

文章编号: 1000-0887(2003)01-0001-11

# 采用新方法研究加层压电材料中平行界面 共线双裂纹的断裂问题\*

周振功, 王彪

(哈尔滨工业大学 复合材料研究所和光电信息中心, 哈尔滨 150001)

(我刊编委王彪来稿)

**摘要:** 利用新的方法(Schmidt 方法)研究加层压电材料中含共线并与材料界面平行的双裂纹在稳态弹性波作用下的动态问题,经富立叶变换使问题的求解转换为求解两对三重对偶积分方程。这些方程可以采用 Schmidt 方法来求解,这个方法不同与以前求解所利用的方法。结果表明应力强度因子不仅与裂纹的几何尺寸、入射波频率、加层厚度有关,而且与材料性质有关。

**关键词:** Schmidt 方法; 三重积分方程; 压电材料; 动态应力强度因子; 裂纹

**中图分类号:** O345.51      **文献标识码:** A

## 引 言

众所周知,由于压电材料的电力偶合效应,因此由压电材料制作的换能器,传感器和制动器等各种压电器件在当今的电子技术、通讯和控制技术中得到了广泛的应用。但当由压电材料制作的各种压电器件在使用过程中,由于在制作过程中缺陷的存在,会引起电器件失效破坏,因此研究压电材料的电机械性能及断裂性能是非常重要的。而且,由于裂纹的传播会引起固体结构的破坏,往往裂纹扩展是由于外部动载荷引起的,对于动态载荷作用下压电材料动态响应问题研究也非常重要了。

在压电材料断裂问题研究中,许多研究者<sup>[1~14]</sup>提出了多种裂纹面电边界条件。为了使问题的分析得到简化,一些研究者<sup>[1~6,14]</sup>假定电场在裂纹面上是不可导通条件下对一系列问题进行了分析,在这些模型中,不可导通裂纹的假设是根据裂纹面上的电荷是为零的,从而电位移在裂纹面上为零。事实上,压电材料中的裂纹中含有空气或其它气体,这就要求电场是通过裂纹的,从而电位移在裂纹上是应连续的。但是由于为了使问题在数学观上得到简化解决,压电材料中不可导通裂纹模型还有许多研究者<sup>[1~4,14~16]</sup>在使用。最近,压电材料动态响应问题研究已引起许多研究者<sup>[15~20]</sup>注意。余寿文和陈增涛<sup>[15]</sup>利用积分变换方法分析了含不可导裂纹的条状压电材料在冲击电机械载荷作用下动态响应问题。Paul 和 Nelson<sup>[17]</sup>分析了轴对称复合压电空腔柱振动问题。Khutoryansk 和 Sosa<sup>[18]</sup>构造了压电学动态控制方程的基本解表达

\* 收稿日期: 2001\_07\_19; 修订日期: 2002\_07\_20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10172030); 国家自然科学基金重点资助项目(50232030)

作者简介: 周振功(1963—),河南镇平县人,教授,博士,博导(E-mail: zhouzhang@hope.hit.edu.cn)。

式· Shindo<sup>[19]</sup> 研究了材料中单裂纹的动态问题, Narita 和 Shindo<sup>[20]</sup> 也研究了层状压电材料中单裂纹对稳态波的散射问题· 特别是在[21~ 25]中分析了含有压电装置的层状结构的控制问题, 因大多压电装置是由压电材料件和结构组成的, 压电装置系统断裂问题研究是保证压电与结构可靠性的重要基础<sup>[25- 26]</sup>· 然而, 夹层压电材料中含多裂纹的动态问题还没有研究过, 因此, 有必要对层压电材料中含多裂纹的动态问题进行分析研究·

本文利用 Schmidt 方法<sup>[27]</sup>将对夹层压电材料中共线双对称裂纹的对稳态波的散射问题进行分析研究, 其中压电层加在两个同样材料性质的弹性材料中间, 裂纹平行于压电层界面· 利用富立叶变换, 把本问题的求解转化为两对三重对偶积分方程的求解· 利用雅可比多项式把裂纹表面位移展开成级数形式, 进而利用 Schmidt<sup>[27]</sup>方法进行求解· 这种求解过程不同文献[1~ 13, 15~ 26]所采用的方法, 这种解的形式既简单又容易理解· 最终, 应力强度因子和电位移强度因子用数值形式给出·

