

文章编号:1000-0887(2003)04-0373-05

复合型裂纹应变能释放率逐点 闭合的外推逼近研究

郭茂林, 孟庆元, 王彪

(哈尔滨工业大学 航天工程与力学系, 哈尔滨 150001)

(本刊编委王彪来稿)

摘要: 提出用外推逼近法计算复合型裂纹的应变能释放率的新方法, 闭合能计算时, 采用逐点闭合的方法. 避免了某些文献中闭合能计算不能自治的缺点: “当沿经向闭合节点多于两个时, 裂纹(脱层)前端节点力乘位移已计算了闭合能, 中间点还要重复计算闭合能”. 具体计算了 DCB(双悬臂梁)试件并与理论解进行了比较, 吻合度优于其他方法. 同时, 又计算了紧凑拉伸试件、三点弯曲试件、单边裂纹试件, 均取得满意结果. 与理论解比较, 误差可控制在 1% 之内. 此方法可以广泛用于类似复合材料脱层裂纹的断裂力学分析.

关键词: 外推逼近; 逐点闭合; 复合型裂纹; 应变能释放率

中图分类号: O39; TB12 **文献标识码:** A

引言

能量释放率的研究是研究断裂力学性能的主要手段, 以往在计算能量释放率时, 采用应变能减去外力功即自由能的方法^[1], 也有采用裂纹尖端节点力与节点位移来计算能量释放率的^[2-5], 两者都是近似计算. 前者, 虽在定义上说有可取之处, 但过于繁琐, 要整体计算两次以上应变能(裂纹扩展前后)和外力功. 后者虽然简单些, 但计算闭合能时, 节点处节点力用安节点弹簧计算或应力沿闭合面积分计算, 闭合能重复计算, 显得太粗糙. 两者都没有反映裂纹扩展的 $\Delta a \rightarrow 0$ 逼近过程, 也没有与有关理论解进行比较. 本文方法的特点 1) 要反映 $\Delta a \rightarrow 0$ 的过程就采用外推逼近法. 2) 逐点闭合计算闭合能, 避免了文[2]、[6]重复计算的缺点: “当沿经向的闭合节点超过两个时, 裂尖后端节点位移与节点力相乘已计算了闭合能, 裂纹已闭合, 中间点还要重复计算”, 这是不能自恰的. 3) 与理论解进行了比较, 吻合度较好. 4) 方法简单计算工作量少. 5) 节点力取自有限元的基本理论, 依据充分可靠.

航天飞行器常采用纤维复合材料, 此种材料在加工使用过程中常在层间出现脱层, 有硬币型的, 也有圆型的或其他形状的, 此类脱层缺陷可以看作是复合型裂纹, 对于它的断裂力学分析是至关重要的. 为保障航天器和各类飞行器的安全, 必须找出一种分析方法, 准确方便地对其断裂力学性能进行分析. 本文正是在这一理论指导下进行这项工作的.

• 收稿日期: 2001-12-21; 修订日期: 2003-01-14

作者简介: 郭茂林(1943—), 男, 河北阳原人, 教授, 从事复合材料断裂力学研究(E-mail: hitgml@you.com).

1 理论分析

为不失其普遍性,设为圆型脱层情况,前沿如图1,则有式(1)~(5)的应变能释放率 $G(\phi)$ 表达式^[2,6]. 式中 τ_{rz} , $\tau_{\theta z}$ 和 σ_{zz} 是为了闭合面积为 dA 的裂纹所需的层间应力. u_r , u_θ 和 u_z 是位于裂纹上下表面处沿径向、周向和厚度方向上的位移,角标 t、b 分别表示脱层的顶部和底部.

