

文章编号: 1000-0887(2003) 02-0192-05

正交各向异性材料的混合硬化 弹塑性本构方程*

刘腾喜^{1,2}, 黄世清¹, 傅衣铭¹

(1. 湖南大学 工程力学系, 长沙 410082; 2. 浙江大学 建筑工程学院, 杭州 310027)

(皓江推荐)

摘要: 建立了混合硬化正交各向异性材料的屈服准则, 进而推导了与之相关的塑性流动法则。根据简单应力状态的实验曲线, 可得到广义等效应力-应变关系。初始屈服曲面与材料的弹性常数有关, 材料退化为各向同性且只考虑各向同性硬化时, 屈服函数退化为 Huber-Mises 屈服函数, 相关的本构方程退化为 Prandtl-Reuss 方程

关键词: 正交各向异性; 混合硬化; 弹塑性; 屈服准则; 本构方程

中图分类号: O344.1 文献标识码: A

引 言

Hill 于 1948 年在 Mises 屈服准则的基础上首先提出了一个正交各向异性材料的屈服准则及与之相关的流动法则^[1], 得到了广泛的应用。但 Hill 屈服准则采用了与应力球张量无关的假设, 这一点与实际情况有一定差异, 因为在球张量作用下, 正交各向异性材料会产生较大的形变。对于循环加载情况, 由于“鲍氏效应”的影响, 有的各向异性材料产生了明显的“运动硬化”, 如果仍然按照各向同性硬化来建立本构关系, 势必产生较大的误差。本文在 Hill 准则的基础上, 进行了修正和推广, 同时考虑材料的“运动硬化”和“等比硬化”, 提出了一个混合硬化正交各向异性材料的屈服准则, 并推导与之相关的流动法则。该屈服准则可退化到 Hill 准则, 当材料退化为各向同性时, 甚至可退化到 Mises 屈服准则。因此, 它具有更广泛的适用范围。

1 混合硬化屈服准则

本文的基本假设为: ① 静水压力产生塑性变形, 塑性应变可压缩。② 由主动应力均匀扩张不影响塑性变形。③ 屈服曲面在应力空间中随着塑性应变的产生不断移动和扩张。④ 无量纲化后的正交各向异性材料的屈服准则与各向同性材料的屈服准则(Huber-Mises 准则) 同构, 且当正交各向异性材料退化为各向同性材料时, 其屈服准则退化为 Huber-Mises 准则。

基于以上 4 个假设, 取混合硬化的屈服准则为:

$$f(\sigma_{ij} - b_{ij}) - K(\xi) = 0, \quad (1)$$

* 收稿日期: 2001_07_03; 修订日期: 2002_08_05

作者简介: 刘腾喜(1963—), 男, 湖南临澧人, 副教授, 博士; 现工作单位: 湖南大学工程力学系 (E_mail: liutx@hnu.net.cn)。

其中 $f(\sigma_{ij} - b_{ij})$ 为屈服函数; $\kappa(\zeta)$ 为硬化参量, 它表示屈服曲面的大小, 常设为等效应力 σ ; ζ 为内变量, 一般取作等效塑性应变 ε^p , $\kappa(\zeta)$ 随塑性应变的演化即反映材料的各向同性硬化; b_{ij} 是二阶对称张量, 表示屈服曲面的中心, 称为“背应力”, 它随着塑性应变的演化即反映材料的“运动硬化”; $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - b_{ij}$ 称为“主动应力”, 它是引起塑性变形的主要因素。同时考虑各向同性硬化和“运动硬化”, 即构成“混合硬化”。为满足假设②有由主动应力 $\sigma_{ij} - b_{ij}$ 引起的应变分量满足 $\dot{\varepsilon}'_{11} = \dot{\varepsilon}'_{22} = \dot{\varepsilon}'_{33}$, 即

$$\frac{\sigma_{11} - b_{11}}{C_{11} + C_{12} + C_{13}} = \frac{\sigma_{22} - b_{22}}{C_{12} + C_{22} + C_{23}} = \frac{\sigma_{33} - b_{33}}{C_{13} + C_{23} + C_{33}} \quad (2)$$

