

文章编号: 1000-0887(2003) 02-0185-07

弹性_粘塑性材料 I 型动态扩展裂纹 尖端场的渐近解*

李范春^{1,2}

(1. 上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072;
2. 哈尔滨工程大学建筑工程学院, 哈尔滨 150001)

(我刊原编委何吉欢推荐)

摘要: 提出了一种新的弹性_粘塑性模型用于分析 I 型动态扩展裂纹尖端的应力应变场, 给出了适当的位移模式, 推导了渐近方程并且给出了数值解. 分析和计算表明: 对于低粘性情况, 裂纹尖端场具有对数奇异性; 对于高粘性情况, 渐近方程无解. 分析比较表明该结果具有高玉臣提出的单参数解的所有优点, 并且消除了粘性区随裂纹扩展而移动的不足.

关键词: 裂纹场; 动态扩展; 粘塑性

中图分类号: O346.1 文献标识码: A

引 言

裂纹尖端的应力应变场是断裂理论的重要课题之一. 对于线弹性材料, 由于应力强度因子的引入, 裂纹尖端场的属性已被完全揭示. 然而, 对于非线性弹性材料, 裂纹尖端场是非常复杂的, 场的属性对材料的行为和裂纹状态非常敏感.

据作者所知, 对于塑性材料, 扩展裂纹尖端场的早期研究由 Chitaley 和 McClintock^[1] 给出的 II 型问题解. 对于准静态 I 型扩展裂纹, 在 $\nu = 0.5$ 情况下, 裂纹尖端场的解由高玉臣^[2] 给出. 通过认真研究, 我们发现对于扩展裂纹, 在理论上仍存在着许多进一步发展的空间. 与准静态解相比, 动态具有更加合理的属性^[3~5]. 但是, 一些动态解^[3] 含有塑性激波及两个自由参数, 这是令人置疑的问题.

文[6] 建议了一种弹性_粘塑性模型, 由文[6] 给出的 I 型扩展裂纹尖端场的解消除了过去弹塑性解的所有缺陷. 此外, 由文[6] 给出的解是单参数解. 对于 I、II 型裂纹的应变奇异性方面的研究由文[7]~ [10] 给出. 但是, 文[6]、[8] 存在着粘性区随裂纹扩展而移动的问题, 这是不合理的.

本文对文[6] 提出的本构方程进行了修正. 假设当接近裂纹面时粘性系数趋于零 ($\eta = \eta_0 r \sin\theta$), 并对动态扩展裂纹尖端场进行了渐近分析. 通过分析, 我们发现本文结果具有文[6] 结果的所有优点并且消除了粘性区随裂纹扩展而移动的问题. 本文结果是单参数解, 应变具有 $A \ln(R_0/r)$ 奇异性.

* 收稿日期: 2001_09_10; 修订日期: 2002_06_11

作者简介: 李范春(1960—), 男, 山东招远人, 教授, 博士(E-mail: lifanchun@263.sina.com).

1 本构模型

弹性-粘塑性本构模型如图 1 显示, 模型由 3 个元件组成, 即弹性元件、塑性元件和粘性元件。以 $\varepsilon, \varepsilon_e, \varepsilon_p$ 表示总应变、弹性应变和塑性应变, $\sigma, \sigma_v, \sigma_p$ 表示总应力、粘性应力和塑性应力。则, 我们有

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p, \quad \varepsilon_e = \sigma/E, \quad \dot{\varepsilon} = \lambda^* \dot{\sigma}_p; \tag{1}$$

$$\sigma = \sigma_v + \sigma_p, \quad \sigma_v = \eta \dot{\varepsilon}_p, \quad \sigma_p = F(\varepsilon_p), \tag{2}$$

这里 λ^* 是流动因子, E 是弹性模量, η 是粘性系数, $F(\varepsilon_p)$ 是塑性加载函数, 圆点表示对时间 t 的导数。

由 (1)、(2) 式有

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \lambda^* \dot{\sigma}_p, \\ \lambda = \frac{\lambda^*}{1 + \eta \lambda^*} = \frac{1}{\eta} \left[1 - \frac{F(\varepsilon_p)}{\sigma} \right], \\ \varepsilon_p = \varepsilon - \frac{\sigma}{E}, \end{cases} \tag{3}$$