## 1 基本方程

设一加在两相同弹性材料半空间中间的压电层中含有两长度为  $1-b$  的共线对称双裂纹, 裂纹平行于夹层界面, 两相同弹性材料半空间的材料模量为  $c_{44}^E$ · 这里右上角带有角标  $E$  的有关变量是两半空间的有关变量· 如图 1 所示, 压电层厚度为  $2h$ ,  $2b$  是两裂纹之间的距离· 对于含长度为  $a-b$  的共线对称双裂纹情况的有关解可以经过一个简单的变换而利用本文的结果( $a > b > 0$ )· 在此, 仅考虑反平面位移场和平面电场, 设  $\omega$  是入射波频率· 这里由于考虑是稳态波场, 时间因子  $\exp(-i\omega t)$  可以略去不考虑· 本构方程为:

$$\tau_k = C_{44} w_{,k} + e_{15} \phi_{,k} \quad (k = x, y), \quad (1)$$

$$D_k = e_{15} w_{,k} - \epsilon_{11} \phi_{,k} \quad (k = x, y), \quad (2)$$

$$\tau_{xz}^E = c_{44}^E w_{,x}, \quad (3)$$

$$\tau_{yz}^E = c_{44}^E w_{,x}, \quad (4)$$

这里  $\tau_k, D_k$  ( $k = x, y$ ) 分别是反平面剪切应力和平面电位移·  $c_{44}, e_{15}, \epsilon_{11}$  分别是剪切模量、压电常数和介电常数,  $w$  和  $\phi$  分别为位移和电势,  $\tau_{xz}^E, \tau_{yz}^E, w^E$  分别是弹性半空间的剪应力和位移· 运动方程为<sup>[26]</sup>

$$c_{44} \cdot^2 w + e_{15} \cdot^2 \phi = \rho \partial^2 w / \partial t^2, \quad (5)$$

$$e_{15} \cdot^2 w - \epsilon_{11} \cdot^2 \phi = 0, \quad (6)$$

$$\cdot^2 w^E = \rho^E \partial^2 w^E / \partial t^2, \quad (7)$$

这里  $\cdot^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$  是二维拉普拉斯算子·  $\rho$  是压电材料密度,  $\rho^E$  是上半空间材料密度· 由于对称性, 仅考虑  $0 \leq x < \infty, 0 \leq y < \infty$  情况就可以了·

方程(5)、(6)和(7)的解可以设为:

$$w(x, y, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \{A_1(s) \exp[-\gamma_1 y] + A_2(s) \exp[\gamma_1 y]\} \cos(sx) ds, \quad (8)$$

$$w^E(x, y, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty A_3(s) \exp[-\gamma_2 y] \cos(sx) ds, \quad (9)$$

这里  $\gamma_1 = \sqrt{s^2 - (\omega/c_{SH})^2}$ ,  $c_{SH} = \sqrt{\mu/\rho}$ ,  $\mu = c_{44} + \frac{e_{15}^2}{\epsilon_{11}}$ ,  $\gamma_2 = \sqrt{s^2 - (\omega/(c_{SH}^E))^2}$ ,  $c_{SH}^E = \sqrt{c_{44}^E/\rho^E}$ ·  $A_1(s), A_2(s)$  和  $A_3(s)$  是未知函数· 有关变量上面的横杠表示经过富立叶变换的

变量, 即:

$$f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-sx} dx \quad (10)$$

把方程(8)代入到方程(6)后, 可以假设:

$$\phi(x, y, t) - \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} w(x, y, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} [B_1(s) e^{-sy} + B_2(s) e^{sy}] \cos(sx) ds \quad (11)$$

这里  $B_1(s)$  和  $B_2(s)$  是未知函数。

如文献[15]、[19]和[20]讨论的一样, 本问题的边界条件可以描述为如下形式(本文仅考虑扰动应力场和扰动电位移场):

$$\tau_z(x, 0, t) = -\tau_0 \quad (b \leq |x| \leq 1), \quad (12)$$

$$D_y(x, 0, t) = -D_0 \quad (b \leq |x| \leq 1), \quad (13)$$

$$w(x, 0, t) = \phi(x, 0, t) = 0 \quad (|x| < b, |x| > 1), \quad (14)$$

$$\tau_z(x, h, t) = \tau_z^E(x, h, t), \quad (15)$$

$$w(x, \pm h, t) = w^E(x, \pm h, t), \quad (16)$$

$$D_y(x, \pm h, t) = 0, \quad (17)$$

$$w(x, y, t) = w^E(x, y, t) = \phi(x, y, t) = 0 \quad (\text{对于 } \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty). \quad (18)$$

本文假设是垂直于裂纹面入射的,  $\tau_0$  和  $D_0$  都是正的常数。

从而利用边界条件可以获得如下两对三重对偶积分方程:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} A(s) \cos(sx) ds = 0 \quad (0 \leq x < b, 1 < x), \quad (19)$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \gamma_1 F_1(s) A(s) \cos(sx) ds = \frac{1}{\mu} \left( \tau_0 + \frac{e_{15} D_0}{\epsilon_{11}} \right) \quad (b \leq x \leq 1) \quad (20)$$

