

文章编号:1000-0887(2003)04-0351-06

用参数调整控制超混沌

杨凌^{1,2}, 刘曾荣², 茅坚民³

(1.苏州大学 数学系,苏州 215006;2.上海大学 数学系,上海 201800;
3.香港科技大学 数学系,香港九龙)

(本刊编委刘曾荣来稿)

摘要: 对于一类两参数平面映射族,给出了一种稳定嵌入在超混沌中不只有稳定流形的不稳定不动点的方法. 这种方法是通过在每一步迭代中调节两个参数来实现. 不仅得到了参数调节的显示,并且给出了方法收敛性的数学证明.

关键词: 混沌控制; 超混沌轨道; 参数调节

中图分类号: 37N;93D **文献标识码:** A

引言

1990年, Ott, Grebogi 和 Yorke(OGY)引入了混沌控制的概念并给出了称为 OGY 方法^[1]的控制方法. 此后,又出现了很多其他的控制混沌方法^[2-8]. 其他一些相关主题,例如噪音干扰、最优化等问题也相继被讨论^[9-12].

OGY 方法考虑映射: $\xi_{n+1} = F_p(\xi_n)$, $\xi \in R^2$, 其中 $p \in R$ 是参数. 当参数取适当值时,映射有一个鞍型不动点. 因此这个不动点有一维稳定流形和一维不稳定流形. OGY 方法的关键是通过调节参数,使 ξ_{n+1} 落在目标不动点的稳定流形上. 在文献[4]中,同样的想法被用来处理具有超过一维不稳定流形的双曲不动点的情况. 这两个方法都要求目标轨有稳定流形存在.

但是在二维映射中,一个不动点可以是一个源(即:所有特征值的绝对值大于1),因而没有稳定流形. 因此就产生一个问题:对没有稳定流形的情况是否可以控制? 答案是肯定的:通过在每一步适当调节参数,可以使不动点附近的原来不稳定的轨道收敛到不动点. 也就是说,一个不稳定点可以被稳定,即使它不具有稳定流形^[13]. 本文中,我们给出控制参数的表达式,并给出了一个控制超混沌方法的证明. 主要的想法是:使用在适当的参数下的“新”的不动点的不稳定来推动轨道,使之沿着一直线朝原不动点收敛. 这个方法可应用于一般的 n 维系统,包括有表达式的映射、流,以及实际问题中没有表达式的系统.

1 主要结果

研究映射:

- 收稿日期: 2001-09-25; 修订日期: 2002-11-29
- 基金项目: 江苏省自然科学基金资助项目(BK2002037)
- 作者简介: 杨凌(1971—),男,苏州人,博士(E-mail: lyang@mednet.ucla.edu.cn).

$$\xi_{n+1} = F(\xi_n; p, q), \quad (1)$$

其中 $\xi = (x, y) \in R^2, p, q$ 是参数. 这个映射可以改写为:

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n; p, q), \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n; p, q). \end{cases} \quad (2)$$

我们假设:

H1 当 $(p, q) = (p_0, q_0)$ 时, 映射有一个不稳定不动点 $\xi^*(p_0, q_0) = (x_F, y_F)$. λ_1 和 λ_2 是 ξ_F^* 的特征值, 且 $|\lambda_i| > 1, (i = 1, 2)$. 在 R^4 中 $(x, y, p, q) = (x_F, y_F, p_0, q_0)$ 的邻域内, 函数 f 和 g 是连续的, 并且他们的一阶偏导数存在连续. 记映射在不动点的 Jacobi 矩阵:

$$J_1 = \left(\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} \right)_{(x, y, p, q) = (x_F, y_F, p_0, q_0)}. \quad (3)$$

由于 $\text{Det}(J_1 - J) \neq 0, J$ 是单位矩阵. 在 H1 条件下, 可以使用隐函数定理. 因此, 在 (p_0, q_0) 的一个邻域 V 内, 映射(1) 具有一个不动点 $\xi^*(p, q) = (x_*(p, q), y_*(p, q)), (p, q) \in V$, 并且 ξ^* 的一阶偏导数存在连续. 进一步, 令

$$J_2 = \left(\frac{\partial(x^*, y^*)}{\partial(p, q)} \right)_{(x, y, p, q) = (x_F, y_F, p_0, q_0)}. \quad (4)$$

定理 1 如果映射(1) 满足 H1 和 $\text{Det} J_2 \neq 0$, 则对 $\forall k \in (-1, 1)$, 存在一个 (x_F, y_F) 的邻域 W , 任何一个以 $\xi_0 = (x_0, y_0) \in W$ 为初值, 第 n 步按(1) 迭代, 产生的序列 $\{\xi_n\}, n \in \mathbf{N}$, 会收敛到 $\xi_F^* = (x_F, y_F)$. 其中

$$(p_n, q_n)^T = (J_2)^{-1} \{ [(J - J_1)^{-1} (kJ - J_1) \xi_n + (1 - k) \xi_F^*] - \xi_F^* \}, \quad (5)$$

J 是单位阵.

