

文章编号:1000-0887(2003)04-0331-11

分数积分的一种数值计算方法及其应用*

朱正佑^{1,2}, 李根国⁴, 程昌钧^{1,3}

(1.上海大学,上海市应用数学和力学研究所,上海 200072;

2.上海大学 数学系,上海 200072;

3.上海大学 力学系,上海 200072;

4.上海超级计算中心,上海 201203)

(本刊编委程昌钧来稿)

摘要: 提出了一种只需要存储部分历史数据的分数积分的数值计算方法,并给出了误差估计.这种方法可对包含分数积分和分数导数的积分-微分方程进行较长时间的数值计算,克服了存储全部历史数据的困难,并能对计算误差进行控制.作为应用,给出了具有分数导数型本构关系的粘弹性 Timoshenko 梁的动力学行为研究的控制方程,利用分离变量法讨论梁在简谐激励作用下的动力响应,然后用新提出的数值方法对控制方程进行数值计算,数值计算结果和理论结果进行了比较,它们比较吻合.

关键词: 分数微积分; 数值计算方法; 分数导数型本构关系; 弱奇异性 Volterra 积分-微分方程

中图分类号: O165.6; O345 **文献标识码:** A

引言

分数微积分学已有悠久的历史 and 大量的研究^[1-3],在许多学科,特别在化学、电磁学、材料科学和力学中有广泛的应用,例如 Cement^[4]在 1930 年代首先采用分数导数描述粘弹性材料的本构关系,目前受到广泛的重视^[5-7].这种本构关系仅用少量的参数构成粘弹性材料的数学模型,并在较大的频率范围内描述材料的力学性能,已证实有大量的粘弹性材料的本构关系可利用分数导数描述^[7-9].利用分数导数本构关系研究粘弹性材料的工作也很多.尽管对微分型和积分型粘弹性材料的结构的力学行为已有不少研究工作^[10-14],但是对分数导数描述的粘弹性材料构成的结构的研究很少^[5],主要问题在于分数微积分数值计算.当我们需要对这种粘弹性结构的长时间力学行为进行数值模拟时,将涉及分数微积分数值计算的一系列问题:其一是需存储整个历史数据,随着时间的增加,信息量不断增加,计算工作量急剧增长;其二是当时间不断增大时,离散误差很难进行控制,从而可能导致计算数据的失真.因此用常规

* 收稿日期: 2001-10-30; 修订日期: 2003-01-06

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60273048); 上海市科学技术发展基金资助项目(98JC14032); 上海市教委发展基金资助项目(99A01)

作者简介: 朱正佑(1937—),男,浙江海盐人,教授,博士生导师(E-mail: zyzyhu@mail.shu.edu.cn); 李根国(1969—),男,甘肃古浪人,博士,现从事并行计算方法研究(E-mail: ggli@ssc.net.cn).

的高散方法,实质上并不适用于作由分数导数描述的粘弹性材料和结构长时间力学性态的数值模拟的有效离散方法。

本文在第1节中提出一种只需要存储部分历史数据的分数积分的数值计算方法,并给出了误差估计。这种方法可对包含分数积分和分数导数的积分-微分方程进行较长时间的数值计算,克服了存储全部历史数据的困难,并能对计算误差进行控制。作为应用,在第2节中建立具有分数导数型本构关系的粘弹性 Timoshenko 梁的动力学行为研究的控制方程,利用分离变量法讨论梁在简谐激励作用下的动力响应。最后用本文提出的数值方法对控制方程进行计算,对数值计算结果和理论结果进行比较。

1 分数积分的数值计算方法

设 $C^0(\mathbf{R}_0^+)$ 表示定义在 $\mathbf{R}_0^+ = \{x \in \mathbf{R}, x \geq 0\}$ 上所有绝对连续实函数 $f(x) \in C^0(\mathbf{R}_0^+)$ 构成的集合,且满足 $f(0+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \in \mathbf{R}$ 。 $L^1(\mathbf{R}^+)$ 表示定义在 \mathbf{R}^+ , 并在 \mathbf{R}^+ 的任意一个有界子区间上 Lebesgue 可积的实函数构成的集合。

设 $f(t) \in C^0(\mathbf{R}_0^+)$, $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$, $0 < \alpha < 1$, 则 $f(t)$ 的 α 阶 Riemann-Liouville 分数导数定义为^[2]

$$\mathcal{D}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \quad (0 < \alpha < 1), \quad (1)$$

这里 $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ 是 Gamma 函数。当 $f'(t) \in L^1(\mathbf{R}^+)$ 时, 满足

$$\mathcal{D}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{f(0)}{t^\alpha} + \int_0^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \right]. \quad (2)$$

设 $f(t) \in L^1(\mathbf{R}^+)$, $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$, $0 < \beta < 1$, 则 $f(t)$ 的 β 阶 Riemann-Liouville 分数积分定义为^[2]

$$\mathcal{I}^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\beta}} d\tau \quad (0 < \beta < 1), \quad (3)$$

由(2)可得, 分数导数和分数积分存在关系

$$\mathcal{D}^\alpha f(t) = \mathcal{I}^{1-\alpha} \mathcal{D} f(t) + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{f(0)}{t^\alpha}, \quad (4)$$