应变能释放率:

$$G(\phi) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2} \iint_{\Delta s} \left\{ \tau_{rz}(r, \theta) [u_r^t(r - \Delta R, \theta) - u_r^b(r - \Delta R, \theta)] + \tau_{\theta z}(r, \theta) [u_\theta^t(r - \Delta R, \theta) - u_\theta^b(r - \Delta R, \theta)] + \sigma_{zz}(r, \theta) [u_z^t(r - \Delta R, \theta) - u_z^b(r - \Delta R, \theta)] \right\} dA \right\} / \Delta s. \quad (1)$$

如图1,因为 Δs 由角 $\Delta\phi$ 和半径增量 ΔR 界定,(1)式可由 ΔR 和 $\Delta\phi$ 表示,即:

$$G(\phi) = \lim_{\substack{\Delta R \rightarrow 0 \\ \Delta\phi \rightarrow 0}} \left\{ \frac{1}{2} \int_R^{R+\Delta R} \int_\phi^{\phi+\Delta\phi} \left\{ \tau_{rz}(r, \theta) [u_r^t(r - \Delta R, \theta) - u_r^b(r - \Delta R, \theta)] + \tau_{\theta z}(r, \theta) [u_\theta^t(r - \Delta R, \theta) - u_\theta^b(r - \Delta R, \theta)] + \sigma_{zz}(r, \theta) [u_z^t(r - \Delta R, \theta) - u_z^b(r - \Delta R, \theta)] \right\} r dr d\theta \right\} / [\Delta\phi / (\Delta R^2/2 + R\Delta R)]. \quad (2)$$

式中的3项分别对应着 I、II、III型裂纹的应变能释放率:

$$G_I(\phi) = \lim_{\substack{\Delta R \rightarrow 0 \\ \Delta\phi \rightarrow 0}} \left\{ \frac{1}{2} \int_R^{R+\Delta R} \int_\phi^{\phi+\Delta\phi} \sigma_{zz}(r, \theta) [u_z^t(r - \Delta R, \theta) - u_z^b(r - \Delta R, \theta)] r dr d\theta \right\} / [\Delta\phi / (\Delta R^2/2 + R\Delta R)]. \quad (3)$$

$$G_{II}(\phi) = \lim_{\substack{\Delta R \rightarrow 0 \\ \Delta\phi \rightarrow 0}} \left\{ \frac{1}{2} \int_R^{R+\Delta R} \int_\phi^{\phi+\Delta\phi} \tau_{rz}(r, \theta) [u_r^t(r - \Delta R, \theta) - u_r^b(r - \Delta R, \theta)] r dr d\theta \right\} / [\Delta\phi / (\Delta R^2/2 + R\Delta R)]. \quad (4)$$

$$G_{III}(\phi) = \lim_{\substack{\Delta R \rightarrow 0 \\ \Delta\phi \rightarrow 0}} \left\{ \frac{1}{2} \int_R^{R+\Delta R} \int_\phi^{\phi+\Delta\phi} \tau_{\theta z}(r, \theta) [u_\theta^t(r - \Delta R, \theta) - u_\theta^b(r - \Delta R, \theta)] r dr d\theta \right\} / [\Delta\phi / (\Delta R^2/2 + R\Delta R)]. \quad (5)$$

上述各式是在柱坐标系推得的,如采用直角坐标系时,把相应角标换过来就是了.例如:二维直角坐标系中, r 换为 x , ΔR 换为 Δa 等,这里不再重复.

2 引入节点力计算闭合能

常用位移法求解,用有限元方法计算上述公式时,经常遇到的困难是位移项仅能取节点位移,取节点应力还得乘上面积项进行积分.如果取高斯积分点处应力,位移又没有对应项,况且常用三维体元计算此类问题时,三维的积分点与二维的面上积分点位置又有不同,所以如何计算上述公式是很费事的.作者采用节点力乘节点位移直接计算闭合能,很满意地解决了上述问题.

