delta t) = \Phi[(k+1)\Delta t, k\Delta t], \\ \mathbf{B}_d(k\Delta t) = \left\{ \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \Phi[(k+1)\Delta t, \tau]d\tau \right\} \mathbf{B}, \\ \mathbf{F}_d(k\Delta t) = \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \Phi[(k+1)\Delta t, \tau] \mathbf{F}(\tau)d\tau \end{cases} \quad (18)$$

简记 $k\Delta t$ 为 k , 状态方程 (15) 可以表示为如下差分方程

$$\mathbf{X}(k+1) = \mathbf{A}_d(k)\mathbf{X}(k) + \mathbf{B}_d(k)\mathbf{u}(k) + \mathbf{F}_d(k). \quad (19)$$

取优化控制的性能指标 J 为

$$J = \frac{1}{2}\mathbf{X}^T(N)\mathbf{S}\mathbf{X}(N) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1} [\mathbf{X}^T(k)\mathbf{Q}(k)\mathbf{X}(k) + \mathbf{u}^T(k)\mathbf{R}(k)\mathbf{u}(k)], \quad (20)$$

其中, \mathbf{S} 为最后一个时间步的状态向量权矩阵, $\mathbf{Q}(k)$ 为正定或半正定矩阵, $\mathbf{R}(k)$ 为第 k 步的控制力的正定权矩阵 ($k = 0, \dots, N-1$), N 为时间步的总数. 最小化性能指标 J 可以得到:

$$\lambda(k) = \begin{cases} \mathbf{Q}(k)\mathbf{X}(k) + \mathbf{A}_d^T(k)\lambda(k+1) & (k = 0, 1, \dots, N-1), \\ \mathbf{S}\mathbf{X}(N) & (k = N), \end{cases} \quad (21)$$

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{R}(k)^{-1}\mathbf{B}_d^T(k)\lambda(k+1) \quad (k = 0, 1, \dots, N-1). \quad (22)$$

由于状态向量 $\lambda(k)$ 是由响应的状态及载荷向量确定, 因此

$$\text{当 } \mathbf{q}(N) = \mathbf{0} \text{ 时, } \lambda(k) = \mathbf{P}(k)\mathbf{X}(k) + \mathbf{q}(k) \quad (k = 0, 1, \dots, N-1), \quad (23)$$

其中, 方程 (23) 右边的第一项表示闭环控制, 第二项表示开环控制, $\mathbf{P}(k)$ 为 Riccati 矩阵, $\mathbf{q}(k)$ 为载荷向量.

由方程(19), (21), (22), (23), 可得确定 $P(k)$ 与 $q(k)$ 的方程

$$\begin{aligned} & \left\{ P(k) - Q(k) - A_d^T(k) [P(k+1)^{-1} + B_d(k)R(k)^{-1}B_d^T(k)]^{-1} A_d(k) \right\} X(k) + \\ & \left\{ A_d^T(k) [P(k+1)^{-1} + B_d(k)R(k)^{-1}B_d^T(k)]^{-1} B_d(k)R(k)^{-1}B_d^T(k) - \right. \\ & \left. A_d^T(k) \right\} q(k+1) + q(k) - A_d^T(k) [P(k+1)^{-1} + \\ & B_d(k)R(k)^{-1}B_d^T(k)]^{-1} F_d(k) = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

性能指标 J 的最小化可以表示为

$$\begin{aligned} \min J = & \frac{1}{2} X^T(0) P(0) X(0) + \frac{1}{2} X^T(0) q(0) + \\ & \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ F_d^T(k) [P(k+1) X(k+1) + q(k+1)] \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

状态向量由(23)识别, 控制输入由观测的状态向量与载荷向量进行计算. 由方程(24), Riccati 矩阵 $P(k)$ 与向量 $q(k)$ 表示为

$$P(k) = \begin{cases} Q(k) + A_d^T(k) [P^{-1}(k+1) + B_d(k)R(k)^{-1}B_d^T(k)P(k+1)]^{-1} \\ (k = 0, 1, \dots, N-1), \end{cases} \quad (26)$$

$$q(k) = \begin{cases} S & (k = N) \cdot \\ \left\{ A_d^T(k) - A_d^T(k) [P^{-1}(k+1) + \right. \\ \quad \left. B_d(k)R(k)^{-1}B_d^T(k)P(k+1)]^{-1} B_d(k)R(k)^{-1}B_d^T(k) \right\} \\ q(k+1) + A_d^T(k) [P^{-1}(k+1) + B_d(k)R(k)^{-1}B_d^T(k)P(k+1)]^{-1} \times \\ F_d(k) & (k = 0, 1, \dots, N-1) \cdot \\ 0 & (k = N) \cdot \end{cases} \quad (27)$$

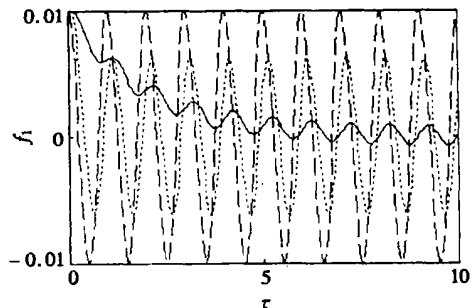
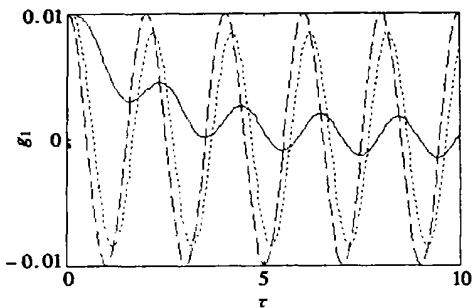
在计算出 Riccati 矩阵 $P(k)$ 与向量 $q(k)$ 后, 控制向量 $u(k)$ 可以由下式求得

$$u(k) = -R(k)^{-1} B_d^T(k) A_d^{-T}(k) \{ [P(k) - Q(k)] X(k) + q(k) \}. \quad (28)$$

在上述优化控制模型中, 应该首先计算系统矩阵 $A(k)$ 与载荷向量 $F_d(k)$.