其中 $\mathcal{D} = d/dt$ 。如果 $f(0) = 0$, 则

$$\mathcal{D}^\alpha f(t) = \mathcal{I}^{1-\alpha} \mathcal{D} f(t). \quad (5)$$

在通常的计算分数微积分的数值计算方法中^[1,5,10], 需要存储整个历史数据。随计算时间的增加, 计算工作量也不断增大, 不适合作长时间的计算, 为了克服这个困难, 我们将提出一种新的计算方法。

1.1 数值离散方法

因为分数导数和积分有关系(4), 所以我们只讨论分数积分的计算方法。下面考虑 $y(t) = \mathcal{I}^{1-\alpha} f(t)$ 的计算方法。

取等距积分步长为 Δt , 由于被积函数 $t = n\Delta t$ 时有奇性, 所以, 当 $t = n\Delta t$ 足够大时, 我们把积分分成两部分

$$y(n\Delta t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\int_0^{(n-m)\Delta t} \frac{f(\tau)}{(n\Delta t - \tau)^\alpha} d\tau + \int_{(n-m)\Delta t}^{n\Delta t} \frac{f(\tau)}{(n\Delta t - \tau)^\alpha} d\tau \right], \quad (6)$$

其中, m 是一个给定的正整数, $m < n$ 。

记

$$z_1(n\Delta t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{(n-m)\Delta t} \frac{f(\tau)}{(n\Delta t - \tau)^\alpha} d\tau,$$

$$z_2(n\Delta t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{(n-m)\Delta t}^{n\Delta t} \frac{f(\tau)}{(n\Delta t - \tau)^\alpha} d\tau.$$

$z_1(n\Delta t)$ 的被积函数在区间 $[0, (n-m)\Delta t]$ 上没有奇性, 对它的计算, 可给出一个递推公式, 不需要 $f(k\Delta t), k = 0, 1, \dots, n-m$ 的全部信息. $z_2(n\Delta t)$ 的被积函数有奇性, 注意到积分区间的长度是一个固定数 $m\Delta t$, 因此对它用一种复化梯形公式和等距 Gauss 求积方法的组合进行计算.

先给出计算 $z_1((n+1)\Delta t)$ 的一个递推公式. 设

$$\Omega_1 = z_1((n+1)\Delta t) - z_1(n\Delta t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\int_0^{(n+1-m)\Delta t} \frac{f(\tau)}{((n+1)\Delta t - \tau)^\alpha} d\tau - \int_0^{(n-m)\Delta t} \frac{f(\tau)}{(n\Delta t - \tau)^\alpha} d\tau \right], \quad (7)$$

给出它的一个离散公式为

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_1 &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\sum_{k=0}^{n-m} f_k \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \frac{d\tau}{((n+1)\Delta t - \tau)^\alpha} - \sum_{k=0}^{n-m-1} f_{k+1} \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \frac{d\tau}{(n\Delta t - \tau)^\alpha} \right] = \\ &= \frac{(\Delta t)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \left\{ \sum_{k=0}^{n-m} f_k [(n+1-k)^{1-\alpha} - (n-k)^{1-\alpha}] - \sum_{k=0}^{n-m-1} f_{k+1} [(n-k)^{1-\alpha} - (n-k-1)^{1-\alpha}] \right\} = \\ &= \frac{(\Delta t)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} f_0 [(n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}], \end{aligned} \quad (8)$$

其中, $f_k = f(k\Delta t)$. 于是得到

$$z_1^{n+1} = z_1^n + \tilde{\Omega}_1 = z_1^n + \frac{(\Delta t)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} f_0 [(n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}], \quad (9)$$

其中, z_1^n 为 $z_1(n\Delta t)$ 的近似值. (9) 为数值计算 $z_1((n+1)\Delta t)$ 的一个递推公式.

$z_2((n+1)\Delta t)$ 的被积函数在 $\tau = (n+1)\Delta t$ 有奇性, 所以我们将积分区间 $[(n+1-m)\Delta t, (n+1)\Delta t]$ 再分成两个区间 $[(n+1-m)\Delta t, (n+1-l)\Delta t]$ 和 $[(n+1-l)\Delta t, (n+1)\Delta t]$, 其中 l 是一个较小的正整数, $l < m$, 例如 $l = 3$. 积分区间的划分如图 1 所示.