对于三维情况, 我们以张量形式重写 (1)、(2), 则有

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon} = C : \dot{\sigma} + \lambda S, \\ \lambda = \frac{1}{\eta} \left[1 - \frac{F(\varepsilon_p)}{\sigma} \right] \geq 0, \\ \dot{\varepsilon}_p = \frac{2}{3\eta} [\dot{\sigma} - F(\varepsilon_p)] \cdot \end{cases} \tag{4}$$

这里 S 是 σ 的偏量, C 是 4 阶柔度张量, σ 是等效应力, ε_p 是等效塑性应变。 σ 和 ε_p 由下式定义

$$\sigma = \left(\frac{3}{2} S : S \right)^{1/2}, \quad \varepsilon_p = \int \left(\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_p : \dot{\varepsilon}_p \right) dt, \quad \dot{\varepsilon}_p = \lambda S \tag{5}$$

2 基本方程

让 $x_i = (i = 1, 2)$ 表示固定的笛卡尔坐标系。我们考虑沿 x_1 方向以常速度 V 扩展的 I 型裂纹。以 x, y 表示随裂纹一起运动的正交的坐标系。则有

$$x_1 = x + Vt, \quad x_2 = y, \tag{6}$$

这里 t 表示时间(见图 2)。

稳恒扩展裂纹是指如果在 x, y 坐标观察应力和应变场, 场将不随时间而改变。对于任意量 Φ , 我们有它的率为:

$$\dot{\Phi} = -V \frac{\partial}{\partial x} \Phi = V \left[\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \right] \Phi, \tag{7}$$

$$\Phi = \Phi_j \dots k e_j \dots e_k, \quad \dot{\Phi} = \dot{\Phi}_j \dots k e_j \dots e_k \tag{8}$$

以 σ_j, ε_j 和 u_i 分别表示应力分量、应变分量和位移分量, 则有运动方程和几何关系为:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \rho r, \quad \frac{\partial \alpha_{\theta 0}}{r \partial \theta} + \frac{\partial \alpha_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\alpha_\theta}{r} = \rho_\theta, \tag{9}$$

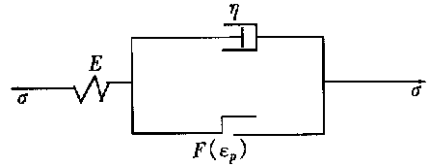


图 1 本构模型

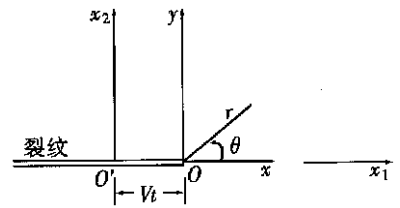


图 2 运动和静止坐标

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{\theta} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} - \frac{u_{\theta}}{r} \right], \quad (10)$$

这里 ρ 是质量密度。

现在, 我们考虑塑性单元呈现理想塑性这种特殊情况。对于三维问题有:

$$\sigma_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_k^k \delta_{ij} + \lambda \delta_{ij}, \quad \lambda = \frac{1}{\eta} \left[1 - \frac{\sigma_0}{\sigma} \right], \quad (11)$$

这里, σ_0 是拉伸屈服应力, ν 是泊松比。对于平面应变情况, 使用条件 $\varepsilon_z = 0$, 得:

$$\begin{cases} \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \left[\frac{1}{2} - \nu \right] \sigma_p, \\ \sigma_p = \frac{2E}{3} e^{-\Lambda} \int_0^t \lambda(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) e^{\Lambda} dt, \\ \Lambda = \frac{2E}{3} \int_0^t \lambda dt. \end{cases} \quad (12)$$

$$\sigma = \sqrt{3} \left[\frac{1}{4} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})^2 + \sigma_{xy}^2 + \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} - \nu \right]^2 (\sigma_{xx} - \sigma_{yy} - \sigma_p)^2 \right]^{1/2}, \quad (13)$$

对于不可压缩材料, 我们有:

$$\sigma_{zz} = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}), \quad (14)$$

$$\sigma = \sqrt{3} \left[\frac{1}{4} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})^2 + \sigma_{xy}^2 \right]^{1/2}, \quad (15)$$

$$\begin{cases} -\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = -\frac{3}{4E} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) - \frac{\lambda}{2} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}), \\ \varepsilon_{xy} = \frac{3}{2E} \sigma_{xy} + \lambda \sigma_{xy}, \\ \lambda = \frac{1}{\eta} \left[1 - \frac{\sigma_0}{\sigma} \right]. \end{cases} \quad (16)$$