在有限元计算中,节点力、节点位移刚度矩阵、节点外载荷满足如下方程^[7]:

$$[K]\{U\} = \{R\}, \tag{6}$$

$$[K]\{U\} = \{F\}, \tag{7}$$

$$\{R\} = \{F\}, \tag{8}$$

式中 $\{U\}$ 为位移列阵, $[K]$ 为刚度矩阵, $\{F\}$ 为结点力列阵, $\{R\}$ 为结点载荷列阵。

(6)式对整体结构是正确的,对每个单元(7)式是正确的。对每个节点(8)式是正确的。一般采用三维固体元时,裂纹表面无外载荷,此时 $\{R\}$ 为零。必需指出,每个单元都可算出所有结点的3个位移分量。如果一个结点和多个单元连接,那么,作用于该结点的所有单元的所有结点力分量与结点外载荷的矢量和等于零。可用此条件来检验计算结果的正确性。一般结点外载荷为零,再利用作用力与反作用力相等之道理可求出复杂情况下的结点力分量。

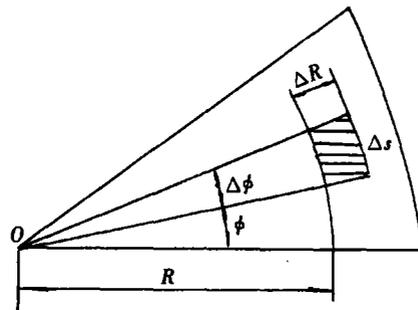


图1 坐标示意图

3 外推逼近方法

为反应裂纹长度 $\Delta a \rightarrow 0$ 的过程,采用逼近方法,亦即进行一次有限元计算,然后按式(3)~(5)相应二维直角坐标系中取不同的 Δa ,分别进行能量释放率计算。把算得的数据进行回归,得回归方程,令 Δa 等于零,即得所求的能量释放率。

必须指出的是,由于有限元计算不能算出裂纹尖端的应力无穷大,位移也是有限值,所以不能认为 $r^{-1/2}$ 就是理想的回归方程。又因当 r 很小时,应力与 $r^{-1/2}$ 成正比变化,而位移随 $r^{1/2}$ 变化。必须用最小二乘法进行数据拟合,同时给出相关系数,以便比较各种回归方法的回归效果。取回归相关系数的绝对值最逼近1且精度高的为最后所取回归方法。

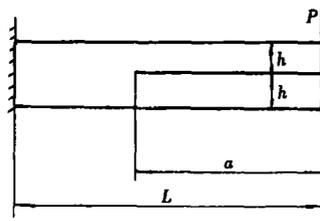


图2 双悬臂梁试件

4 计算值与理论解比较

采用有理论解的双悬臂梁作为计算对象^[8],如图2。公式如下^[8]:

$$G_{II} = \frac{9}{4} \frac{P^2 a^2}{B^2 E h^3}, \tag{9}$$

取 $a = 6 \text{ mm}$, $h = 0.6 \text{ mm}$, $E = 210\,000 \text{ N/mm}^2$, $B = 1.5 \text{ mm}$, $P = 400 \text{ N}$, B 为宽度。其它符号如图2所示。理论解值: $G_{II} = 126.989 \text{ N/mm}$ 。

计算值如表1。

表1 不同 Δa 时 G_{II} 的计算结果

$\Delta a/\text{mm}$	0.166 67	0.333 3	0.500 0	0.666 7	0.833 3	1.000 0
$G_{II}/(\text{N/mm})$	95.719 3	88.741 3	73.484 5	63.001 5	56.449 8	50.056 5

回归结果如表 2.

表 2 $\Delta a \rightarrow 0$ 时 G_{II} 的回归结果

回归名称	回归方程	G_{II}	相关系数	精度 S
线性回归	$Y = 106.143 - 58.401x$	106.14	-0.982 689	0.092 63
二次多项式回归	$Y = 40.336 5x^2 - 186.46x + 116.6$	116.60	0.992 98	0.068 31
三次多项式回归	$Y = 69.310 8x^3 - 80.958x^2 - 4.427 5x + 108.514$	108.51	0.996 86	0.045 70
指数回归	$Y = 112.363 \times 0.445 942^x$	112.36	0.967 61	0.126 23
几何回归	$Y = 54.119 8x^{-0.373 197}$	无意义		
双曲线回归	$1/Y = -0.000 134 639x^2 + 0.011 643 4x + 0.007 898 74$	126.60	0.992 35	0.071 27

表中 $x = \Delta a$, $Y = G_{II}$. 从表中看出:双曲线回归,二次、三次多项式回归都有较高的精度和接近 1 的相关系数. 双曲线回归更接近理论值. 采用回归逼近所得 G_{II} 值比直接有限元计算值精度高得多.

