应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2003)02_0197_08

用于积分方程解的广义逆函数值 Padé 逼近的ε_算法和η_算法*

李春景[1,2], 顾传青[1]

(1. 上海大学 数学系, 上海 200436; 2. 同济大学 数学系, 上海 200331)

(刘宇陆推荐)

摘要: 为加速具有函数值系数的幂级数收敛并估计积分方程的特征值, 建立了两个计算广义逆函数值 Padé 逼近的有效的递推算法: ε_算法和η_算法· 借助于这两个算法之间的内在关系, 给出了广义逆函数值 Padé 逼近的著名的 Wynn 恒等式·

关 键 词: 广义逆; 函数值 Padé 逼近; ε_算法; η_算法; 积分方程
中图分类号: O241.83 文献标识码: A

引 言

设 $f(x, \lambda)$ 是一个给定的具有函数值系数的幂级数

$$f(x, \lambda) = c_0(x) + c_1(x)\lambda + c_2(x)\lambda^2 + \cdots + c_n(x)\lambda^n + \cdots, \tag{1}$$

其中 $c_j(x)$ 是一个定义在区间 (a, b) 上关于 x 的实函数或复函数· 假定 $f(x, \lambda)$ 作为 λ 的函数在 $\lambda = 0$ 是解析的·

长久以来, 为了获得难于处理的积分方程的解, 尤其当积分方程具有形如(1)的发生函数时, 人们对 Padé 逼近方法产生了兴趣· Chisholm 在文[1]已经表明, 具有秩为 n 核为 K 的积分方程的精确解, 可以用关于扰动级数的 Padé 逼近的前 $2n$ 项来表示· Graves_Morris 在文[2,3]引入广义逆函数值 Padé 逼近(GIPA)来加速幂级数(1)的收敛性和估计积分方程的特征值· 本文作者在文[4]建立了 GIPA 的一个完整的行列式计算公式和一个有用的存在定理· 本文建立了 GIPA 的两个递推算法: ε_算法和η_算法· 借助于两个算法之间的内在关系, 著名的 GIPA 的 Wynn 恒等式得以给出·

定义 1 对于给定的幂级数(1), 型为 $[n/2k]$ 的广义逆函数值 Padé 逼近(GIPA)定义为如下的有理函数

$$R(x, \lambda) = P(x, \lambda)/Q(\lambda),$$

其中 $P(x, \lambda)$ 是函数值多项式, $Q(\lambda)$ 是关于 λ 的数量多项式, 满足下列条件:

(i) $\deg\{P(x, \lambda)\} \leqslant n$, $\deg\{Q(\lambda)\} = 2k$, (2)

* 收稿日期: 2001_07_19; 修订日期: 2002_09_17
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10271074)
作者简介: 李春景(1958—), 女, 大连人, 讲师, 博士(E_mail: lichunjing@263.net);
顾传青(1955—), 男, 江苏江都人, 教授, 博士生导师(E_mail: guchqing@guomai.sh.cn).

(ii) $Q(\lambda) \mid \| P(x, \lambda) \|^2$, $\quad (3)$

(iii) $Q(\lambda) = Q^*(\lambda)$, $\quad (4)$

(iv) $Q(\lambda) f(x, \lambda) - P(x, \lambda) = O(\lambda^{n+1})$, $\quad (5)$

式中 λ 是实数,“ * ” 表示复共轭,“|” 表示整除符号. 条件(ii)意味着存在一个数量多项式 $q(\lambda)$ 使得 $Q(\lambda) q(\lambda) = \| P(x, \lambda) \|^2$, 而(3)中的函数值多项式的范数为

$$\| P(x, \lambda) \|^2 = \int_a^b | P(x, \lambda) |^2 \mathrm{d}x.$$

注意到在上面的定义中 $\deg\left\{P(x, \lambda)\right\}$ 仅仅与 λ 有关. 下面用 $[n/2k]_{\mathrm{f}}$ 表示关于给定幂级数(1),型为 $[n/2k]$ 的广义逆函数值 Padé 逼近. 对 $g(x, \lambda) \in L_2(a, b)$, 定义函数值的广义逆如下

$$g(x, \lambda)^{(-1)} = 1/g(x, \lambda) = g(x, \lambda)^* / \| g(x, \lambda) \|^2. \tag{6}$$

值得一提的是函数值的广义逆(6)与 Graves_Morris 在文[3]中的定义稍有不同.

