

文章编号:1000-0887(2003)04-0367-06

# 复合载荷作用下带边缘大波纹膜片的非线性弯曲

袁 鸿<sup>1</sup>, 刘人怀<sup>2</sup>

(1. 广东工业大学 建设学院, 广州 510640; 2. 暨南大学 应用力学研究所, 广州 510632)

(本刊编委刘人怀来稿)

**摘要:** 采用轴对称旋转壳体的简化 Reissner 方程,研究了在复合载荷作用下具有硬中心的带边缘大波纹膜片的非线性弯曲问题. 应用格林函数方法,将波纹膜片的非线性边值问题化为非线性积分方程进行求解. 为了求解积分方程并防止发散,引入一个插值参数到迭代格式中. 计算表明,当载荷很小时,任何插值参数值均能保证迭代的收敛性,取插值参数值接近或等于1获得较快的收敛速度;而当载荷较大时,插值参数值不能取得过大. 绘出了不同载荷组合下波纹膜片的特征曲线,得到的特征曲线可供设计参考. 由于均布压力和中心集中载荷的共同作用,将产生比均布压力单独作用更大的挠度. 提出的解决方法适应于任意轴向截面的波纹壳体.

**关键词:** 波纹膜片; 边缘大波纹; 非线性弯曲; 弹性特征; 环形板

**中图分类号:** O343.5      **文献标识码:** A

## 引 言

波纹膜片是一种薄壳弹性体,由于它的参数很多,又相互制约,所以使得它的设计很复杂. 在大多数位移式仪器仪表中,要求波纹膜片产生大小至少和膜片厚度是同样数量级的弹性位移,甚至是厚度的几倍到几十倍,这就要求使用薄壳的几何非线性理论进行分析. 大多数学者研究波纹膜片的弯曲问题时,讨论的是单一载荷作用下波纹分布得均匀致密的膜片. 从正交各向异性板理论出发,刘人怀使用修正迭代法成功地解决了在复合载荷作用下波纹圆板和波纹环形板的非线性弯曲问题<sup>[1,2]</sup>. 使用扁壳的非线性弯曲理论,陈山林<sup>[3]</sup>,宋卫平和叶开沅<sup>[4]</sup>等讨论了浅正弦波纹膜片这种特殊情况,袁鸿<sup>[5]</sup>采用摄动法和幂级数方法,研究了具有光滑中心的锯齿形和梯形波纹壳的弹性特征. 工程实际中,经常遇到深波纹膜片及带边缘大波纹膜片,这就要求从一般壳体大挠度方程进行求解. 不幸的是,由于形状复杂及非线性数学带来的困难,只有极少数的文献讨论了这一问题. Axelrad<sup>[6]</sup>讨论了深正弦波纹膜片的伽辽金解法,Hamada 等<sup>[7]</sup>采用差分方法求解了带边缘波纹膜片的弯曲问题,Bihari 和 Elbert<sup>[8]</sup>直接从微分方程出发得到了带边缘波纹膜片的特征曲线. 但是他们的结果都不能令人满意,也不能得到膜片中的应力分布. 最近,刘人怀和袁鸿<sup>[9]</sup>采用格林函数方法,将简化的 Reissner 方程化为

• 收稿日期: 2001-10-19; 修订日期: 2003-01-10

作者简介: 袁鸿(1963—),男,湖南人,教授,博士(E-mail: yuanhong@scnu.edu.cn);

刘人怀(1940—),男,四川人,教授,中国工程院院士,暨南大学校长.

积分方程,成功地求解了中心集中载荷作用下带边缘大波纹膜片的弯曲问题,得到此膜片的特征关系和应力分布,并与其它理论和实验结果做了比较.本文采用轴对称旋转壳体的简化 Reissner 方程,研究了在复合载荷作用下具有硬中心的带边缘大波纹膜片的非线性弯曲问题.使用格林函数方法,将简化的 Reissner 方程化为一个非线性积分方程,通过数值求解,得到了波纹膜片的特征曲线.

## 1 基本方程和边界条件

采用  $(r, \vartheta, z)$  表示右手笛卡儿坐标系  $Oxyz$  中的圆柱坐标,将一条平面曲线绕  $z$  轴旋转就得到一个轴对称的旋转壳,如图 1 所示.