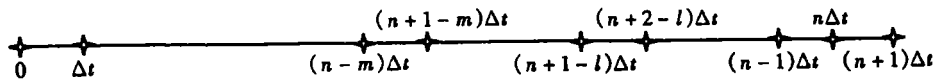


图 1 积分区间的划分示意图

设第一个小区间上的积分为

$$\Omega_2 = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{(n+1-m)\Delta t}^{(n+1-l)\Delta t} \frac{f(\tau)}{((n+1)\Delta t - \tau)^\alpha} d\tau, \quad (10)$$

采用复化梯形公式对 Ω_2 进行离散

$$\tilde{\Omega}_2 = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{k=n+1-m}^{n-l} \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \frac{f(\tau) d\tau}{((n+1)\Delta t - \tau)^\alpha} =$$

$$\frac{(\Delta t)^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{1}{2} \frac{f_{n+1-m}}{m^\alpha} + \sum_{k=n+2-m}^{n-1-l} \frac{f_k}{(n+1-k)^\alpha} + \frac{1}{2} \frac{f_{n+1-l}}{l^\alpha} \right]. \quad (11)$$

对第二个小区间上的积分

$$\Omega_3 = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{(n+1-l)\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \frac{f(\tau)}{((n+1)\Delta t - \tau)^\alpha} d\tau, \quad (12)$$

采用等距 Gauss 求积方法进行计算, 权重函数为

$$w(\tau) = \frac{1}{((n+1)\Delta t - \tau)^\alpha},$$

Ω_3 离散为

$$\tilde{\Omega}_3 = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{i=0}^l f((n+1-i)\Delta t) C_i, \quad (13)$$

C_i 为求积公式的权重系数, 仅依赖于 $w(\tau)$ 、 l 、 n 和 Δt , 与 $f(\tau)$ 无关. 在给定 $w(\tau)$ 、 l 、 n 和 Δt 之后, 分别令 $f(x)$ 为 $1, x, \dots, x^l$, 可求出系数 C_i . 这样公式(13) 具有 l 次代数精度. 例如, $l = 3$ 时, Gauss 求积公式为:

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_3 = & \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left\{ \frac{1}{6} f_{n-2} [(n-1)n(n+1)w_0 - (3n^2-1)w_1 + 3nw_2 - w_3] + \right. \\ & \frac{1}{2} f_{n-1} [- (n-2)n(n+1)w_0 + (3n^2-2n-2)w_1 - (3n-1)w_2 + w_3] + \\ & \frac{1}{2} f_n [(n-2)(n-1)(n+1)w_0 + (3n^2-4n-1)w_1 - (3n-2)w_2 - w_3] + \\ & \left. \frac{1}{6} f_{n+1} [- (n-2)(n-1)nw_0 + (3n^2-6n+6)w_1 - (3n-3)w_2 + w_3] \right\}, \quad (14) \end{aligned}$$

其中 $w_i = \frac{1}{(\Delta t)^i} \int_{(n+1-l)\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \tau^i w(\tau) d\tau \quad (i = 0, 1, 2, 3).$

实际计算的步骤如下:

给定时间 $T, t \in [0, T]$, 选取步长 Δt , 正整数 m 和 l, m 为较大的数, l 为较小的数; 首先用传统的存储历史数据的方法^[5] 求得 y_{m+l} ; 然后当 $n > m + l$ 时, 采用本文上述的方法计算 y_{n+1} , 即将积分分成形如(6) 的两部分, 第一部分用递推公式(9) 进行计算, 第二部分用公式(11) 和(13) 计算. 在计算过程中只需要存储 $m + l + 1$ 个历史数据.

1.2 误差估计

在计算 y_{n+1} 时, 利用了离散公式(9)、(11) 和(13), y_{n+1} 的计算误差即为上述 3 个公式误差的和.

首先给出公式(9) 的计算误差估计. 记

$$Q_k = \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \frac{f(\tau) - f_k}{((n+1)\Delta t - \tau)^\alpha} d\tau \quad (k = 0, 1, \dots, n-m),$$

于是

$$|Q_k| \leq (\Delta t)^{2-\alpha} |f'(\xi_k)| [(n+1-k)^{1-\alpha} - (n-k)^{1-\alpha}], \quad (15)$$

其中 $\xi_k \in [(n-k)\Delta t, (n-k+1)\Delta t]$.

因此当 $x > 0$ 时, 有

$$(x+1)^{1-\alpha} - x^{1-\alpha} = (1-\alpha)\lambda^{-\alpha} \leq (1-\alpha)x^{-\alpha} \quad \lambda \in [x, x+1],$$

所以

$$(n-k+1)^{1-\alpha} - (n-k)^{1-\alpha} \leq (1-\alpha)(n-k)^{-\alpha}. \quad (16)$$

把(16)代入(15)得

$$|Q_k| \leq (\Delta t)^{2-a} |f'(\xi_k)| (n-k)^{-a}, \quad (17)$$

记

$$P_k = \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \frac{f(\tau) - f_{k+1}}{(n\Delta t - \tau)^a} d\tau \quad (k = 0, 1, \dots, n-m-1),$$

同理得到

$$|P_k| \leq (\Delta t)^{2-a} |f'(\eta_k)| (n-k-1)^{-a}, \quad (18)$$

其中 $\eta_k \in [(n-k-1)\Delta t, (n-k)\Delta t]$.

于是(9)的计算误差估计为

$$\begin{aligned} |\Omega_1 - \tilde{\Omega}_2| &\leq (\Delta t)^{2-a} \left\{ \sum_{k=0}^{n-m} |f'(\xi_k)| (n-k)^{-a} + \right. \\ &\quad \left. \sum_{k=0}^{n-m-1} |f'(\eta_k)| (n-k-1)^{-a} \right\} = \\ &2(\Delta t)^{2-a} M_1 \sum_{k=0}^{n-m} (n-k-1)^{-a} \leq \\ &2M_1 \frac{n+1-m}{(m-1)^a} (\Delta t)^{2-a}, \end{aligned} \quad (19)$$

其中 $M_1 = \sup_{t \in [0, (n+1-m)\Delta t]} |f'(t)|$.