1　GIPA 的行列式公式和对积分方程的应用

文[4]的主要结果如下:

定理 I [4]　设 $R(x, \lambda) = P(x, \lambda)/Q(\lambda)$ 是一个 $[n/2k]_{\mathrm{f}}$, 则成立

(i) 当 $n = 2k$,

$$Q(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & l_{01} & l_{02} & \cdots & l_{0,2k} \\ l_{10} & 0 & l_{12} & \cdots & l_{1,2k} \\ l_{20} & l_{21} & 0 & \cdots & l_{2,2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda^{2k} & \lambda^{2k-1} & \lambda^{2k-2} & \cdots & 1 \end{vmatrix} \tag{7}$$

和

$$P(x, \lambda) = \begin{vmatrix} 0 & l_{01} & l_{02} & \cdots & l_{0,n} \\ l_{10} & 0 & l_{12} & \cdots & l_{1,n} \\ l_{20} & l_{21} & 0 & \cdots & l_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_0(x)\lambda^n & \sum_{i=0}^{1} c_i(x)\lambda^{i+n-1} & \sum_{i=0}^{2} c_i(x)\lambda^{i+n-2} & \cdots & \sum_{i=0}^{n} c_i(x)\lambda^i \end{vmatrix}, \tag{8}$$

其中

$$l_{ij} = \sum_{l=0}^{j-i-1} \int_a^b c_{l+i+n-2k+1}(x)\, c^*_{j-l+n-2k}(x)\, \mathrm{d}x,$$

$$l_{ij} = -l_{ji} \qquad j < i,$$

此处 $c_l^*(x)$ 是 $c_l(x)$ 的复共轭函数.

(ii) 对 $n \leqslant 2k$, 设 $d_i = 0$, $i = 0, 1, \ldots, 2k-n-1$; $d_i = c_{i-2k+n}(x)$, $i = 2k-n, 2k-n+1, \ldots, 2k$. 由系数 $\left\{d_i \mid i = 0, 1, \ldots, 2k\right\}$, $[2k/2k]$ 型的 $Q(\lambda)$ 和 $P^{[2k/2k]}(x, \lambda)$ 分别由(7)和(8)得到. 而分子多项式由

$$P(x, \lambda) = \lambda^{n-2k} P^{[2k/2k]}(x, \lambda)$$

给出. 那么, $P(x, \lambda)/Q(\lambda)$ 是所需的 $[n/2k]_{\mathrm{f}}$.

(iii) 对 $n > 2k$, 由系数 $\{c_{n-2k+i}(x)\}$, $i = 0, 1, \cdots, 2k$, $[2k/2k]$ 型的 $Q(\lambda)$ 和 $P_{[2k/2k]}(x, \lambda)$ 分别由(7)和(8)得到. 而分子多项式由

$$P(x, \lambda) = \lambda^{n-2k} P_{[2k/2k]}(x, \lambda) + Q(\lambda) \sum_{i=0}^{n-2k-1} c_i(x) \lambda^i$$

给出. 那么, $P(x, \lambda)/Q(\lambda)$ 是所需的 $[n/2k]_f$.