3 渐近分析

对于不可压缩材料, 我们能够引进位移势函数 U , 则有:

$$u_r = -\frac{\partial U}{r \partial \theta}, \quad u_{\theta} = \frac{\partial U}{\partial r}. \quad (17)$$

对于理想塑性材料, 我们认为在裂纹尖端附近, 应力是有界量。由(9)式可知 \dot{w}_i 与 $1/r$ 同阶, 根据文[3]的结果, 我们有

$$U = r^2 \left[A \sin \theta \ln \frac{R_0}{r} + g(\theta) \right], \quad (18)$$

这里 A 是一个称为应变奇异性因子的待求常数, R 是塑性区的尺度。

由(17)、(18)和(7)我们得:

$$\begin{cases} u_r = -\frac{\partial U}{r \partial \theta} = -r \left[2A \cos 2\theta \ln \frac{R_0}{r} + g' \right], \\ u_{\theta} = \frac{\partial U}{\partial r} = r \left[2A \sin 2\theta \left[\ln \frac{R_0}{r} - \frac{1}{2} \right] + 2g \right], \end{cases} \quad (19)$$

$$r = \frac{V^2}{r} [2A(2\cos 2\theta - \cos 4\theta) - (g'' + 4g') \sin^2 \theta], \quad \theta = 0, \quad (20)$$

这里, 撇号表示对 θ 的导数。

进一步由(19)、(9)和(7)有:

$$\varepsilon_r = - \varepsilon_\theta = - 2A \frac{V}{r} \cos \theta, \quad \varepsilon_\theta = \frac{V}{r} \left[2A \sin 3\theta - \frac{1}{2}(g \ominus + 4g) \sin \theta \right]. \quad (21)$$

由于在裂纹尖端应力是有限值, 则有:

$$\sigma_j = \sigma_j(\theta). \quad (22)$$

为了方便, 我们引入如下各量:

$$\Sigma = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta)/\sigma_0, \quad S = \frac{1}{2}(\sigma_{rr} - \sigma_\theta)/\sigma_0, \quad T = \sigma_\theta/\sigma_0. \quad (23)$$

各量相应的率为:

$$\Sigma = \frac{V}{r} \sin \theta \frac{d\Sigma}{d\theta}, \quad S = \frac{V}{r} \sin \theta \left[\frac{dS}{d\theta} - 2T \right], \quad T = \frac{V}{r} \sin \theta \left[\frac{dT}{d\theta} + 2S \right]. \quad (24)$$

下面, 我们说明材料的粘性, 粘性系数被假设沿着裂纹面服从线性分布. 因此, 我们考虑这种由下式定义的 η .

$$\eta = \eta_0 r \sin \theta. \quad (25)$$

将(21)、(23)、(24)和(25)代入到(16), 将(2)、(23)代入(9), 并引入如下无量纲量.

$$\alpha = \frac{2E}{3V\eta_0}, \quad G = \frac{2E}{3\sigma_0}g, \quad A = \frac{2E}{3\sigma_0}A, \quad M = V \left[\frac{3\rho}{E} \right]^{1/2}. \quad (26)$$

最后, 我们得:

$$\begin{cases} \frac{dS}{d\theta} - 2T + \frac{1}{\sin \theta} \left[2A \cos \theta + \frac{\alpha S}{\sin \theta} \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right] = 0, \\ \frac{dT}{d\theta} + 2S - \frac{M^2}{1 - M^2 \sin^2 \theta} \left[A \cos 2\theta + \alpha T \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right] = 0; \end{cases} \quad (27)$$

$$\begin{cases} \frac{d\Sigma}{d\theta} + \frac{1}{\sin \theta} \left[2A \cos \theta + \frac{\alpha S}{\sin \theta} \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right] = 0, \\ G \ominus + 4G' - \frac{1}{1 - M^2 \sin^2 \theta} \left[A(1 + 2\cos 2\theta) + 2M^2(\cos 4\theta - 2\cos \theta) - \frac{2\alpha T}{\sin^2 \theta} \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right] = 0, \end{cases} \quad (28)$$

这里

$$x = (S^2 + T^2)^{1/2}, \quad (29)$$

公式(27)和(28)为裂纹尖端场的渐近方程.