利用复化梯形公式的误差估计结果^[15], 得到公式(11)的误差估计为:

$$|\Omega_2 - \tilde{\Omega}_2| \leq \frac{(m-l)M_2}{12} (\Delta t)^3, \quad (20)$$

其中 $M_2 = \sup_{t \in [(n+1-m)\Delta t, (n-l)\Delta t]} |g''(t)|$, $g(t) = \frac{f(t)}{[(n+1)\Delta t - t]^a}$.

利用 Gauss 求积公式的误差估计^[15], 得到公式(13)的误差估计为:

$$|\Omega_3 - \tilde{\Omega}_3| \leq \left| \frac{f^{(l+1)}(\xi)}{(l+1)!} \int_{(n+1-l)\Delta t}^{(n+1)\Delta t} K(\tau) w(\tau) d\tau \right|, \quad (21)$$

其中

$$\begin{aligned} K(\tau) &= [\tau - (n+1-l)\Delta t][\tau - (n+2-l)\Delta t] \cdots [\tau - (n+1)\Delta t], \\ \xi &\in [(n+1-l)\Delta t, (n+1)\Delta t]. \end{aligned}$$

于是

$$|\Omega_3 - \tilde{\Omega}_3| \leq \frac{M_3 H}{(l+1)!} (\Delta t)^{(l+1-a)}, \quad (22)$$

这里

$$\begin{aligned} M_3 &= \sup_{t \in [(n+1-l)\Delta t, (n+1)\Delta t]} |f^{(l+1)}(t)|, \\ H &= \left| \int_0^l \mu(\mu-1) \cdots (\mu-l+1)(l-\mu)^{1-a} d\mu \right|. \end{aligned}$$

于是由(19)、(20)和(22)得到计算 y_{n+1} 时逼近积分 $y(t) = \mathcal{I}^{1-a} f(t)$ 的误差 E 为

$$E \leq 2 \frac{n+1-m}{(m-1)^a} M_1 (\Delta t)^{2-a} + \frac{m-l}{12} M_2 (\Delta t)^3 + \frac{HM_3}{(l+1)!} (\Delta t)^{(l+1-a)}. \quad (23)$$

2 应 用

作为应用, 本节将讨论具有分数导数本构关系粘弹性 Timoshenko 梁的动力学行为。

2.1 控制方程

设梁是等截面的,截面面积为 A ,高为 h ,长为 L ,密度为 ρ ;设 Ox 轴为截面的中性轴, Oy 、 Oz 轴为截面的惯性主轴.若载荷 $q(x,t)$ 作用在 xy 面内,则认为梁处于平面弯曲状态.根据 Timoshenko 梁理论,可设位移为^[16]

$$U(x,y,t) = u(x,t) + y\varphi(x,t), \quad V(x,y,t) = v(x,t). \quad (24)$$

设梁不受轴力作用,则 $u(x,t) = 0$.

设梁体积变形是弹性的,而剪切变形服从分数型粘弹性本构关系,粘弹性材料的三维分数导数型本构关系为^[17]

$$2(G + \eta\mathcal{D}^\alpha)\varepsilon_{ij}(t) = \sigma_{ij}(t) - \left[1 - \frac{2}{3K}(G + \eta\mathcal{D}^\alpha)\frac{\sigma_{kk}(t)}{3}\delta_{ij}\right], \quad (25)$$

其中, G 为剪切弹性模量, K 为体积弹性模量, η 、 α 是材料参数, $0 < \alpha < 1$, \mathcal{D}^α 是 Riemann-Liouville 分数导数算子.则不难得到梁的运动方程为

$$\begin{cases} \zeta A \mathcal{S}_3 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + q(x,t) = \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ I_z \mathcal{S}_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \zeta A \mathcal{S}_1 \mathcal{S}_3 \left(\varphi + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \rho I_z \mathcal{S}_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \end{cases} \quad (26)$$

式中, $I_z = \int_A y^2 dA(x)$, ζ 为剪切修正参数, $\mathcal{S}_1 = 3K + G + \eta\mathcal{D}^\alpha$, $\mathcal{S}_2 = 9K(G + \eta\mathcal{D}^\alpha)$, $\mathcal{S}_3 = G + \eta\mathcal{D}^\alpha$.