2 定理 1 的证明

不失一般性, 假设 $(x_F, y_F, p_0, q_0) = (0, 0, 0, 0)$. 则对任意一个邻近 $\xi_F^* = (0, 0)^T$ 的点 ξ_n , 控制参数

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = J_2^{-1} (J - J_1)^{-1} (kJ - J_1) \xi_n. \quad (6)$$

令

$$\tilde{\xi}^*(p_n, q_n) = J_2 \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}. \quad (7)$$

则

$$\xi^*(p_n, q_n) = \tilde{\xi}^*(p_n, q_n) + O(p_n^2 + q_n^2), \quad (8)$$

且

$$k\xi_n = J_1(\xi_n - \tilde{\xi}^*(p_n, q_n)) + \tilde{\xi}^*(p_n, q_n). \quad (9)$$

我们在证明定理之前先证明 5 个引理, 定理 1 由此自然得证.

引理 1 $J - J_1$ 是可逆的.

证明 作为一个 2×2 矩阵, J_1 有以下 3 种典型形式:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, Q_2 = \lambda \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, Q_3 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

其中 $\lambda, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ 和 α 是实数, $0 \leq \alpha < 2\pi$. 这里我们要求 $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| > 1, \lambda > 1$ 和 $\lambda_0 >$

1(因为这里的 J_1 是没有稳定特征值的不动点的对应矩阵).

因此存在矩阵 P , 使 $P^{-1}J_1P = Q_i (i = 1, 2, 3)$. $J - J_1$ 可以改写为 $P(J - Q_i)P^{-1} (i = 1, 2, 3)$. 显然, $(J - Q_i) (i = 1, 2, 3)$ 是可逆的. 从而 $J - J_1$ 是可逆的.

引理 2

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = O(|\xi_n|). \quad (11)$$

证明

由(6)式立即得到.

引理 3 存在 $\delta_1 > 0$ 和 $M_1 > 0$, 对 $\forall \xi_n$ 满足 $|\xi_n| < \delta_1$, 其相应的 $\tilde{\xi}^*(p_n, q_n)$ 和 $\xi^*(p_n, q_n)$ 有

$$|\xi^*(p_n, q_n) - \tilde{\xi}^*(p_n, q_n)| < M_1 |\xi_n|^2$$

成立.

证明

$$\begin{aligned} p_n^2 + q_n^2 &= (p_n, q_n) \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \\ &= \xi_n^T (J_2^{-1}(J - J_1)^{-1}(kJ - J_1))^T J_2^{-1}(J - J_1)^{-1}(kJ - J_1) \xi_n. \end{aligned} \quad (12)$$

由(8), 引理得证.

引理 4 存在 $\delta_2 > 0$ 和 $M_2 > 0$, 对 $\forall \xi_n$ 满足 $|\xi_n| < \delta_2$, 其对应的 $\tilde{\xi}^*(p_n, q_n)$ 有

$$|\xi_n - \tilde{\xi}^*(p_n, q_n)| < M_2 |\xi_n|$$

成立.

证明 由(7)和(6), 我们有:

$$\tilde{\xi}^*(p_n, q_n) = J_2 \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = (J - J_1)^{-1}(kJ - J_1) \xi_n. \quad (13)$$

剩下的容易证明.

引理 5 对 $\forall \epsilon \in (0, 1 - |k|)$, 存在 $(x_F, y_F) = (0, 0)$ 的一个邻域 W , 使对 $\forall \xi_n \in W$, ξ_{n+1} (ξ_n 在映射(1)下的象), 都满足:

$$|\xi_{n+1} - k\xi_n| < (1 - |k| - \epsilon) |\xi_n|, \quad (14)$$

即

$$|\xi_{n+1}| < (1 - \epsilon) |\xi_n|. \quad (15)$$

证明 令 W_1 足够小以满足引理 1~4, 并且满足

$$J_1(p, q) = \left(\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} \right)_{(x, y, p, q) = (x^*(p, q), y^*(p, q), p, q)} \quad (16)$$

存在且关于 (p, q) 连续.