定理 II[4] (存在性) 设 $[n/2k]_f = P(x, \lambda)/Q(\lambda)$, 其中 $P(x, \lambda)$ 和 $Q(\lambda)$ 分别由(7)和(8)得到. 假设 $n = 2k$. 那么 $[n/2k]_f$ 存在当且仅当

$$Q(0) = \det H(0, 2k-1, 2k-1) \neq 0.$$

GIPA 对积分方程的 Neumann 级数的收敛由文[2]讨论. 考虑下列具有已知解的 Fredholm 积分方程

$$\phi(x) = 1 + \lambda \int_0^1 [\{1 + |x - y|\} \phi(y)] \mathrm{d}y,$$

它能够利用 Baker 的方法[5]化为二阶常微分方程进行求解. 上述方程的解是

$$\phi(x) = \frac{2\cosh \nu(x - 1/2)}{2\cosh(1/2)\nu - 3\nu \sinh(1/2)\nu},$$

其中奇异值是 $\nu = (2\lambda)^{1/2}$. 上述方程的 Neumann 级数的前几项是

$$f(x, \lambda) = \phi(x) = 1 + \left[\frac{5}{4} + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right] \lambda + \left[\frac{161}{96} + \frac{5}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{1}{2}\right)^4\right] \lambda^2 + \cdots.$$

例 1 由(7)和(8), $[2/2]_f$ 是

$$R(x, \lambda) = \frac{P(x, \lambda)}{Q(\lambda)} = \left\{1 + \left[-1.425 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right] \lambda + \left[0.122 - 1.425\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 0.167\left(x - \frac{1}{2}\right)^4\right] \lambda^2\right\} \Big\backslash (1 - 2.675\lambda + 1.788\lambda^2).$$

2 GIPA 的 ε_算法

显然, 用行列式公式(7)和(8)计算高阶 GIPA 是困难的和代价大的. 为此, 本文在本节和第 4 节分别引入两个计算 GIPA 的有效的递推算法.

由广义逆(6), 函数值的 ε_算法定义为

$$\varepsilon_{-1}^{(j)} = 0 \quad (j = 0, 1, 2, \cdots), \tag{9}$$

$$\varepsilon_0^{(j)} = \sum_{i=0}^{j} c_i(x) \lambda^i \quad (j = 0, 1, 2, \cdots), \tag{10}$$

$$\varepsilon_{k+1}^{(j)} = \varepsilon_{k-1}^{(j+1)} + (\varepsilon_k^{(j+1)} - \varepsilon_k^{(j)})^{-1} \quad (j, k \geqslant 0). \tag{11}$$

定理 1 (恒等定理) 函数值的 ε_算法(9)~(11)借助于由广义逆(6)构造 GIPA, 则成立

$$\varepsilon_{2k}^{(j)} = [j + 2k/2k]_f \quad j, k \geqslant 0. \tag{12}$$

证明 对 $k = 0$, 证明是显然的. 由(9)~(11)和(6)得到

$$\varepsilon_1^{(j)} = (\varepsilon_0^{(j+1)} - \varepsilon_0^{(j)})^{-1} = 1/(c_{j+1}(x) \lambda^{j+1}) = H_0^{(j)}(x, \lambda)/\lambda^{j+1}, \tag{13}$$

其中 $H_0^{(j)}(x, \lambda) = c_{j+1}^{*}(x)/\|c_{j+1}(x)\|^2$, $\deg\{H_0^{(j)}\} = 0$.

对第二列, 由(11)成立

$$\varepsilon_2^{(j)} = \sum_{i=0}^{j} c_i(x) \lambda^i + c_{j+1}(x) \lambda^{j+1} + \lambda^{j+2}/(c_{j+2}^{-1}(x) - c_{j+1}^{-1}(x) \lambda), \tag{14}$$

那么由(14)得到

$$\varepsilon_2^{(j)} = O(\lambda^j) \qquad (\lambda \to \infty) \cdot \tag{15}$$

设 $g(x, \lambda) = c_{j+2}^{-1}(x) - c_{j+1}^{-1}(x)\lambda$, 则有 $\deg\{\|g(x, \lambda)\|^2\} = 2$, 而(14)变成

$$\varepsilon_2^{(j)} = (\|g(x, \lambda)\|^2 \varepsilon_0^{(j+1)} + \lambda^{j+2} g^*(x, \lambda)) / \|g(x, \lambda)\|^2 =$$

$$P_2(x, \lambda)/Q_2(\lambda), \tag{16}$$

其中 $Q_2(\lambda) = \|g(x, \lambda)\|^2 \cdot$ 于是, 从(14)和(15)得到

$$\deg\{P_2\} = j + 2, \quad \deg\{Q_2\} = 2 \cdot$$

从

$$\|P_2\|^2 = Q_2^2 \|\varepsilon_0^{(j+1)}\|^2 + Q_2 \lambda^{2(j+1)} + Q_2(\varepsilon_0^{(j+1)*} \cdot G^* + \varepsilon_0^{(j+1)} \cdot G),$$