设梁两端是简支的,则边界条件为

$$v(x,t) = 0, \quad \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x} = 0 \quad \text{当 } x = 0, x = L \text{ 时}; \quad (27)$$

给定初值条件

$$v(x,t_0) = v_0, \quad \frac{\partial v(x,t_0)}{\partial t} = v_1 \quad 0 \leq x \leq L, \quad (28a)$$

$$\varphi(x,t_0) = \varphi_0, \quad \frac{\partial \varphi(x,t_0)}{\partial t} = \varphi_1 \quad 0 \leq x \leq L. \quad (28b)$$

具有弱奇异性的积分-偏微分方程组(26)及其边界条件(27)和初值条件(28)构成简支粘弹性 Timoshenko 梁的动力学行为的控制方程.作为特殊情况,当忽略梁的剪切效应时,得到本构关系为分数微分型的粘弹性 Euler-Bernoulli 梁控制方程

$$I_z \mathcal{S}_2 \frac{\partial^4 v_E}{\partial x^4} + \rho A \mathcal{S}_1 \frac{\partial^2 v_E}{\partial t^2} = \mathcal{S}_1 q. \quad (29)$$

2.2 梁的动力学行为

为了方便,忽略转动惯性的影响,并取初值条件为零, $v(0) = \dot{v}(0) = \varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0$,则由(26)解耦求得挠度 $v(x,t)$ 和转角 $\varphi(x,t)$ 满足的方程分别为

$$I_z \mathcal{S}_2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \frac{9K\rho I_z}{\zeta} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4 \partial t^2} + \rho A \mathcal{S}_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \mathcal{S}_1 q - \frac{9KI_z}{\zeta A} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}, \quad (30)$$

$$I_z \mathcal{S}_2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} - \frac{9KI_z}{\zeta} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4 \partial t^2} + \rho A \mathcal{S}_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\mathcal{S}_1 \frac{\partial q}{\partial x}. \quad (31)$$

设梁处于简支情况下,梁所受载荷为 $q(x,t) = f(x)\sin\theta t$,采用分离变量法,得到

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)\phi_{1n}(x), \quad \varphi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t)\phi_{2n}(x), \quad (32)$$

其中, $\phi_{1n}(x) = \sin(n\pi x/L)$, $\phi_{2n}(x) = \cos(n\pi x/L)$ ($n = 1, 2, \dots$) 为梁的挠度和转角的模态函数.

$v_n(t)$ 和 $\varphi_n(t)$ 满足的微分积分方程分别为

$$\dot{v}_n + a_n \mathcal{I}^\alpha v_n + b_n v_n + c_n \mathcal{I}^\alpha v_n = d_n \mathcal{I}^\alpha g(t) + e_n g(t), \quad (33)$$

$$\ddot{\varphi}_n + a_n \mathcal{I}^\alpha \ddot{\varphi}_n + b_n v_n + c_n \mathcal{I}^\alpha \varphi_n = -h_n \mathcal{I}^\alpha g(t) - i_n g(t), \quad (34)$$

其中

$$a_n = \left(\frac{n\pi h}{L}\right)^2 \frac{3K}{4\zeta\eta} + \frac{3K+G}{\eta}, \quad b_n = \frac{3}{4} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 h^2 \frac{K}{\rho}, \quad c_n = \frac{3}{4} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 h^2 \frac{GK}{\rho\eta},$$

$$d_n = \frac{3K+G}{\rho A \eta} q_{1n} - \frac{3h^2 K}{4\zeta \rho A \eta} q_{2n}, \quad e_n = \frac{q_{1n}}{\rho A}, \quad h_n = \frac{3K+G}{\rho A \eta} q_{3n}, \quad i_n = \frac{q_{3n}}{\rho A},$$

$$q_{1n} = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad q_{2n} = \frac{2}{L} \int_0^L \dot{f}(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx,$$

$$q_{3n} = \frac{2}{L} \int_0^L \dot{f}(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx.$$

由于粘弹性材料存在阻尼, 梁的自由振动将迅速衰减, 于是在简谐激励下, 其稳态响应与简谐激励同频^[18]. 于是可设

$$v_n(t) = A_n \sin \theta t + B_n \cos \theta t, \quad (35)$$

$$\varphi_n(t) = C_n \sin \theta t + D_n \cos \theta t. \quad (36)$$

将(35)代入(33), (36)代入(34), 并利用分数导数的性质得

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin \theta t + B_n \cos \theta t) \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad (37)$$

$$\varphi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \sin \theta t + D_n \cos \theta t) \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad (38)$$

其中

$$A_n = \left[R_1 \left(d_n \theta^{-\alpha} \cos \frac{\alpha\pi}{2} + e_n \right) + R_2 d_n \theta^{-\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2} \right] / (R_1^2 + R_2^2),$$

$$B_n = \left[R_2 \left(d_n \theta^{-\alpha} \cos \frac{\alpha\pi}{2} + e_n \right) - R_1 d_n \theta^{-\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2} \right] / (R_1^2 + R_2^2),$$

$$C_n = - \left[R_1 \left(h_n \theta^{-\alpha} \cos \frac{\alpha\pi}{2} + i_n \right) + R_2 h_n \theta^{-\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2} \right] / (R_1^2 + R_2^2),$$

$$D_n = - \left[R_2 \left(h_n \theta^{-\alpha} \cos \frac{\alpha\pi}{2} + i_n \right) - R_1 h_n \theta^{-\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2} \right] / (R_1^2 + R_2^2),$$

$$R_1 = b_n - \theta^2 + (c_n \theta^{-\alpha} - a_n \theta^{2-\alpha}) \cos \frac{\alpha\pi}{2}, \quad R_2 = (c_n \theta^{-\alpha} - a_n \theta^{2-\alpha}) \sin \frac{\alpha\pi}{2}.$$