考虑

$$\begin{cases} \xi_{n+1} = J_1(p_n, q_n)(\xi_n - \xi^*(p_n, q_n)) + \xi^*(p_n, q_n) + \\ \quad O((\xi_n - \xi^*(p_n, q_n))^2), \\ k\xi_n = \tilde{\xi}^*(p_n, q_n) + J_1(\xi_n - \tilde{\xi}^*(p_n, q_n)). \end{cases} \quad (17)$$

由引理 3 和引理 4, 我们有 $|\xi_n - \xi^*(p_n, q_n)| = O(|\xi_n|)$. 因此,

$$|\xi_{n+1} - k\xi_n| = |J(p_n, q_n)(\xi_n - \xi^*(p_n, q_n)) + \xi^*(p_n, q_n) -$$

$$\begin{aligned} & |\tilde{\xi}^*(p_n, q_n) - J(\xi_n - \tilde{\xi}^*(p_n, q_n))| + O((\xi_n)^2) \leq \\ & |J - J(p_n, q_n)| |\xi^*(p_n, q_n) - \xi_n| + \\ & |J(p_n, q_n) - I| |\tilde{\xi}^*(p_n, q_n) - \xi^*(p_n, q_n)| + O((\xi_n)^2). \end{aligned} \quad (18)$$

容易验证 $|J - J(p_n, q_n)| = O(|p_n| + |q_n|) = O(|\xi_n|)$ 以及 $|J(p_n, q_n) - I|$ 在 W_1 中有界. 由引理 3 知, $|\xi^*(p_n) - \tilde{\xi}^*(p_n)| + O(|f_u \cdot \xi_n|^2) = O(|\xi_n| |f_u \cdot \xi_n|)$.

所以可以选择 $W \in W_1$ 足够小, (18) 可写成:

$$|\xi_{n+1} - k\xi_n| = O(|\xi_n|^2). \quad (19)$$

因为 $1 - |k| - \epsilon > 0$, 所以(14)能够成立.

用这些引理, 可以直接得到定理 1.

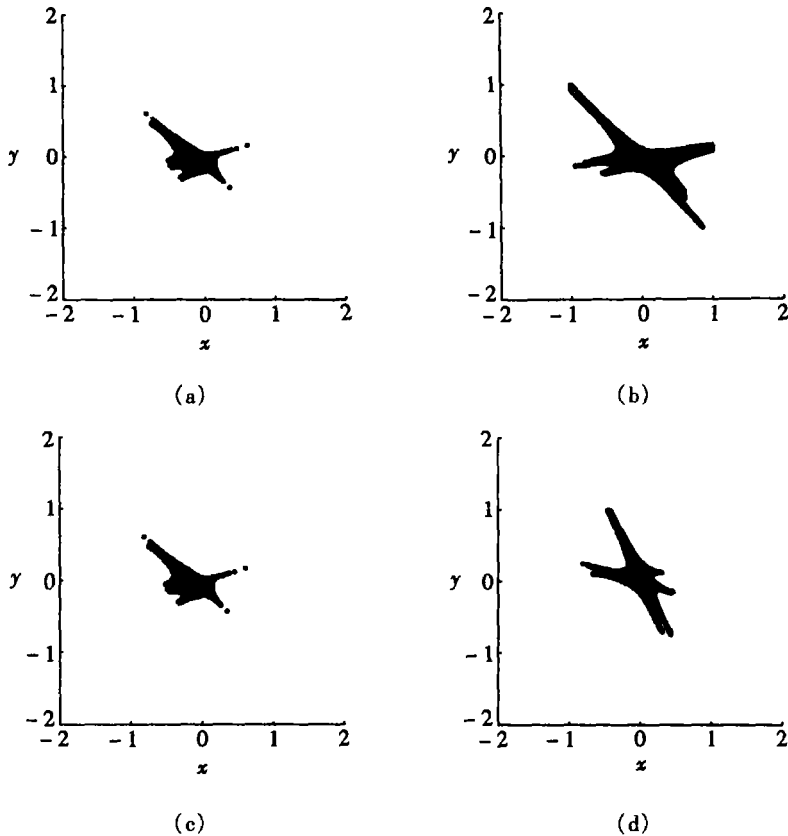


图 1 控制混沌方法的图示. 当 $p = 0, q = 0$, 点 $\xi_F^* = (0, 0)^T$ 是(20)的不动点. 阴影区域是可控区域. 其中(a),(b),(c)和(d)分别是 $k = 0, 0.5, 0.8$ 和 -0.7 时的可控区域.