成立 $Q_2(\lambda) \mid \|P_2(x, \lambda)\|^2 \cdot$ 由上面的讨论, 业已证明

$$\varepsilon_2^{(j)} = P_2(x, \lambda)/Q_2(\lambda) = [j + 2/2]_f \cdot$$

对 $j = 0, 1, 2, \cdots, k > 2$, 作下列归纳假设:

$$(\text{i}) \quad \varepsilon_{2k-1}^{(j)} = O(\lambda^{-j-1}), \quad \varepsilon_{2k}^{(j)} = O(\lambda^j) \quad (\lambda \to \infty); \tag{17}$$

$$(\text{ii}) \quad \varepsilon_{2k-1}^{(j)} = H_{2k-2}^{(j)}(x, \lambda)/\lambda^{j+2k-1}, \tag{18}$$

其中 $\deg\{H_{2k-2}^{(j)}\} \leqslant 2k - 2$;

$$(\text{iii}) \quad \varepsilon_{2k}^{(j)} = [j + 2k/2k]_f \cdot \tag{19}$$

为证明定理, 须证明(17)~(19)对 $k + 1$ 成立·

假设(i)成立, 由(11)得

$$\varepsilon_{2k+1}^{(j)} = O(\lambda^{-j-2}) + O((\varepsilon_{2k}^{(j+1)})^{-1}) = O(\lambda^{-j-2}) + O(\lambda^{-j-1}) = O(\lambda^{-j-1})$$

$$(\lambda \to \infty),$$

$$\varepsilon_{2k+2}^{(j)} = O(\lambda^{j+1}) - O((\varepsilon_{2k+1}^{(j)})^{-1}) = O(\lambda^j) \qquad (\lambda \to \infty), \tag{20}$$

故(17)对 $k + 1$ 成立· 当该结论成立时, (i)和(ii)是既约公式· 现假设

$$\varepsilon_{2k}^{(j+1)} = S(x, \lambda)/T(\lambda), \quad \varepsilon_{2k}^{(j)} = U(x, \lambda)/V(\lambda) \cdot \tag{21}$$

定义函数值多项式 $F(x, \lambda)$ 如下

$$F(x, \lambda) = S(x, \lambda)V(\lambda) - U(x, \lambda)T(\lambda) = \lambda^{j+2k+1} F_c(x, \lambda), \tag{22}$$

可以证明(见[6]) $V(\lambda)T(\lambda) \mid \|F_c(x, \lambda)\|^2 \cdot$ 注意到

$$\deg\{S\} \leqslant j + 2k + 1, \quad \deg\{T\} = 2k, \quad \deg\{U\} \leqslant j + 2k, \quad \deg\{V\} = 2k, \tag{23}$$

从(22)和(23), 得到 $\deg\{F_c\} \leqslant 2k$, $\deg\{VT\} = 4k \cdot$ 从而推导出

$$M(x, \lambda) = V(\lambda)T(\lambda)/F_c(x, \lambda) = V(\lambda)T(\lambda)F_c^*(x, \lambda)/\|F_c(x, \lambda)\|^2$$

是一个函数值多项式, 且有 $\deg\{M\} \geqslant 2k$, 于是成立

$$(\varepsilon_{2k}^{(j+1)} - \varepsilon_{2k}^{(j)})^{-1} = 1/(S(x, \lambda)/T(\lambda) - U(x, \lambda)/V(\lambda)) =$$

$$V(\lambda)T(\lambda)/F_c(x, \lambda)\lambda^{j+2k+1} = M(x, \lambda)/\lambda^{j+2k+1} \cdot \tag{24}$$