同理, 我们可得到 Euler-Bernoulli 梁在简谐激励下的控制方程为

$$\dot{v}_{En} + a_{En} \mathcal{I}^\alpha v_{En} + b_{En} v_{En} + c_{En} \mathcal{I}^\alpha v_{En} = d_{En} \mathcal{I}^\alpha g(t) + e_{En} g(t), \quad (39)$$

其中,

$$a_{En} = \frac{3K+G}{\eta}, \quad b_{En} = \frac{3}{4} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 h^2 \frac{K}{\rho}, \quad c_{En} = \frac{3}{4} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 h^2 \frac{GK}{\rho\eta},$$

$$d_{En} = \frac{3K+G}{\rho A \eta} q_{1n}, \quad e_{En} = \frac{q_{1n}}{\rho A}.$$

稳态响应为

$$v_E(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_{En}(x, t) \sin \frac{n\pi x}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} (E_n \sin \theta t + F_n \cos \theta t) \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad (40)$$

其中,

$$E_n = [R_{E1}(d_{En}\theta^{-\alpha}\cos\frac{\alpha\pi}{2} + e_{En}) + R_{E2}d_{En}\theta^{-\alpha}\sin\frac{\alpha\pi}{2}] / (R_{E1}^2 + R_{E2}^2),$$

$$F_n = [R_{E2}(d_{En}\theta^{-\alpha}\cos\frac{\alpha\pi}{2} + e_{En}) - R_{E1}d_{En}\theta^{-\alpha}\sin\frac{\alpha\pi}{2}] / (R_{E1}^2 + R_{E2}^2),$$

$$R_{E1} = b_{En} - \theta^2 + (c_{En}\theta^{-\alpha} - \alpha_{En}\theta^{2-\alpha})\cos\frac{\alpha\pi}{2},$$

$$R_{E2} = (c_{En}\theta^{-\alpha} - \alpha_{En}\theta^{2-\alpha})\sin\frac{\alpha\pi}{2}.$$

当 $\alpha = 1$ 时,粘弹性材料是标准线性固体. 于是在(40)中取 $\alpha = 1$, 得到本构关系为标准线性固体的 Euler 梁的稳态响应,结果与[19]中的相同.

2.3 数值算例

本段利用第 1 节中所给的数值方法求解 Timoshenko 梁和 Euler 梁在简谐激励下的动力响应问题. 我们取一个等截面的粘弹性材料的梁,密度 $\rho = 500 \text{ kg/m}^3$,长度 $L = 10 \text{ m}$,截面积 $A = 1 \text{ m}^2$,高 $h = 0.5 \text{ m}$,受垂直于轴向的载荷为 $q(x, t) = 100 \sin(\pi x/L)\sin t \text{ N/m}$,设粘弹性材料参数为 $G = 3.276 \times 10^7 \text{ N/m}^2$, $K = 2.72 \times 10^7 \text{ N/m}^2$, $\eta = 9.147 \times 10^7 \text{ N}\cdot\text{s/m}^2$, $\alpha = 0.8$,剪切常数 $\zeta = 5/6$. 先用上面理论分析的结果,给出梁的稳态响应,分别由(37)、(38)、(40)求得

$$v(x, t) = v_1(t)\sin\frac{\pi x}{L}, \varphi(x, t) = \varphi_1(t)\cos\frac{\pi x}{L}, v_E(x, t) = v_{E1}(t)\sin\frac{\pi x}{L},$$

$v_1(t)$ 、 $\varphi_1(t)$ 和 $v_{E1}(t)$ 示于图 2. 在 h/L 很小的情况下,梁的剪切效应对挠度的影响很小,可忽略不计.

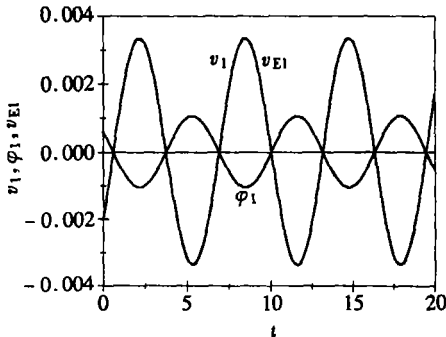


图 2 $h = 0.5 \text{ m}$ 时,挠度和转角的稳态值

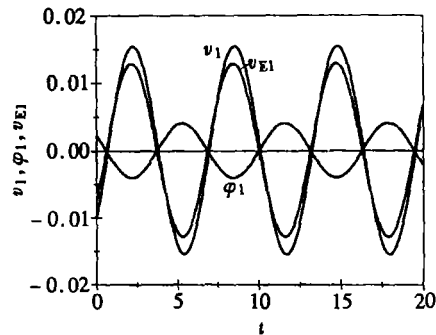


图 3 $h = 4 \text{ m}$ 时,挠度和转角的稳态值

在其它参数不变的情况下,改变截面积 $A = 4 \text{ m}^2$,高 $h = 4 \text{ m}$,载荷 $q(x, t) = 10^5 \sin(\pi x/L)\sin t \text{ N/m}$. 再分别由(37)、(38)、(40)求得

$$v(x, t) = v_1(t)\sin\frac{\pi x}{L}, \varphi(x, t) = \varphi_1(t)\cos\frac{\pi x}{L}, v_E(x, t) = v_{E1}(t)\sin\frac{\pi x}{L},$$

$v_1(t)$ 、 $\varphi_1(t)$ 和 $v_{E1}(t)$ 如图 3 所示. 计算结果表明,在 h/L 比较大的情况下,梁的剪切效应对挠度的影响比较明显.