其中 C_{ij} 为材料的弹性常数。令屈服函数 $f(\sigma_{ij} - b_{ij})$ 有如下形式:

$$f = K_{12}(\sigma'_{11} - \mu_{12}\alpha_{12}\sigma'_{22})^2 + K_{23}(\sigma'_{22} - \mu_{23}\alpha_{23}\sigma'_{33})^2 + K_{31}(\sigma'_{33} - \mu_{31}\alpha_{31}\sigma'_{11})^2 + 2K_{44}\sigma'^2_{44} + 2K_{55}\sigma'^2_{55} + 2K_{66}\sigma'^2_{66} \quad (3)$$

其中

$$\alpha_{12} = \frac{C_{11} + C_{12} + C_{13}}{C_{12} + C_{22} + C_{23}}, \quad \alpha_{23} = \frac{C_{12} + C_{22} + C_{23}}{C_{13} + C_{23} + C_{33}}, \quad \alpha_{31} = \frac{C_{13} + C_{23} + C_{33}}{C_{11} + C_{12} + C_{13}}$$

它表明正交各向异性材料的初始屈服曲面与材料的弹性常数有关, 这是 Hill 理论所没有的特点。若不考虑运动硬化, $b_{ij} = 0$, 则 $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij}$, 再令 $\alpha_{12} = \alpha_{23} = \alpha_{31} = \mu_{12} = \mu_{23} = \mu_{31} = 1$, (3)式退化为 Hill 于 1948 年提出的关于正交各向异性材料的屈服函数。

2 相关的流动法则和本构方程

为满足假设④对屈服函数无量纲化, 选取系数

$$\begin{cases} K_{12} = \frac{1}{2\Sigma_{11}^2}, & K_{23} = \frac{1}{2\Sigma_{22}^2}, & K_{31} = \frac{1}{2\Sigma_{33}^2}, & K_{44} = \frac{1}{2\Sigma_{44}^2}, & K_{55} = \frac{1}{2\Sigma_{55}^2}, \\ K_{66} = \frac{1}{2\Sigma_{66}^2}, & \mu_{12} = \frac{\Sigma_{11}}{\alpha_{12}\Sigma_{22}}, & \mu_{23} = \frac{\Sigma_{22}}{\alpha_{23}\Sigma_{33}}, & \mu_{31} = \frac{\Sigma_{33}}{\alpha_{31}\Sigma_{11}}, \end{cases} \quad (4)$$

式中 Σ_{11} 、 Σ_{22} 、 Σ_{33} 分别为正交异性材料主轴 x 、 y 、 z 方向的屈服应力, Σ_{44} 、 Σ_{55} 、 Σ_{66} 分别为对应于坐标平面 (x, y) 、 (y, z) 、 (z, x) 的纯剪屈服应力。于是(3)式变为:

$$f = \frac{1}{2}[(\sigma'_{11} - \sigma'_{22})^2 + (\sigma'_{22} - \sigma'_{33})^2 + (\sigma'_{33} - \sigma'_{11})^2] + \sigma'^2_{44} + \sigma'^2_{55} + \sigma'^2_{66} \quad (5)$$

其中 $\sigma'_{ij} = (\sigma_{ij} - b_{ij})/\Sigma_{ij}$ 。根据无量纲化屈服函数(5), 定义等效主动应力

$$\sigma = \frac{K}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma'_{11} - \sigma'_{22})^2 + (\sigma'_{22} - \sigma'_{33})^2 + (\sigma'_{33} - \sigma'_{11})^2 + 2(\sigma'^2_{44} + \sigma'^2_{55} + \sigma'^2_{66})} \quad (6)$$

式中应力量纲的常数 K 待定。将塑性势函数取作

$$f = \frac{K^2}{2}[(\sigma'_{11} - \sigma'_{22})^2 + (\sigma'_{22} - \sigma'_{33})^2 + (\sigma'_{33} - \sigma'_{11})^2 + 2(\sigma'^2_{44} + \sigma'^2_{55} + \sigma'^2_{66})] \quad (7)$$

相关的流动法则为

$$d\varepsilon_{ij} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} \quad (8)$$