将(24)代入 $\varepsilon_{2k+1}^{(j)}$, 从(24)得

$$\varepsilon_{2k+1}^{(j)} = \varepsilon_{2k-1}^{(j)} + (\varepsilon_{2k}^{(j+1)} - \varepsilon_{2k}^{(j)})^{-1} =$$

$$H_{2k-2}^{(j+1)}(x, \lambda)/\lambda^{j+2k-1} + M(x, \lambda)/\lambda^{j+2k+1} = H_{2k}^{(j)}(x, \lambda)/\lambda^{j+2k+1}, \tag{25}$$

其中　$\deg\{H_{(2k)}^{(j)}\} \leqslant 2k \cdot$

故(18)对 $k + 1$ 成立· 由(25)和(11), 成立

$$\varepsilon_{2k+2}^{(j)} = \varepsilon_{2k}^{(j+1)} + \lambda^{j+2k+2}/(H_{2k}^{(j+1)}(x, \lambda) - \lambda^2 H_{2k}^{(j)}(x, \lambda)) \cdot \tag{26}$$

设 $G(x,\lambda) = H_{2k}^{(j+1)}(x,\lambda) - \lambda H_{2k}^{(j)}(x,\lambda)$, 则有

$$\deg\{G\} \leqslant 2k+1. \tag{27}$$

设 $\lambda = \xi$ 是 $\varepsilon_{2k}^{(j+1)} = S(x,\lambda)/T(\lambda)$ 中 $T(\lambda)$ 的 $2k$ 个零点中的任何一个零点, 从

$$S(x,\xi)/T(\xi) = \varepsilon_{2k}^{(j+1)}(x,\xi) = \varepsilon_{2k-2}^{(j+2)}(x,\xi) + \left(\varepsilon_{2k-1}^{(j+2)}(x,\xi) - \varepsilon_{2k-1}^{(j+1)}(x,\xi)\right)^{-1}$$

推出

$$\varepsilon_{2k-1}^{(j+2)}(x,\xi) = \varepsilon_{2k-1}^{(j+1)}(x,\xi). \tag{28}$$

类似的, 可以证明

$$\varepsilon_{2k+1}^{(j)}(x,\xi) = \varepsilon_{2k-1}^{(j+1)}(x,\xi),\quad \varepsilon_{2k+1}^{(j+1)}(x,\xi) = \varepsilon_{2k-1}^{(j+2)}(x,\xi).$$

那么, 从(28)有

$$\varepsilon_{2k+1}^{(j+1)}(x,\xi) = \varepsilon_{2k+1}^{(j)}(x,\xi). \tag{29}$$

将(29)代入(26), 成立

$$\begin{aligned}\varepsilon_{2k+2}^{(j)}(x,\xi) &= S(x,\xi)/T(\xi) + 1/\left(\varepsilon_{2k+1}^{(j+1)}(x,\xi) - \varepsilon_{2k+1}^{(j)}(x,\xi)\right) = \\ &\quad S(x,\xi)/T(\xi) + \xi^{(j+2k+2)}G(x,\xi).\end{aligned} \tag{30}$$

注意到, 由定理Ⅱ(存在性)知 $T(0) \neq 0$, 即 $\xi \neq 0$. 因此, (30)的两端在 $\lambda = \xi$ 都有极点. 上面的讨论表明: 如果 $\lambda = \xi$ 是 $T(\lambda)$ 的任何一个零点, 则有 $G(\xi) = 0$. 从(23)和(27), 假定

$$G(x,\lambda) = T(\lambda)G_0(x,\lambda),$$

那么, 由(27)成立

$$\deg\{G_0\} \leqslant 1. \tag{31}$$

由此, (26)变成

$$\begin{aligned}\varepsilon_{2k+2}^{(j)} &= S(x,\lambda)/T(\lambda) + \lambda^{j+2k+2}/G(x,\lambda) = \\ &\quad \big(T(\lambda)\,\|G_0(x,\lambda)\|^2 S(x,\lambda) + \\ &\quad \lambda^{j+2k+2}T(\lambda)G_0^*(x,\lambda)\big)/T^2(\lambda)\,\|G_0(x,\lambda)\|^2 = \\ &\quad P_{2k+2}(x,\lambda)/Q_{2k+2}(\lambda),\end{aligned} \tag{32}$$