下面利用本文提出的分数积分的数值计算方法,采用上述相同的材料和几何参数,对方程(33)、(34)和(39)进行数值计算. 先以(33)为例说明数值求解的方法.

令

$$v_n = y_1, y_2(t) = \mathcal{I}^\alpha v_n = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{y_1(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau,$$

$$y_3(t) = \mathcal{I}^\alpha v_n = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{v_n(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau,$$

则(33)可写成

$$\begin{cases} v_n = y_1, \\ \dot{y}_1 = G(t) - a_n y_2(t) - b_n v_n - c_n y_3(t) \equiv H(t, v_n, y_1), \end{cases} \quad (41)$$

其中, $G(t) = d_n \mathcal{I}^\alpha g(t) + e_n g(t)$, 初始条件为

$$v_n(0) = 0, y_1(0) = 0. \quad (42)$$

取时间步长 h , 先用 Euler 方法计算起始 3 步的值, 然后用 Adams 预估-校正算法进行计算.

Euler 公式为

$$\begin{cases} v_n^{i+1} = v_n^i + h y_1^i \\ y_1^{i+1} = y_1^i + h [G(ih) - a_n y_2^i - b_n v_n^i - c_n y_3^i] \end{cases} \quad (i = 0, 1, 2), \quad (43)$$

其中,

$$y_3^i = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{ih} \frac{v_n^i}{(ih-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, y_2^i = \frac{1}{\Gamma(\alpha)h} \int_0^{ih} \frac{(y_1^i - y_1^{i-1})}{(ih-\tau)^{1-\alpha}} d\tau. \quad (44)$$

Adams 预估-校正公式为

$$\begin{cases} v_n^{i+1,(0)} = v_n^i + \frac{h}{24} (55y_1^i - 59y_1^{i-1} + 37y_1^{i-2} - 9y_1^{i-3}) \\ y_1^{i+1,(0)} = y_1^i + \frac{h}{24} (55H^i - 59H^{i-1} + 37H^{i-2} - 9H^{i-3}) \end{cases} \quad (i \geq 3), \quad (45)$$

$$\begin{cases} v_n^{i+1,(p+1)} = v_n^i + \frac{h}{24} (9y_1^{i+1,(p)} + 19y_1^i - 5y_1^{i-1} + y_1^{i-2}), \\ y_1^{i+1,(p+1)} = y_1^i + \frac{h}{24} [9H((i+1)h, v_n^{i+1,(p)}, y_1^{i+1,(p)}) + \\ 19H^i - 5H^{i-1} + H^{i-2}], \end{cases} \quad (46)$$

其中 $H^i = H(ih, v_n^i, y_1^i) = G(ih) - a_n y_2^i - b_n v_n^i - c_n y_3^i$.

y_2^i 和 y_3^i 的计算, 采用上节提出的计算分数积分的方法.

取计算步长 $h = 0.005$, 存储 5 000 个点的的结果, 用上述数值方法求解方程(33)、(34)和(39), 结果如图 4 和图 5 所示.

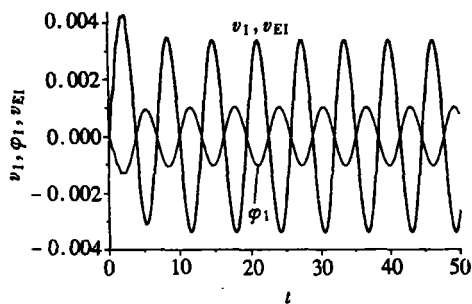


图 4 $h = 0.5$ m 时, 挠度和转角的数值计算结果

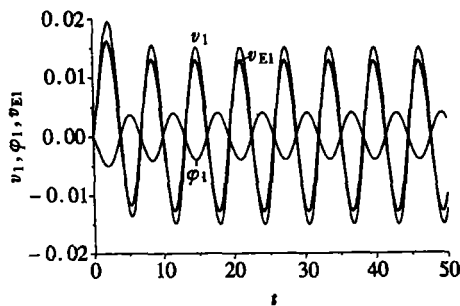


图 5 $h = 4$ m 时, 挠度和转角的数值计算结果

比较理论分析和数值计算的结果, 容易发现, 稳态响应的数值计算结果与理论结果十分相近.