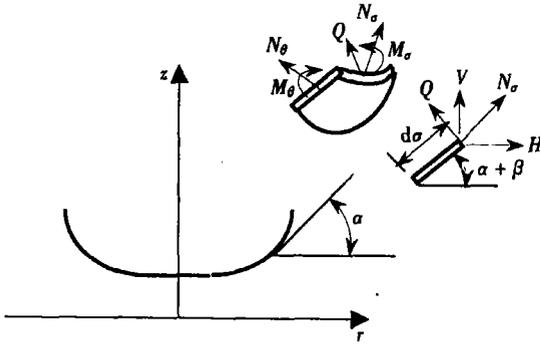


图 1 旋转壳的轴向截面

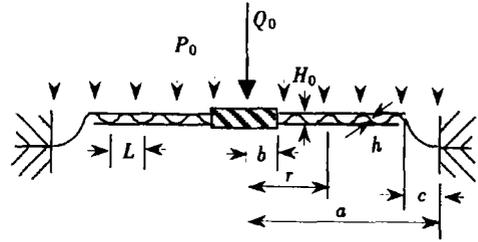


图 2 带边缘大波纹的波纹环形膜片

在均布压力  $P_0$  和中心集中载荷  $Q_0$  共同作用下,轴对称旋转壳体的简化 Reissner 方程为<sup>[10,11]</sup>

$$D[(r\beta')' - r^{-1}\sin\beta] - F\sin(\alpha + \beta) + \left(\frac{Q_0}{2\pi} + \frac{1}{2}P_0r^2\right)\cos(\alpha + \beta) = 0, \quad (1)$$

$$A[(rF')' - r^{-1}F] + \cos\alpha - \cos(\alpha + \beta) + AP_0[r^2\sin(\alpha + \beta)]' = 0, \quad (2)$$

上式中

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad A = \frac{1}{Eh}, \quad ( )' = \frac{d}{d\sigma}( ),$$

$\sigma$  是子午线方向的弧长,  $r$  是径向坐标,  $\alpha$  是变形前子午线切线方向与水平方向的夹角. 内力及位移与转角  $\beta$  及应力函数  $F$  的关系为

$$H = r^{-1}F, \quad (3)$$

$$N_\vartheta = F' + rP_0\sin(\alpha + \beta), \quad (4)$$

$$N_\sigma = r^{-1}F\cos(\alpha + \beta) + \left(\frac{Q_0}{2\pi r} + \frac{1}{2}P_0r\right)\sin(\alpha + \beta), \quad (5)$$

$$M_\sigma = D\{\beta' + \nu r^{-1}[\sin(\alpha + \beta) - \sin\alpha]\}, \quad (6)$$

$$M_\vartheta = D\{r^{-1}[\sin(\alpha + \beta) - \sin\alpha] + \nu\beta'\}, \quad (7)$$

$$u = Ar\{F' + rP_0\sin(\alpha + \beta) - \nu[r^{-1}F\cos(\alpha + \beta) + \left(\frac{Q_0}{2\pi r} + \frac{1}{2}P_0r\right)\sin(\alpha + \beta)]\}, \quad (8)$$

$$w = w(0) + \int_0^\sigma [\sin(\alpha + \beta) - \sin\alpha + e_\sigma\sin(\alpha + \beta)]d\sigma. \quad (9)$$

式(9)中,  $e_\sigma$  是子午线方向的薄膜应变

$$e_\sigma = A[N_\sigma - \nu N_\theta]. \quad (10)$$

考虑图 2 所示带刚性硬中心和边缘大波纹的波纹环形膜片, 其外边界夹紧固定, 其外半径为  $a$ , 内半径为  $b$ , 显然问题的边界条件是

$$\text{当 } r = b \text{ 时, } \beta = 0, u = 0, \quad (11)$$

$$\text{当 } r = a \text{ 时, } w = 0, \beta = 0, u = 0. \quad (12)$$

为求解方便, 引入无量纲量

$$\begin{cases} x = \frac{\sigma}{a}, R = \frac{r}{a}, g = \frac{aF}{D}, \\ \lambda^2 = \frac{AD}{a^2}, P = \frac{P_0 a^3}{D}, Q = \frac{Q_0 a}{2\pi D}, \rho = \frac{b}{a}, \end{cases} \quad (13)$$