其中 $Q_{2k+2}(\lambda) = T^2(\lambda)\,\|G_0(x,\lambda)\|^2$. 从(32),

$$\begin{aligned}\|P_{2k+2}\|^2 &= \|S\|^2\,\|G_0\|^2 Q_{2k+2} + \lambda^{2(j+2k+2)}Q_{2k+2} + \\ &\quad Q_{2k+2}\lambda^{j+2k+2}(S^*\cdot G_0^* + S\cdot G_0),\end{aligned}$$

从而得到

$$Q_{2k+2}(\lambda) \,\big|\, \|P_{2k+2}(x,\lambda)\|^2. \tag{33}$$

(32)的既约分式是

$$\begin{aligned}\varepsilon_{2k+2}^{(j)} &= P(x,\lambda)/Q(\lambda) = \big(S(x,\lambda)\,\|G_0(x,\lambda)\|^2 + \\ &\quad \lambda^{j+2k+2}G^*(x,\lambda)\big)/T(\lambda)\,\|G_0(x,\lambda)\|^2,\end{aligned} \tag{34}$$

其中 $Q(\lambda) = T(\lambda)\,\|G_0(x,\lambda)\|^2$. 于是成立

$$\deg\{Q\} = 2k+2. \tag{35}$$

利用(20), 由(35)知

$$\deg\{P\} = \deg\{\varepsilon_{2k+2}^{(j)}\} + \deg\{Q\} = j+2k+2. \tag{36}$$

从(33)~(36), 证明了

$$\varepsilon_{2k+2}^{(j)} = P(x, \lambda)/Q(\lambda) = [j+2k+2/2k+2]_f.$$

例 2 设 $f(x, \lambda) = \Phi(x) = c_0(x) + c_1(x)\lambda + c_2(x)\lambda^2 + \dots$ 与例 1 相同. 由 ε_算法, 求 $[2/2]_f$.

由(9) ~ (11)和(6), 得到

$$\varepsilon_0^{(0)} = c_0(x), \quad \varepsilon_0^{(1)} = c_0(x) + c_1(x)\lambda, \quad \varepsilon_0^{(2)} = c_0(x) + c_1(x)\lambda + c_2(x)\lambda^2,$$

$$\varepsilon_1^{(0)} = \frac{1}{c_1(x)\lambda} = \frac{c_1(x)}{\lambda\int_a^b (c_1(x))^2 \mathrm{d}x}, \quad \varepsilon_1^{(1)} = \frac{1}{c_2(x)\lambda^2} = \frac{c_2(x)}{\lambda^2\int_a^b (c_2(x))^2 \mathrm{d}x},$$

$$\varepsilon_2^{(0)} = c_0(x) + c_1(x)\lambda + 1\Bigg\backslash\left(\frac{c_2(x)}{\lambda^2\int_a^b (c_2(x))^2 \mathrm{d}x} - \frac{c_1(x)}{\lambda\int_a^b (c_1(x))^2 \mathrm{d}x}\right) =$$

$$\left\{1 + \left[-1.425 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right]\lambda + \left[0.122 - 1.425\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left.0.167\left(x - \frac{1}{2}\right)^4\right]\lambda^2\right\}\Big\backslash(1 - 2.675\lambda + 1.788\lambda^2) =$$

$$P(x, \lambda)/Q(\lambda) = R(x, \lambda),$$

其中

$$\int_a^b (c_1(x))^2 \mathrm{d}x = 1.783\,3, \quad \int_a^b c_1(x)c_2(x)\mathrm{d}x = 2.384\,92,$$

$$\int_a^b (c_2(x))^2 \mathrm{d}x = 3.189\,46.$$

显然, 例 2 的结果与例 1 的结果完全相同.