即

$$\begin{cases} d\mathcal{E}_{11}^p = d\lambda \frac{K^2}{\Sigma_{11}} (2\dot{\sigma}_{11} - \dot{\sigma}_{22} - \dot{\sigma}_{33}), & d\mathcal{E}_{44}^p = 2d\lambda \frac{K^2}{\Sigma_{44}} \dot{\sigma}_{44}, \\ d\mathcal{E}_{22}^p = d\lambda \frac{K^2}{\Sigma_{22}} (2\dot{\sigma}_{22} - \dot{\sigma}_{33} - \dot{\sigma}_{11}), & d\mathcal{E}_{55}^p = 2d\lambda \frac{K^2}{\Sigma_{55}} \dot{\sigma}_{55}, \\ d\mathcal{E}_{33}^p = d\lambda \frac{K^2}{\Sigma_{33}} (2\dot{\sigma}_{33} - \dot{\sigma}_{11} - \dot{\sigma}_{22}), & d\mathcal{E}_{66}^p = 2d\lambda \frac{K^2}{\Sigma_{66}} \dot{\sigma}_{66}. \end{cases} \quad (9)$$

将(9)式代入等效主动应力的定义式(6),得

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} = \frac{1}{3\sqrt{2}K d\lambda} & \left\{ (\Sigma_{11}d\mathcal{E}_{11}^p - \Sigma_{22}d\mathcal{E}_{22}^p)^2 + (\Sigma_{22}d\mathcal{E}_{22}^p - \Sigma_{33}d\mathcal{E}_{33}^p)^2 + \right. \\ & (\Sigma_{33}d\mathcal{E}_{33}^p - \Sigma_{11}d\mathcal{E}_{11}^p)^2 + \frac{9}{2} [(\Sigma_{44}d\mathcal{E}_{44}^p)^2 + \\ & \left. (\Sigma_{55}d\mathcal{E}_{55}^p)^2 + (\Sigma_{66}d\mathcal{E}_{66}^p)^2 \right\}^{1/2}, \end{aligned} \quad (10)$$

因而定义等效塑性应变增量为

$$\begin{aligned} d\mathcal{E}^p = \frac{\sqrt{2}}{3K} & \left\{ (\Sigma_{11}d\mathcal{E}_{11}^p - \Sigma_{22}d\mathcal{E}_{22}^p)^2 + (\Sigma_{22}d\mathcal{E}_{22}^p - \Sigma_{33}d\mathcal{E}_{33}^p)^2 + \right. \\ & (\Sigma_{33}d\mathcal{E}_{33}^p - \Sigma_{11}d\mathcal{E}_{11}^p)^2 + \frac{9}{2} [(\Sigma_{44}d\mathcal{E}_{44}^p)^2 + \\ & \left. (\Sigma_{55}d\mathcal{E}_{55}^p)^2 + (\Sigma_{66}d\mathcal{E}_{66}^p)^2 \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (11)$$

对于正交各向异性材料,由于异性主轴方向正应力的屈服应力不相等,异性主轴平面上剪应力的屈服应力也不相等,因而各向同性硬化的概念已不适用,不妨采用等比硬化的概念来描述材料屈服曲面在空间的形状变化.假定

$$\dot{\sigma} = \varphi \left[\int d\mathcal{E}^p \right], \quad (12)$$

曲线 φ 可由简单应力状态试验确定.不同主方向加载时,等效主动应力的定义式(6)和等效塑性应变增量的定义式(11)中的 K 取不同的值,即 φ 不唯一,但它们描述了同一个塑性变形规律.对于等比加载的特例,有 $\int d\mathcal{E}^p = \mathcal{E}^p$.由于“鲍氏效应”的存在,材料具有运动硬化的特性,背应力 b_{ij} 也可以由简单应力状态试验确定.这里假设运动硬化模型为

$$b_{ij} = \psi(\mathcal{E}_{ij}^p), \quad (13)$$

式中函数 ψ 即为运动硬化曲线,等比加载时, $b_{ij} = \psi(\mathcal{E}_{ij}^p)$.由(12)、(13)式求导,有 $d\dot{\sigma} = \varphi' d\mathcal{E}^p$,联立(10)、(11)、(12)式可得