再引入一个新的自变量

$$\xi = \int_0^x R^{-1} dx, \quad (14)$$

则基本方程(1)、(2)及边界条件(11)、(12)成为

$$\frac{d^2 \beta}{d\xi^2} - \beta = f_\beta, \quad (15)$$

$$\frac{d^2 g}{d\xi^2} - g = f_g, \quad (16)$$

式中

$$f_\beta = gR \sin(\alpha + \beta) - \left( Q + \frac{1}{2} R^2 P \right) R \cos(\alpha + \beta) + \sin \beta - \beta, \quad (17)$$

$$f_g = -\frac{1}{\lambda^2} [\cos \alpha - \cos(\alpha + \beta)] R - P \frac{d}{d\xi} [R^2 \sin(\alpha + \beta)], \quad (18)$$

及

$$\text{当 } R = \rho, \beta = 0, \frac{dg}{d\xi} - \nu g \cos \alpha = \left( \nu Q + \frac{\nu - 2}{2} \rho^2 P \right) \sin \alpha, \quad (19)$$

$$\text{当 } R = 1 \text{ 时, } w = 0, \beta = 0, \frac{dg}{d\xi} - \nu g \cos \alpha = \left( \nu Q + \frac{\nu - 2}{2} P \right) \sin \alpha. \quad (20)$$

## 2 积分方程及其求解

采用格林函数方法, 复合载荷作用下具有硬中心的带边缘大波纹膜片的基本微分方程(15)、(16)及其边界条件(19)、(20)可以化为下列积分方程组

$$\beta = \int_0^{\xi_N} G(\xi, \eta) f_\beta d\eta, \quad (21)$$

$$g = \int_0^{\xi_N} G_2(\xi, \eta) f_g d\eta + C_1 e^\xi + C_2 e^{-\xi}, \quad (22)$$

式中  $C_1$  和  $C_2$  是常数, 由下式确定

$$\begin{aligned} C_1 = & \left[ \left( \nu Q + \frac{\nu - 2}{2} P \right) \sin \alpha_N (1 + \nu \cos \alpha_0) - \right. \\ & \left. \left( \nu Q + \frac{\nu - 2}{2} \rho^2 P \right) \sin \alpha_0 (1 + \nu \cos \alpha_N) e^{-\xi_N} \right] / [(1 + \nu \cos \alpha_0)(1 - \nu \cos \alpha_N) e^{\xi_N} - \\ & (1 - \nu \cos \alpha_0)(1 + \nu \cos \alpha_N) e^{-\xi_N}], \end{aligned} \quad (23)$$

$$C_2 = \left[ \left( \nu Q + \frac{\nu - 2}{2} P \right) \sin \alpha_N (1 - \nu \cos \alpha_0) - \right.$$

$$\left( \nu Q + \frac{\nu-2}{2} \rho^2 P \right) \sin \alpha_0 (1 - \nu \cos \alpha_N) e^{\xi_N} \Big/ \left[ (1 + \nu \cos \alpha_0) (1 - \nu \cos \alpha_N) e^{\xi_N} - (1 - \nu \cos \alpha_0) (1 + \nu \cos \alpha_N) e^{-\xi_N} \right], \quad (24)$$

$\xi_N$  是  $R = 1$  处的  $\xi$  值,  $\alpha_0$  和  $\alpha_N$  分别表示  $R = \rho$  和  $R = 1$  处的  $\alpha$  值,  $G(\xi, \eta)$ 、 $G_2(\xi, \eta)$  是格林函数