3 例 子

考虑下面的二维映射,

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \sqrt{3}y_n + x_n^2 - 3y_n^2 + p + pq, \\ y_{n+1} = -\sqrt{3}x_n + y_n - 1.5x_n^2 + 2x_ny_n + q + 2p^2. \end{cases} \quad (20)$$

当 $p = 0, q = 0$ 时, 映射(20)有一个不稳定的不动点 $\xi_F^* = (0, 0)^T$. 此不动点有两个复特

征值. 可以验证, 不动点 $\xi_F^* = (0, 0)^T$ 是完全不稳定的. 根据定理 1, 我们计算 J_1 和 J_2 ,

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

和

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

$(p_n, q_n)^T$ 由(5)得出. 图 1 显示了在正方形区域 $[-2, 2] \times [-2, 2]$ 中的可控区域. 其中(a)、(b)、(c)和(d)分别是 $k = 0, 0.5, 0.8$ 和 -0.7 时的可控区域.

我们看到 $k = 0.5$ 时的可控区域比其他情况大. 实际上, 对给定的 ξ_n , $|k|$ 越大, 对应的 (p_n, q_n) 越小. 所以对同样大小的 (p, q) 允许范围, 我们能得到更大的可控区域. 但另一方面, 如果 $|k|$ 太接近于 1, ξ_{n+1} 就接近于 ξ_n , 于是由于非线性的影响, (14) 难以保证. 因此, 为了得到较大的可控区域, 我们要慎重选择 k !

4 总 结

我们证明了定理 1. 这个定理研究了 R^2 到其自身的映射. 映射具有一个不稳定不动点和两个可调参数, 以及一个对应的允许参数集合. 我们假设映射在不动点的 Jacobi 矩阵具有两个模大于 1 的特征值. 进一步, 设参数的变化会改变不动点位置. 在这些假设下, 我们证明了: 存在这个不动点的一个邻域, 在此邻域中的任何点可以在适当的参数调控下, 迭代收敛到不动点. 并且, k 的选择关系到可控区域.

[参 考 文 献]

- [1] Ott E, Grebogi C, Yorke J A. Controlling Chaos[J]. *Phys Rev Lett*, 1990, **64**(11):1196—1199.
- [2] Ditto W L, Raueo S N, Spano M L. Experimental control of chaos[J]. *Phys Rev Lett*, 1990, **65**(26):3211—3214.
- [3] Singer J, Wang Y-Z, Bau H H. Controlling a chaotic system[J]. *Phys Rev Lett*, 1991, **66**(9):1123—1125.
- [4] Auerbach D, Grebogi C, Ott E, et al. Controlling chaos in high dimensional systems[J]. *Phys Rev Lett*, 1992, **69**(24):3479—3482.
- [5] Pyragas K. Continuous control of chaos by self-controlling feedback[J]. *Phys Lett A*, 1992, **176**(6):421—428.
- [6] Petrov V, Peng B, Showalter K. A map-based algorithm for controlling tow-dimensional chaos[J]. *J Phys Chem*, 1992, **96**(5):7506—7513.
- [7] Romeiras F J, Grebogi C, Ott E, et al. Controlling chaotic dynamic systems[J]. *Phys D*, 1992, **58**(2):165—192.
- [8] 杨凌, 刘曾荣. OGY 方法的改进及证明[J]. *应用数学和力学*, 1998, **19**(1):1—7.
- [9] Shinbrot T, Ott E, Grebogi C, et al. Using chaos to direct trajectories to targets[J]. *Phys Rev Lett*, 1990, **65**(26):3215—3218.
- [10] Shinbrot T, Grebogi C, Ott E, et al. Using chaos to target stationary states for flows[J]. *Phys Lett A*, 1992, **169**(3):349—354.
- [11] Shinbrot T, Ott E, Grebogi C, et al. Using chaos to direct orbits to targets in systems described by a

- one-dimensional map[J]. *Phys Rev A*, 1992, 45(6):4165—4168.
- [12] Paskota M, Mees A I, Teo K L. Directing orbits of chaotic dynamical systems[J]. *Int J Bifur Chaos*, 1995, 5(2):573—583.
- [13] Yang L, Liu Z, Mao J. Controlling hyperchaos[J]. *Phys Rev Lett*, 2000, 84(1):67—70.

Controlling Hyperchaos in Planar Systems by Adjusting Parameters

YANG Ling^{1,2}, LIU Zeng-rong², MAO Jian-min³

- (1. *Department of Mathematics, Suzhou University, Suzhou 215006, P. R. China;*
2. *Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 201800, P. R. China;*
3. *Department of Mathematics, Hong Kong University of Science and Technology,
Clear Water Bay, Kowloon, Hong Kong, P. R. China*)

Abstract: For the two-parameter family of planar mapping, a method to stabilize an unstable fixed point without stable manifold embedding in hyperchaos is introduced. It works by adjusting the two parameters in each iteration of the map. The explicit expressions for the parameter adjustments are derived, and strict proof of convergence for method is given.

Key words: control of chaos; hyperchaotic orbits; parameter adjustment