3 结 论

通过上述分析和计算,本文得到的主要结论为

1) 提出了一种只需要存储部分历史数据的分数积分的数值计算方法,并给出了误差估计.利用这种方法可对包含分数积分和微分的积分-微分方程进行较长时间的数值模拟,这种方法克服了存储全部历史数据的困难,并能对计算误差进行控制.

2) 利用分离变量法讨论了具有分数导数型本构关系的粘弹性 Timoshenko 梁在简谐激励作用下的动力响应,在只考虑横向剪切效应的情况下,给出了稳态响应的理论结果.说明在梁细长比 h/L 比较大的情况下,梁的剪切效应对挠度的影响比较明显.有关转动惯性对挠度的影响,以及横向剪切和转动惯性同时考虑时,对挠度的影响将有另文报道.

3) 用本文提出的数值方法对粘弹性 Timoshenko 梁在只考虑横向剪切效应的情况下的动力响应进行了数值计算,数值计算结果与理论结果比较吻合.

[参 考 文 献]

- [1] Ross B. *A Brief History and Exposition of the Fundamental Theory of Fractional Calculus* [M]. Lecture Notes in Math, Vol 457, New York: Springer-Verlag, 1975, 40—130.
- [2] Samko S G, Kilbas A A, Marichev O L. *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Application* [M]. New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1993, 24—56, 120—140.
- [3] Gemant A. On fractional differences[J]. *Phil Mag*, 1938, 25(1): 92—96.
- [4] Delbosco D, Rodino L. Existence and uniqueness for a nonlinear fractional differential equation[J]. *J Math Anal Appl*, 1996, 204(4): 609—625.
- [5] Koeller R C. Applications of the fractional calculus to the theory of viscoelasticity[J]. *J Appl Mech*, 1984, 51(2): 294—298.
- [6] Bagley R L, Torvik P J. On the fractional calculus model of viscoelasticity behavior[J]. *J Rheology*, 1986, 30(1): 133—155.
- [7] Rossikhin Y A, Shitikova M V. Applications of fractional calculus to dynamic problems of linear and nonlinear hereditary mechanics of solid[J]. *Appl Mech Rev*, 1997, 50(1): 15—67.
- [8] Enelund M, Mahler L, Runesson K, et al. Formulation and integration of the standard linear viscoelastic solid with fractional order rate laws[J]. *Int J Solids Struct*, 1999, 36(18): 2417—2442.
- [9] Enelund M, Olsson P. Damping described by fading memory—analysis and application to fractional derivative models[J]. *Int J Solids Struct*, 1999, 36(5): 939—970.
- [10] Argyris J. Chaotic vibrations of a nonlinear viscoelastic beam[J]. *Chaos Solitons Fractals*, 1996, 7(1): 151—163.
- [11] 程昌钧,张能辉.横向周期载荷作用的粘弹性矩形板的混沌和超混沌运动[J].力学学报,1998,30(6):690—699.
- [12] Akoz Y, Kadioglu F. The mixed finite element method for the quasi-static and dynamic analysis of viscoelastic Timoshenko beams[J]. *Int J Numer Mech Engng*, 1999, 44(5): 1909—1932.
- [13] Suire G, Cederbaum G. Periodic and chaotic behavior of viscoelastic nonlinear (elastica) bars under harmonic excitations[J]. *Int J Mech Sci*, 1995, 37(2): 753—772.
- [14] 陈立群,程昌钧.非线性粘弹性梁的动力学行为[J].应用数学和力学,2000,21(9):897—902.
- [15] Atkinson K E. *An Introduction to Numerical Analysis* [M]. London: John Wiley & Sons, 1978, 120—

128.

- [16] Timoshenko S, Gere J. 材料力学[M]. 胡大礼 译. 北京: 科学出版社, 1978, 230—236.
- [17] Makris N. Three-dimensional constitutive viscoelastic law with fractional order time derivatives[J]. *J Rheology*, 1997, 41(5): 1007—1020.
- [18] 刘延柱, 陈文良, 陈立群. 振动力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1998, 143—147.
- [19] 杨挺青. 粘弹性力学[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1990, 55—102.

A Numerical Method for Fractional Integral With Applications

ZHU Zheng-you^{1,2}, LI Gen-guo⁴, CHENG Chang-jun^{1,3}

(1. *Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, P. R. China;*

2. *Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200072, P. R. China;*

3. *Department of Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, P. R. China;*

4. *Shanghai Supercomputer Center, Shanghai 201203, P. R. China)*

Abstract: A new numerical method for the fractional integral that only stores part history data is presented, and its discretization error is estimated. The method can be used to solve the integro-differential equation including fractional integral or fractional derivative in a long history. The difficulty of storing all history data is overcome and the error can be controlled. As application, motion equations governing the dynamical behavior of a viscoelastic Timoshenko beam with fractional derivative constitutive relation are given. The dynamical response of the beam subjected to a periodic excitation is studied by using the separation variables method. Then the new numerical method is used to solve a class of weakly singular Volterra integro-differential equations which are applied to describe the dynamical behavior of viscoelastic beams with fractional derivative constitutive relations. The analytical and numerical results are compared. It is found that they are very close.

Key words: fractional calculus; numerical method; fractional derivative constitutive relation; weakly singular Volterra integro-differential equation