$$G(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (e^{|\xi-\eta|} - e^{-|\eta-\xi|}) + \frac{1}{4} \frac{(e^{\xi-\xi_N} - e^{\xi_N-\xi})(e^{-\eta} - e^{\eta}) + (e^{\xi_N-\eta} - e^{\eta-\xi_N})(e^{\xi} - e^{-\xi})}{e^{-\xi_N} - e^{\xi_N}}, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \Delta \cdot G_2(\xi, \eta) = & \Delta \cdot \frac{1}{4} (e^{|\xi-\eta|} - e^{-|\eta-\xi|}) - \\ & \frac{1}{2} (1 + \nu \cos \alpha_0) (1 + \nu \cos \alpha_N) e^{-\xi_N + \eta + \xi} - \frac{1}{2} (1 - \nu \cos \alpha_0) (1 - \nu \cos \alpha_N) e^{\xi_N - \eta - \xi} - \\ & \frac{1}{4} [(1 - \nu \cos \alpha_0) (1 + \nu \cos \alpha_N) e^{-\xi_N} + \\ & (1 + \nu \cos \alpha_0) (1 - \nu \cos \alpha_N) e^{\xi_N}] (e^{\eta-\xi} - e^{\xi-\eta}), \end{aligned} \quad (26)$$

式(26)中

$$\Delta = (1 + \nu \cos \alpha_0) (1 - \nu \cos \alpha_N) e^{\xi_N} - (1 + \nu \cos \alpha_N) (1 - \nu \cos \alpha_0) e^{-\xi_N}. \quad (27)$$

由于(22)中的  $f_{\xi}$  由(18)决定, 是  $d\beta/d\xi$  的函数, 所以它实际上是积分微分方程, 通过分部积分可以消去微分项. 对于中等转动,  $\beta^2$  与 1 比较可以忽略不计, (21) 和(22) 可以化为只含一个未知量  $\beta$  的非线性积分方程

$$\begin{aligned} \beta_{\tau} = & -\frac{1}{\lambda^2} \int_0^{\xi_N} \int_0^{\xi_N} G(\tau, \xi) G_2(\xi, \eta) R_{\xi}(\sin \alpha_{\xi} + \beta_{\xi} \cos \alpha_{\xi}) \beta_{\eta}(\sin \alpha_{\eta} + \frac{1}{2} \beta_{\eta} \cos \alpha_{\eta}) R_{\eta} d\xi d\eta + \\ & P \int_0^{\xi_N} \int_0^{\xi_N} G(\tau, \xi) G_{2,\eta}(\xi, \eta) R_{\xi}(\sin \alpha_{\xi} + \beta_{\xi} \cos \alpha_{\xi}) [R_{\eta}^2(\sin \alpha_{\eta} + \beta_{\eta} \cos \alpha_{\eta}) - \\ & R_{\xi}^2(\sin \alpha_{\xi} + \beta_{\xi} \cos \alpha_{\xi})] d\xi d\eta + P \int_0^{\xi_N} G(\tau, \xi) R_{\xi}(\sin \alpha_{\xi} + \beta_{\xi} \cos \alpha_{\xi}) \left\{ R_{\xi}^2(\sin \alpha_{\xi} + \right. \\ & \left. \beta_{\xi} \cos \alpha_{\xi}) [G_2(\xi, \xi_N) - G_2(\xi, 0)] - G_2(\xi, \xi_N) \sin \alpha_N + G_2(\xi, 0) \rho^2 \sin \alpha_0 + \right. \\ & \left. \frac{C_1 e^{\xi} + C_2 e^{-\xi}}{P} \right\} d\xi - \int_0^{\xi_N} G(\tau, \xi) \left( Q + \frac{1}{2} R_{\xi}^2 P \right) R_{\xi}(\cos \alpha_{\xi} - \beta_{\xi} \sin \alpha_{\xi}) d\xi, \end{aligned} \quad (28)$$

上式中, 下标  $\xi, \eta, \tau$  表示  $\xi, \eta, \tau$  的函数,  $\beta_{\tau} = \beta(\tau)$ ,  $\dots$ , 等等,  $G_{2,\eta}(\xi, \eta) = dG_2(\xi, \eta)/d\eta$ , 积分方程可以按下列格式进行迭代