$$d\lambda = \frac{d\dot{\sigma}}{2\dot{\sigma}\varphi'}. \quad (14)$$

上式代入(9)式,求得

$$\begin{cases} d\mathcal{E}_{11}^p = \frac{K^2 d\dot{\sigma}}{2\Sigma_{11}\dot{\sigma}\varphi'} (2\dot{\sigma}_{11} - \dot{\sigma}_{22} - \dot{\sigma}_{33}), & d\mathcal{E}_{44}^p = \frac{K^2 d\dot{\sigma}}{\Sigma_{44}\dot{\sigma}\varphi'} \dot{\sigma}_{44}, \\ d\mathcal{E}_{22}^p = \frac{K^2 d\dot{\sigma}}{2\Sigma_{22}\dot{\sigma}\varphi'} (2\dot{\sigma}_{22} - \dot{\sigma}_{33} - \dot{\sigma}_{11}), & d\mathcal{E}_{55}^p = \frac{K^2 d\dot{\sigma}}{\Sigma_{55}\dot{\sigma}\varphi'} \dot{\sigma}_{55}, \\ d\mathcal{E}_{33}^p = \frac{K^2 d\dot{\sigma}}{2\Sigma_{33}\dot{\sigma}\varphi'} (2\dot{\sigma}_{33} - \dot{\sigma}_{11} - \dot{\sigma}_{22}), & d\mathcal{E}_{66}^p = \frac{K^2 d\dot{\sigma}}{\Sigma_{66}\dot{\sigma}\varphi'} \dot{\sigma}_{66}. \end{cases} \quad (15)$$

上式与(12)、(13)式一起就构成了混合硬化正交各向异性材料的增量型塑性应力-应变关系.将弹性应变和塑性应变叠加,即可得到混合硬化正交各向异性材料的增量型弹塑性本构方程

$$d\varepsilon_j = L_{ijrs} \cdot d\sigma_s + \alpha \cdot d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_j}, \quad (16)$$

其中 L_{ijrs} 为弹性柔度系数, 当应力状态处于弹性范围或卸载时 $\alpha = 0$, 应力状态处于塑性范围且加载时 $\alpha = 1$ 。

3 数值算例

应用以上本构关系, 并结合 Hill 的分叉点屈曲理论^[2], 我们分析了正交各向异性矩形薄板受面内均匀压缩时, 材料性质及长度比 β 对弹塑性屈曲临界荷载的影响 (详细过程见文献^[3])。忽略“运动硬化”的影响, 且考虑等比加载, 相似强化函数取为

$$\sigma = \varphi(\varepsilon^p) = \xi + \eta \cdot (\varepsilon^p)^n, \quad (17)$$

其中 σ 为等效应力, ε^p 为等效塑性应变, ξ 常取为初始屈服时的等效应力, η 为硬化参量, n 为硬化指数, 且有 $0 < n < 1$ 。各向异性材料常数取为 $E_1 = 250 \text{ GPa}$, $E_2 = 150 \text{ GPa}$, $G_{12} = 50 \text{ GPa}$, $\Sigma_{11} = 550 \text{ MPa}$, $\Sigma_{22} = 400 \text{ MPa}$, $\Sigma_{12} = 200 \text{ MPa}$, $\eta = 550 \text{ MPa}$, $n = 0.29$, $\nu_{12} = 0.3$ 。各向同性材料常数取为 $E_1 = E_2 = 250 \text{ GPa}$, $G_{12} = 50 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$, $\Sigma_{11} = \Sigma_{22} = 550 \text{ MPa}$, $\Sigma_{12} = 200 \text{ MPa}$, $\eta = 550 \text{ MPa}$, $n = 0.29$ 。厚度 $t = 0.05 \text{ m}$ 。

图 1 中, 曲线 1 和曲线 2 分别为正交各向异性材料板的弹塑性屈曲、弹性屈曲临界应力受长宽比 β 的影响曲线。当材料退化为各向同性时, 板的弹塑性、弹性屈曲临界应力受长宽比 β 的影响曲线如曲线 3 和曲线 4 所示, 该结果与根据文献^[4]的有关公式计算结果吻合。