现在, 我们给出边界条件, 根据对称条件 $u_\theta|_{\theta=0} = \varepsilon_\theta|_{\theta=0} = \sigma_\theta|_{\theta=0} = 0$, 则有

$$T(0) = G(0) = G''(0) = 0. \quad (30)$$

进一步由 $\sigma_\theta|_{\theta=\pi} = \sigma_\theta|_{\theta=\pi} = 0$, 则有

$$T(\pi) = 0, \quad \Sigma(\pi) - S(\pi) = 0. \quad (31)$$

由 $\theta = 0$ 处的正则条件, 有

$$S(0) = -1. \quad (32)$$

4 应力场的数值结果

这里给出(见图3)方程(27)~(28)的数值结果(见图3). 其中, 待求常数 A 要求满足边界条件(31)式.

5 与弹塑性解的比较

为了将以上结果与弹塑性解^[3]相比较, 我们引入新的函数 λ 和 ϕ . 则有

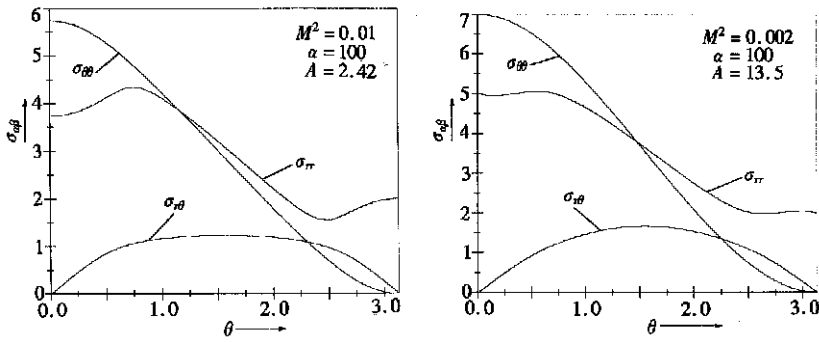


图3 应力场曲线

$$x = 1 + \frac{\lambda}{\alpha} \sin \theta, \quad S = - \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha} \sin \theta \right) \cos \phi, \quad T = \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha} \sin \theta \right) \sin \phi \quad (33)$$

(27) 式变为

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha} \frac{d\lambda}{d\theta} + \frac{\lambda}{\alpha} \cot \theta + \frac{\lambda}{\sin^2 \theta} \frac{\cos^2 \phi - M^2 \sin^2 \theta}{1 - M^2 \sin^2 \theta} - \\ \frac{A}{\sin \theta (1 - M^2 \sin^2 \theta)} [2 \cos \phi \cot \theta + M^2 \sin(\phi - 2\theta)] = 0, \\ \left(1 + \frac{\lambda}{\alpha} \sin \theta \right) \left(\frac{d\phi}{d\theta} - 2 \right) - \frac{\lambda}{\sin \theta} \frac{\sin \phi \cos \phi}{1 - M^2 \sin^2 \theta} + \\ \frac{A}{1 - M^2 \sin^2 \theta} [2 \sin \phi \cot \theta - M^2 \cos(\phi - 2\theta)] = 0 \end{cases} \quad (34)$$

(28) 式变为

$$\begin{cases} \frac{d\Sigma}{d\theta} + \frac{1}{\sin \theta} [2A \cos \theta - \lambda \cos \phi] = 0, \\ \frac{d^3 G}{d\theta^3} + 4 \frac{dG}{d\theta} - \frac{1}{1 - M^2 \sin^2 \theta} \left[A(1 + 2 \cos \theta) + \right. \\ \left. 2M^2(\cos 4\theta - 2 \cos 2\theta) - 2\lambda \frac{\sin \phi}{\sin \theta} \right] = 0 \end{cases} \quad (35)$$

如果在(34)中令 $\alpha \rightarrow \infty$, 即 $\eta_0 \rightarrow 0$, 则有

$$\lambda = \frac{A [2 \cos \phi \cot \theta + M^2 \sin \theta \sin(\phi - 2\theta)]}{\cos^2 \phi - M^2 \sin^2 \theta}, \quad (36)$$

$$\frac{d\phi}{d\theta} - 2 - \frac{2AM^2 \cos(\phi - 2\theta)}{\cos^2 \phi - M^2 \sin^2 \theta} = 0 \quad (37)$$

当粘性消失时, 方程(36)和(37)的结果与文[3]结果恰恰相同, 此时方程转化为弹塑性解方程。但是, 如果 $\eta_0 \neq 0$, 无论 α 怎样大, 方程(34)的解与方程(37)的解仍有本质的区别。