4 数值仿真与讨论

在以下的研究中, 取方程(11)的前两阶特征函数, 应用四阶 Runge_Kutta 方法对方程(20),



(a) 面外的响应

(b) 面内的响应

(--- 弹性, $k_3=50$, —— $k_3=10$, $k_1=k_2=0$)

图3 材料参数 k_3 对响应的影响

(21) 进行数值积分. 并研究材料参数 k_3 分别对面内和面外位移响应的影响, 图3表示在初始

条件 $f_1(0) = g_1(0) = 0.01$, $f_2(0) = f_{\lambda}(0) = f_{\lambda}(0) = 0.0$, $g_2(0) = g_{\lambda}(0) = g_{\lambda}(0) = 0.0$ 的条件下, 并且 $k_1 = k_2 = 0$ 时, 材料参数 k_3 在不同情况下的面外和面内的响应。可见, 无论面外与面内, 随着 k_3 的减小, 索的振幅也逐渐减小; 参数 k_3 的值越大, 粘弹性索越接近弹性索。

5 结 论

研究了粘弹性索的非线性动态响应及振动主动控制, 得到了小垂度粘弹性索振动的一般非线性控制方程及优化控制律。数值研究得到如下结论:

- 1) 粘弹性索的振动频率随粘性参数 k_3 的减小而减小。
- 2) 粘性参数 k_3 越大, 粘弹性索的动力学行为与弹性索的动力行为更相似。
- 3) 粘弹性索面内振动的频率比面外振动的频率更高。

[参 考 文 献]

- [1] Triantafyllon M S, Grinfolgel L. Natural frequencies and modes of inclined cables[J]. Journal of Structure Engineering, 1986, **113**(2): 139—148.
- [2] Rega G, Benedettini F. Parametric analysis of large amplitude free vibrations of a suspended cable [J]. International Journal of Non_Linear Mechanics, 1984, **19**(1): 95—105.
- [3] Rega G, Benedettini F. Non_linear dynamics of an elastic cable under planar excitation[J]. International Journal of Non_Linear Mechanics, 1987, **22**(4): 497—509.
- [4] Takahashi K. Dynamic stability of cables subjected to an axial periodic load[J]. Journal of Sound and Vibration, 1991, **144**(2): 323—330.
- [5] Perkins N C. Modal interactions in the non_linear response of elastic cables under parametric / external excitation[J]. International Journal of Non_Linear Mechanics, 1992, **27**(2): 233—250.
- [6] Perkins N C, Mote C D. Three_dimensional vibration of travelling elastic cables[J]. Journal of Sound and Vibration, 1987, **114**(2): 325—340.
- [7] Fung R F, Huang J S, Cheng Y, et al. Nonlinear dynamic analysis of the viscoelastic string with a harmonically varying transport speed[J]. Computers & Structures, 1996, **61**(1): 125—132.
- [8] Fung R F, Huang J S, Chen Y C. The transient amplitude of the viscoelastic travelling string: an integral constitutive law[J]. Journal of Sound and Vibration, 1997, **201**(2): 153—167.
- [9] Zhang L, Zu J W. Nonlinear vibration of parametrically excited moving belts[J]. Journal of Applied Mechanics, 1999, **66**(4): 396—409.
- [10] Warnitchai P, Fujino Y, Susumpov T. A non_linear dynamic model for cables and its application to a cable structure system[J]. Journal of Sound and Vibration, 1995, **178**(4): 695—712.
- [11] Chen F H, Chiu J C. Vibration control of moving flexible member using piezoelectric actuators[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1995, **121**(8): 858—864.

Nonlinear Dynamic Response and Active Vibration Control of the Viscoelastic Cable With Small Sag

LI Ying_hui¹, GAO Qing¹, YIN Xue_gang²

(1. Department of Applied Mechanics and Engineering, Southwest Jiaotong University,
Chengdu 610031, P. R. China;

2. Department of Engineering Mechanics, Chongqing University,
Chongqing 400044, P. R. China)

Abstract: The problem considered is an initially stressed viscoelastic cable with small sag. The cable material is assumed to be constituted by the hereditary differential type. The partial differential equations of motion is derived first. Then by applying Galerkin's method, the governing equations are reduced to a set of third order non_linear ordinary differential equations which are solved by Runge_Kutta numerical integration procedures. Only after the transverse vibration of the plane is considered and the nonlinear terms are neglected, can the non_linear ordinary differential equations be expressed as a continuous state equation in the state space. The matrix of state transition is approximated stepwise by the matrix exponential; in addition, the state equation is discretized to a difference equation to improve the computing efficiency. Furthermore, an optimal control of procedure system based on the minimization of a quadratic performance index for state vector and control forces is developed. Finally, the effect of dynamic response of the cable, which is produced by viscoelastic parameters, is testified by the research of digital simulation.

Key words: viscoelastic cable; Revlon material; dynamic response; active vibration control