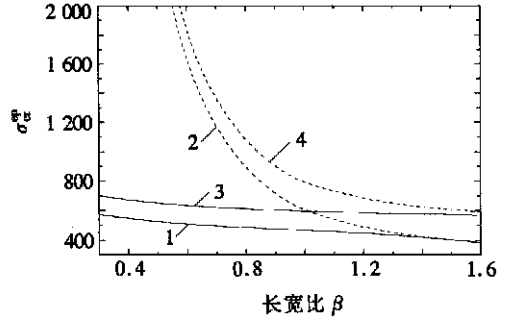


图 1 材料性质对矩形板临界应力 $\sigma_{cr}^{ep} / \text{MPa}$ 的影响

图 1 中, 曲线 1 和曲线 2 分别为正交各向异性材料板的弹塑性屈曲、弹性屈曲临界应力受长宽比 β 的影响曲线。当材料退化为各向同性时, 板的弹塑性、弹性屈曲临界应力受长宽比 β 的影响曲线如曲线 3 和曲线 4 所示, 该结果与根据文献^[4]的有关公式计算结果吻合。

4 结 论

1) 本文提出的混合硬化正交各向异性材料的屈服准则与无量纲化的 Huber_Mises 屈服准则同构, 初始屈服曲面与材料的弹性常数有关。

2) 材料等比强化的等效应力_等效塑性应变曲线以及运动强化的背应力_塑性应变曲线不唯一, 依赖于确定曲线的实验应力状态, 但它们描述同一个塑性变形规律。

3) 本文是对 Hill 关于正交各向异性材料的屈服准则及其相关的流动法则的修正和推广, 可以退化到 Hill 屈服准则及相关的流动法则; 当正交各向异性材料退化为各向同性材料且只考虑各向同性硬化时, 屈服函数(3)退化为 Huber_Mises 屈服函数, 相关的本构方程(15)退化为 Prandtl_Reuss 方程。

4) 该理论形式简明, 应用方便; 且数值算例表明各向同性结果与已有结果吻合, 验证了其正确性。

[参 考 文 献]

- [1] Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity [M]. London: Oxford University Press, 1950.
- [2] Hill R. A theory of uniqueness and stability in elastic plastic solids [J]. J Mech Phys Solids, 1958, 6 (2): 236—249.
- [3] 刘腾喜, 黄世清, 傅衣铭. 正交各向异性板的弹塑性稳定性分析 [J]. 湖南大学学报, 2001, 28(4):

54—57.

- [4] 梁炳文, 胡世光. 弹塑性稳定理论[M]. 北京: 国防工业出版社, 1983.
- [5] 黄克智, 黄永刚. 固体本构关系[M]. 北京: 清华大学出版社, 1999.
- [6] Chen J L, Sun C T. A plastic potential function suitable for anisotropic fiber composites[J]. *Journal of Composite Materials*, 1993, **27**(14): 1397—1390.
- [7] 袁祖培, 郑耀. 对于正交异性材料屈服与流动的探讨[J]. *应用数学和力学*, 1990, **11**(3): 233—238.
- [8] 王勳成, 常亮明. 运动硬化材料本构关系的精确积分及其推广应用[J]. *力学学报*, 1986, **18**(2): 226—234.
- [9] Maewal A. A class of theories of plasticity of anisotropic and pressure sensitive materials[J]. *Acta Mechanica*, 1999, **134**(1): 109—114.

The Constitutive Equations for Mixed Hardening Orthotropic Material

LIU Teng_xi^{1, 2}, HUANG Shi_qing¹, FU Yi_ming¹

(1. Department of Engineering Mechanics, Hunan University, Changsha 410082, P. R. China;
2. College of Architecture Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, P. R. China)

Abstract: A dimensionless stress yield criterion is proposed to describe the mixed hardening of orthotropic material, including kinematic hardening and proportional hardening, and the associated plastic flow law is derived. The generalized effective stress-strain formulae can be obtained correspondingly based on the experimental stress-strain curves in various simple stress states. The initial plastic anisotropy is influenced by the elastic anisotropy. The yield criterion can be reduced to Huber-Mises Criterion for isotropic materials and associated constitutive equations can be degenerated into Prandtl-Reuss Equations.

Key words: anisotropy; mixed hardening; elastoplasticity; yield criterion; constitutive equations