G_{II} 的取值范围:

$$G_{II} + \frac{t_{a,f}}{\sqrt{n}} = G_{II} + \frac{t_{0.05,5}}{\sqrt{6}} = G_{II} + 1.049 6 S.$$

作者用该方法计算了三点弯曲、紧凑拉伸和单边裂纹试件相应应变能释放率,且与断裂力学著作中的有关公式进行了比较,均取得令人满意的结果. 采用双曲线回归方式更适合上述试件,误差可控制在 1% 之内.

5 结论与讨论

由上所述,可以看出:

- 1) 用逐点闭合有限元法进行能量释放率计算方法是可行的.
- 2) 外推逼近法计算复合型裂纹的应变能释放率 G_I 、 G_{II} 、 G_{III} 的新方法,比其它方法可算得更可靠的数据.
- 3) 逐点闭合外推逼近法计算复合型裂纹的应变能释放率的方法,可特别适用于复合材料脱层的断裂力学行为的计算研究.
- 4) 计算和实验不可能得出裂纹尖端应力为无穷大的结果,所以采用外推逼近是有一定道理的.

[参 考 文 献]

- [1] Kardestuncer H. *Finite Element Handbook*[M]. New York: McGraw-Hill Book Company, 1987.
- [2] Rybicki E F, Kanninen M F. A finite element calculation of stress intensity factors by modified crack closure integral[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 1977, 9(4): 931—938.
- [3] de Moura M F S F, Goncalves J P M, Marques A T, et al. Modeling compression failure after low velocity impact on laminated composites using interface elements[J]. *J Composites Materials*, 1997, 31(15): 1462—1479.

- [4] Whitcomb J D. Three dimensional analysis of a posthucked embedded delimitation[J]. *J Composite Materials*, 1989, 23(9): 862—887.
- [5] Mukherjee Y X. A numerical and experimental study of delaminated layered composites[J]. *J Composite Materials*, 1994, 28(9): 837—870.
- [6] LU Xian-qiang, LIU Dah-sin. Finite element analysis of strain energy release rate at delamination front [J]. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 1991, 10(5): 179—292.
- [7] 张德兴. 有限元素法新编教程[M]. 上海: 同济大学出版社, 1989.
- [8] 杜善义, 王彪. 复合材料细观力学[M]. 北京: 科学出版社, 1998.

Research for the Strain Energy Release Rate of Complex Cracks by Using Point-by-Point Closed Extrapolation Approach

GUO Mao-lin, MENG Qing-yuan, WANG Biao
(Department of Astronautics and Mechanics, P. O. Box 344,
Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, P. R. China)

Abstract: A new extrapolation approach was proposed to calculate the strain energy release rates of complex cracks. The point-by-point closed method was used to calculate the closed energy, thus the disadvantage of self-inconsistency in some published papers can be avoided. The disadvantage is that the closed energy is repeatedly calculated: when closed nodal number along radial direction is more than two, the displacement of nodes behind the crack tip that is multiplied by nodal forces, the closed energy has been calculated and the crack surfaces have been closed, and that closed energy of middle point is calculated repeatedly. A DCB(double cantilever beam)specimen was calculated and compared with other theoretical results, it is shown that a better coincidence is obtained. In addition the same results are also obtained for compact tension specimen, three point bend specimen and single edge cracked specimen. In comparison with theoretical results, the error can be limited within 1 per cent. This method can be extended to analyze the fracture of composite laminates with various delamination cracks.

Key words: extrapolation approach; point-by-point close; complex crack; strain energy release rate