3 GIPA 的 Wynn 恒等式

记

$$N = \varepsilon_{2k-2}^{(j+1)}, \quad W = \varepsilon_{2k}^{(j-1)}, \quad C = \varepsilon_{2k}^{(j)}, \quad E = \varepsilon_{2k}^{(j+1)}, \quad S = \varepsilon_{2k+2}^{(j-1)}$$

分别是 ε_表中按照东南西北中排列的 5 个元素. 同时假设

$$nw = \varepsilon_{2k-1}^{(j)}, \quad ne = \varepsilon_{2k-1}^{(j+1)}, \quad sw = \varepsilon_{2k+1}^{(j+1)}, \quad se = \varepsilon_{2k+1}^{(j)}.$$

按照 ε_算法(9) ~ (11), 上面的元素排列如下:

$$\begin{array}{ccccc} & & N & & \\ & nw & & ne & \\ W & & C & & E \\ & sw & & se & \\ & & S & & \end{array} \tag{37}$$

引理 1 如果由(9) ~ (11)和(6)构造的元素没有出现分母为零的情形, 则成立恒等式

$$(N-C)^{-1} + (S-C)^{-1} \equiv (E-C)^{-1} + (W-C)^{-1}. \tag{38}$$

证明 由等式

$$(nw-ne) + (se-sw) = (se-ne) + (nw-sw) \tag{39}$$

和(9) ~ (11)知(39)成立, 从(37)又知(38)得证.

利用引理 1 和定理 1, 立刻得到下面的结果.

定理 2　如果由(9) ~ (11) 和(6) 构造的元素没有出现分母为零的情形, 则成立 Wynn 恒等式

$$
\begin{aligned}
&([j+2k-1/2k]_f-[j+2k/2k]_f)^{-1}+\\
&\quad([j+2k+1/2k]_f-[j+2k/2k]_f)^{-1}\equiv\\
&\quad([j+2k-1/2k-2]_f-[j+2k/2k]_f)^{-1}+\\
&\quad([j+2k+1/2k+2]_f-[j+2k/2k]_f)^{-1}\bullet
\end{aligned}
$$

4 GIPA 的 η_算法

由广义逆(6), 函数值的 η_算法定义为

$$
\begin{cases}
\eta_{-1}^{(j)}=\infty & (j=0,1,2,\cdots),\\
\eta_0^{(j)}=c_j(x)\lambda^j & (j=0,1,2,\cdots),\\
1/\eta_{2k+1}^{(j)}=1/\eta_{2k-1}^{(j+1)}+1/\eta_{2k}^{(j+1)}-1/\eta_{2k}^{(j)} & (k=0,1,2,\cdots),\\
\eta_{2k}^{(j)}=\eta_{2k-2}^{(j+1)}+\eta_{2k-1}^{(j+1)}-\eta_{2k-1}^{(j)} & (k=1,2,3,\cdots)\bullet
\end{cases}
\tag{40}
$$

形式如同 ε_表一样, 上述 η_算法(40) 构造一个称为 η_表的二维数组(见[7])• 下面的结果揭示了函数值 η_算法和 ε_算法之间的内在关系•

定理 3　在 ε_算法(9) ~ (11) 中设 $\varepsilon_0^{(j)}=\sum_{i=0}^{j}c_i(x)\lambda^i$, $i=0,1,2,\cdots$, 如果由(9) ~ (11), (40) 和(6) 构造的元素都有意义, 则成立恒等式

$$
\begin{cases}
\eta_{2k}^{(j)}\equiv\varepsilon_{2k}^{(j)}-\varepsilon_{2k}^{(j-1)}\equiv(\varepsilon_{2k+1}^{(j-1)}-\varepsilon_{2k-1}^{(j)})^{-1},\\
\eta_{2k+1}^{(j)}\equiv\varepsilon_{2k+2}^{(j-1)}-\varepsilon_{2k}^{(j)}\equiv(\varepsilon_{2k+1}^{(j)}-\varepsilon_{2k+1}^{(j-1)})^{-1}\bullet
\end{cases}
\tag{41}
$$