$$\begin{aligned} \beta_{\tau}^{*(m)} = & -\frac{1}{\lambda^2} \int_0^{\xi_N} \int_0^{\xi_N} G(\tau, \xi) G_2(\xi, \eta) R_{\xi}(\sin \alpha_{\xi} + \beta_{\xi}^{(m-1)} \cos \alpha_{\xi}) \times \\ & \beta_{\eta}^{*(m)}(\sin \alpha_{\eta} + \frac{1}{2} \beta_{\eta}^{(m-1)} \cos \alpha_{\eta}) R_{\eta} d\xi d\eta + \\ & P \int_0^{\xi_N} \int_0^{\xi_N} G(\tau, \xi) G_{2,\eta}(\xi, \eta) R_{\xi}(\sin \alpha_{\xi} + \beta_{\xi}^{(m-1)} \cos \alpha_{\xi}) [R_{\eta}^2(\sin \alpha_{\eta} + \beta_{\eta}^{(m-1)} \cos \alpha_{\eta}) - \\ & R_{\xi}^2(\sin \alpha_{\xi} + \beta_{\xi}^{(m-1)} \cos \alpha_{\xi})] d\xi d\eta + P \int_0^{\xi_N} G(\tau, \xi) R_{\xi}(\sin \alpha_{\xi} + \beta_{\xi}^{(m-1)} \cos \alpha_{\xi}) \left\{ R_{\xi}^2(\sin \alpha_{\xi} + \right. \\ & \left. \beta_{\xi}^{(m-1)} \cos \alpha_{\xi}) [G_2(\xi, \xi_N) - G_2(\xi, 0)] - G_2(\xi, \xi_N) \sin \alpha_N + G_2(\xi, 0) \rho^2 \sin \alpha_0 + \right. \\ & \left. \frac{C_1 e^{\xi} + C_2 e^{-\xi}}{P} \right\} d\xi - \int_0^{\xi_N} G(\tau, \xi) \left( Q + \frac{1}{2} R_{\xi}^2 P \right) R_{\xi}(\cos \alpha_{\xi} - \beta_{\xi}^{(m-1)} \sin \alpha_{\xi}) d\xi. \end{aligned} \quad (29)$$

在上式中  $m$  是迭代次数, 取  $m = 1$ , 假定  $\beta^{(0)} = 0$ , 则第一次迭代求出的  $\beta^{*(1)}$  就是线性解, 为了保证计算结果的收敛性, 取

$$\beta^{(m)} = \bar{\lambda} \beta^{*(m)} + (1 - \bar{\lambda}) \beta^{(m-1)} \quad (0 < \bar{\lambda} < 1). \quad (30)$$

式(30)中引入了控制参数  $\bar{\lambda}$ , 取  $\bar{\lambda} = 1$  就得到通常的迭代式. 计算表明, 当载荷  $P$ 、 $Q$  很小时,  $\bar{\lambda}$  取  $0 < \bar{\lambda} \leq 1$  中的任何值均能保证迭代的收敛性, 取  $\bar{\lambda}$  值接近或等于 1 获得较快的收敛速度, 而当载荷  $P$ 、 $Q$  较大时,  $\bar{\lambda}$  值不能取得过大.

实际计算中, 取  $\bar{\lambda} = 0.8$ . 给  $P$ 、 $Q$  一个充分小的值, 按(29)、(30)式进行迭代, 直到

$$\frac{|\beta^{*(m)} - \beta^{(m-1)}|}{1 + |\beta^{*(m)}|} \leq 0.0001, \quad (31)$$

这样一来, 就得到了对应于这对  $P$ 、 $Q$  值的非线性解, 以后给  $P$ 、 $Q$  以增量, 并把对应于上一对  $P$ 、 $Q$  值的收敛解用来开始对新的  $P$ 、 $Q$  值实施迭代过程. 以这种方式得到对应于任何载荷值的解答.

### 3 算 例

图 2 是带边缘大波纹正弦波纹膜片的轴向截面, 各有关数据为:  $E = 1.345 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $h = 0.4 \text{ mm}$ ,  $a = 78 \text{ mm}$ ,  $b = 18 \text{ mm}$ ,  $L = 12 \text{ mm}$ ,  $H_0 = 1.34 \text{ mm}$ ,  $c = 15 \text{ mm}$ , 边缘大波纹的曲率半径  $r_0 = 45.32 \text{ mm}$ , 其外边界夹紧固定. 图 3 绘出了不同载荷组合下波纹膜片的特征曲线, 从图上可知, 由于均布压力和中心集中载荷的共同作用, 将产生比均布压力单独作用更大的挠度.