6 数值结果

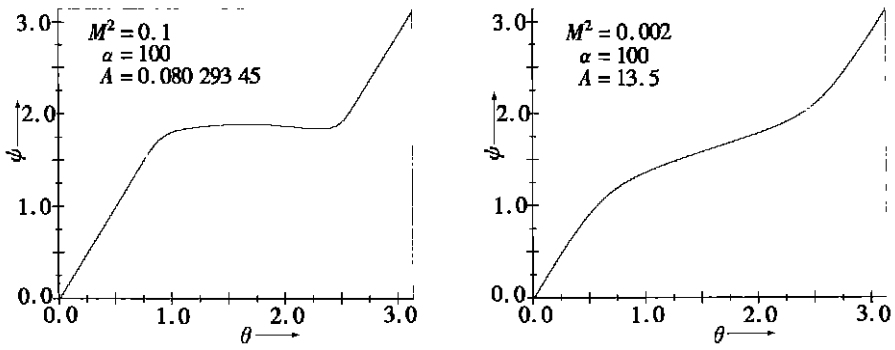
从方程(30)~(32), 得到边界条件(38)式。对方程(34)进行了数值计算。

$$\phi(0) = 0, \quad \phi(\pi) = \pi, \quad \lambda(0) = 2A \quad (38)$$

常数 A 被选择以满足条件 $\phi(\pi) = 2A$, 计算结果如图4所示。

7 结论

1) 在本文中, 我们引入了粘性的概念, 由于粘性的引入, 即使在粘性系数非常小的情况

图4 ϕ, θ 分布曲线

下, I 型动态扩展裂纹尖端场中存在的塑性激波现象也会被消除。

2) 对于 I 型裂纹, 获得了单参数解。在应变奇异项 $A \ln(R/r)$ 中, R 是由远场确定的未知量, A 由渐近解获得。

3) 本文提出的弹性-粘塑性模型是一个合理的模型。对于低应变率情况, 模型给出通常的弹塑性解的结果。对于高应变率情况, 本模型的解比通常的弹塑性解简单。

4) 本文消除了粘性区随裂纹扩展而移动的问题。

[参 考 文 献]

- [1] Chitaley A D, McClintock F A. Elastic-plastic mechanics of steady crack growth under anti-plane shear[J]. J Mech Phys Solids, 1971, 19(3): 163—174.
- [2] 高玉臣. 理想塑性介质中裂纹定常扩展的弹塑性场[J]. 力学学报, 1980, 12(1): 48—56.
- [3] GAO Yu_chen, Nemat Nasser S. Dynamic fields near a crack tip growing in an elastic-perfectly-plastic solid[J]. Mech Mater, 1983, 2: 47—60
- [4] GAO Yu_chen. Asymptotic dynamic solution of Mode I propagating crack tip field[J]. Int J Fract, 1985, 29(4): 171—180.
- [5] GAO Yu_chen, Nemat Nasser S. Mode II dynamic fields near a crack tip growing in an elastic-perfectly-plastic solid[J]. Int J Mech Solids, 1984, 32(1): 1—19.
- [6] GAO Yu_chen. Uniparameter plastic field near a dynamic crack tip[J]. Mechanics Research Communication, 1988, 15(5): 307—313.
- [7] GAO Yu_chen. Further study on strain singularity behavior of moving crack in elastic-viscoplastic materials[J]. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 1990, 14(3): 233—242.
- [8] LI Fan_chun. The influence of a rate sensitive effect of material for a propagating crack tip field[J]. Acta Mech Solids, 1992, 5(2): 184—192.
- [9] 李范春. III型扩展裂纹尖端场渐近解的研究[J]. 力学学报 1993, 25(6): 732—737.
- [10] 李范春, 齐辉. 弹性-应变软化粘塑性材料反平面剪切动态扩展裂纹尖端的渐近解[J]. 应用数学和力学, 1997, 18(2): 161—167.

Asymptotic Dynamic Solution to the Mode I Propagating Crack_Tip Field in Elastic_Viscoplastic Material

LI Fan_chun^{1,2}

(1. Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, P. R. China ;

2. School of Civil Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, P. R. China)

Abstract: A new elastic_viscoplastic mode was proposed to analyze the stress and strain fields surrounding the tip of a propagating mode I cracks. A proper displacement pattern was suggested and asymptotic equations were derived, and numerical solutions were illustrated. The analysis and calculation show that the crack_tip field is of logarithmic singularity for smaller viscosity, however no solution exists for large viscosity. By a careful analysis and comparison, it is found that the present results retain all merits of those given by GAO Yu_chen, while removing existing problems.

Key words: crack_tip field; dynamic propagating; viscoplastic