推论 1　如果由(9) ~ (11), (40) 和(6) 构造的元素都有意义, 则成立关系式

$$
\begin{cases}
\varepsilon_{2k}^{(0)}=\sum_{i=0}^{2k}\eta_i^{(0)} & (k=0,1,2,\cdots),\\
\varepsilon_{2k}^{(j)}=\varepsilon_0^{(j)}+\sum_{i=0}^{2k}\eta_i^{(j)} & (k=0,1,2,\cdots)\bullet
\end{cases}
\tag{42}
$$

公式(42) 可将 η_表变成 ε_表的偶数列, 从而奇数列随之而定• 另一方面, 公式(41) 可将 ε_表的偶数列变成 η_表, 从这个意义上讲, η_算法与 ε_算法是等价的•

例 3　设 $f(x,\lambda)=\Phi(x)=c_0(x)+c_1(x)\lambda+c_2(x)\lambda^2+\cdots$ 与例 1 相同• 由 η_算法, 求 $[2/2]_f$•

从 η_算法(40) 和关系(42), 得到

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_2^{(0)}=\eta_0^{(0)}+\eta_1^{(0)}+\eta_2^{(0)}=\eta_0^{(0)}+\eta_0^{(1)}+\eta_1^{(1)}=\\
&\quad\left\{1+\left[-1.425+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right]\lambda+\left[0.122-1.425\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\right.\right.\\
&\quad\left.\left.0.167\left(x-\frac{1}{2}\right)^4\right]\lambda^2\right\}\Big\backslash(1-2.675\lambda+1.788\lambda^2)=\\
&\quad P(x,\lambda)/Q(\lambda)=R(x,\lambda)\bullet
\end{aligned}
$$

[参 考 文 献]

[1] Chisholm J S R. Solution of integral equations using Pad approximants[J]. J Math Phys, 1963, **4**(12): 1506—1510.

[2] Graves_Morris P R. Solution of integral equations using generalised inverse, function_valued Pad ap-

proximants[J]. J Comput Appl Math, 1990, **32**(1): 117—124.

[3] Coope I D, Graves_Morris P R. The rise and fall of the vector epsilon algorithm[J]. Numerical Algorithms, 1993, **5**(2): 275—286.

[4] 顾传青, 李春景. 用于积分方程解的广义逆函数值 Pad 逼近的计算公式[J]. 应用数学和力学, 2001, **22**(9): 952—958.

[5] Baker G A. The Numerical Treatment of Integral Equations[M]. London: Oxford Univ Press, 1978.

[6] GU Chuan_qing. Generalized inverse matrix Pad approximation on the basis of scalar product[J]. Linear Algebra Appl, 2001, **322**(1_3): 141—167.

[7] Baker G A, Graves_Morris P R. Pad Approximants(PartⅠ)[M]. Massachusetts: Addison_Wesley Publishing Company, 1981.

[8] Graves_Morris P R, Jenkins C D. Vector valued rational interpolants Ⅲ[J]. Constr Approx, 1986, **2**(2): 263—289.

Epsilon_Algorithm and Eta_Algorithm of Generalized Inverse Function_Valued Pad Approximants Using for Solution of Integral Equations

LI Chun_jing[1,2], GU Chuan_qing[1]

(1. Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200436, P.R.China;

2. Department of Mathematics, Tongji University, Shanghai 200331, P.R.China)

Abstract: Two efficient recursive algorithms epsilon_algorithm and eta_algorithm are introduced to compute the generalized inverse function_valued Pad approximants. The approximants were used to accelerate the convergence of the power series with function_valued coefficients and to estimate characteristic value of the integral equations. Famous Wynn identification of the Pad approximants is also established by means of the connection of two algorithms.

Key words: generalized inverse; function_valued Pad approximant; epsilon_algorithm; eta_algorithm; integral equation