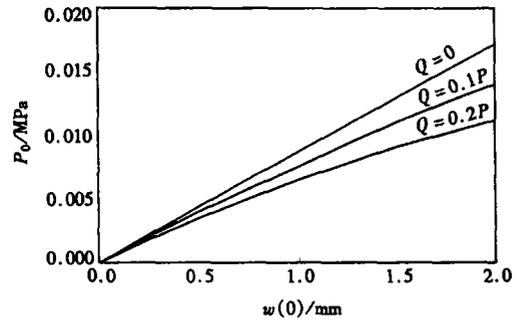


图 3 特征曲线

### 4 结 论

本文从简化的 Reissner 方程出发, 采用积分方程方法, 得到了复合载荷作用下具有硬中心和边缘大波纹的波纹膜片的非线性弯曲问题的数值解, 得到的特征曲线可供设计参考. 本文中提出的解决方法适应于任意轴向截面的波纹壳体.

#### [参 考 文 献]

- [1] 刘人怀. 在复合载荷作用下波纹环形板的非线性弯曲[J]. 中国科学, A 辑, 1985, 28(6): 537—545.
- [2] 刘人怀. 在复合载荷作用下波纹圆板的非线性弯曲[J]. 应用数学和力学, 1988, 9(8): 661—674.
- [3] 陈山林. 浅正弦波纹圆板在均布载荷下的大挠度弹性特征[J]. 应用数学和力学, 1980, 1(2): 261—272.
- [4] 宋卫平, 叶开沅. 中心集中载荷作用下波纹圆板的变形应力和稳定性研究[J]. 中国科学, A 辑, 1989, 32(1): 40—47.
- [5] 袁鸿. 波纹壳的摄动解法[J]. 应用力学学报, 1999, 16(1): 144—148.
- [6] Аксельрад Э Л. Большие прогибы гофрированной мембраны как непологой оболочки[J]. Механика и Машиностроение, Известия АН СССР, 1964, (1): 46—53.
- [7] Hamada M, Seguchi Y, Ito S, et al. Numerical method for nonlinear axisymmetric bending of arbi-

- trary shells of revolution and large deflection analyses of corrugated diaphragm and bellows[J]. *Bulletin of JSME*, 1968, 11(43): 24—33.
- [8] Bihari I, Elbert A. Deformation of circular corrugated plates and shells[J]. *Periodica Polytech Mech Eng Mas*, 1978, 22(2): 123—143.
- [9] LIU Ren-huai, YUAN Hong. Nonlinear bending of corrugated annular plate with large boundary corrugation[J]. *Appl Mech Eng*, 1997, 2(3): 353—367.
- [10] Libai A, Simmonds J G. *The Nonlinear Theory of Elastic Shells of One Spatial Dimension* [M]. Boston: Academic Press, 1988, 206—212.
- [11] Simmonds J G, Libai A. A simplified version of Reissner's non-linear equations for a first-approximation theory of shells of revolution[J]. *Comput Mech*, 1987, 2(2): 99—103.

## Nonlinear Bending of Corrugated Diaphragm With Large Boundary Corrugation Under Compound Load

YUAN Hong<sup>1</sup>, LIU Ren-huai<sup>2</sup>

- (1. Faculty of Construction, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510640, P. R. China;  
2. Institute of Applied Mechanics, Jinan University, Guangzhou 510632, P. R. China)

**Abstract:** By using the simplified Reissner's equation of axisymmetric shells of revolution, the nonlinear bending of a corrugated annular plate with a large boundary corrugation and a non-deformable rigid body at the center under compound load are investigated. The nonlinear boundary value problem of the corrugated diaphragm reduces to the nonlinear integral equations by applying the method of Green's function. To solve the integral equations, a so-called interpolated parameter important to prevent divergence is introduced into the iterative format. Computation shows that when loads are small, any value of interpolated parameter can assure the convergence of iteration. Interpolated parameter equal or almost equal to 1 yields a faster convergence rate; when loads are large, interpolated parameter cannot be taken too large in order to assure convergence. The characteristic curves of the corrugated diaphragm for different load combinations are given. The obtained characteristic curves are available for reference to design. It can be concluded that the deflection is larger when the diaphragm is acted by both uniform load and concentrated load than when it is acted only by uniform load. The solution method can be applied to corrugated shells of arbitrary diametral sections.

**Key words:** corrugated diaphragm; large boundary corrugation; nonlinear bending; elastic characteristic; annular plate