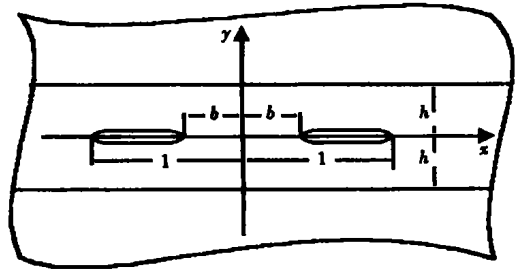


图1 夹层压电材料中平行界面的共线双裂纹

和

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} B(s) \cos(sx) ds = 0 \quad (0 \leq x < b, 1 < x), \quad (21)$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} s F_1(s) B(s) \cos(sx) ds = -\frac{D_0}{\epsilon_{11}} \quad (b \leq x \leq 1), \quad (22)$$

这里

$$F_1(s) = \frac{1 - \mu_3 e^{-2\gamma_1 h}}{1 + \mu_3 e^{-2\gamma_1 h}}, \quad F_2(s) = \frac{1 - e^{-2sh}}{1 + e^{-2sh}}, \quad A(s) = (1 + \mu_3 e^{-2s_1 h}) A_1(s),$$

$$A_2(s) = \mu_3 e^{-2\gamma_1 h} A_1(s), \quad B(s) = (1 + e^{-2sh}) B_1(s), \quad B_2(s) = e^{-2sh} B_1(s),$$

$$\mu = c_{44} + \frac{e_{15}^2}{\epsilon_{11}}, \quad \mu_1 = \gamma_1 - \frac{c_{44}^E}{\mu} \gamma_2, \quad \mu_2 = \gamma_1 + \frac{c_{44}^E}{\mu} \gamma_2, \quad \mu_3 = \frac{\mu_1}{\mu_2},$$

为了确定未知函数  $A(s)$  和  $B(s)$ , 必须求解上面两对三重对偶积分方程。

## 2 三重对偶积分方程的求解

这里可以利用 Schmidt<sup>[27]</sup> 方法来求解三重对偶积分方程(19)~(22), 裂纹线上的位移  $w$  和

$\phi$  可以展开成如下级数形式:

$$w(x, 0, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} \left[ \frac{x - \frac{1+b}{2}}{\frac{1-b}{2}} \right] \left[ \frac{\left( x - \frac{1+b}{2} \right)^2}{1 - \left( \frac{1-b}{2} \right)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{对于 } b \leq x \leq 1, y = 0), \quad (23)$$

$$w(x, 0, t) = 0 \quad (\text{对于 } x < b, x > 1, y = 0), \quad (24)$$

$$\phi(x, 0, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} \left[ \frac{x - \frac{1+b}{2}}{\frac{1-b}{2}} \right] \left[ \frac{\left( x - \frac{1+b}{2} \right)^2}{1 - \left( \frac{1-b}{2} \right)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{对于 } b \leq x \leq 1, y = 0), \quad (25)$$

$$\phi(x, 0, t) = 0 \quad (\text{对于 } x < b, x > 1, y = 0), \quad (26)$$

这里  $a_n$  和  $b_n$  是未知系数,  $P_n^{(1/2, 1/2)}(x)$  是雅可比多项式<sup>[28]</sup>. 方程(23)和(25)经富立叶变换后为<sup>[29]</sup>:

$$A(s) = w(s, 0, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n G_n(s) \frac{1}{s} J_{n+1} \left( s \frac{1-b}{2} \right), \quad (27)$$

$$B(s) = \phi(s, 0, t) - \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} w(s, 0, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( b_n - \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} a_n \right) Q_n G_n(s) \frac{1}{s} J_{n+1} \left( s \frac{1-b}{2} \right), \quad (28)$$

$$Q_n = 2\sqrt{\pi} \frac{\Gamma(n+1+1/2)}{n!}, \quad (29)$$

$$G_n(s) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \cos \left[ s \frac{1+b}{2} \right] & (n = 0, 2, 4, 6, \dots), \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}} \sin \left[ s \frac{1+b}{2} \right] & (n = 1, 3, 5, 7, \dots). \end{cases} \quad (30)$$

这里  $\Gamma(x)$  和  $J_n(x)$  分别是伽玛函数和贝赛尔函数.

分别把方程(27)和(28)代入到方程(19)~(22)中, 方程(19)和(21)能够自动满足, 方程(20)和(22)分别经过区间  $[b, x]$  上对  $x$  积分后变为:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n \int_0^{\infty} s^{-1} G_n(s) J_{n+1} \left( s \frac{1-b}{2} \right) \left[ 1 + \frac{g_1(s)}{sg_2(s)} \right] [\sin(sx) - \sin(sb)] ds = \frac{\pi}{2\mu} \tau_0 (1 + \lambda)(x - b). \quad (31)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( b_n - \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} a_n \right) Q_n \int_0^{\infty} s^{-1} G_n(s) J_{n+1} \left( s \frac{1-b}{2} \right) \left\{ 1 + [F_2(s) - 1] \right\} \times [\sin(sx) - \sin(sb)] ds = - \frac{\pi D_0}{2\epsilon_{11}} (x - b). \quad (32)$$

这里  $\lambda = \frac{e_{15} D_0}{\epsilon_{11} \tau_0}$ ,  $g_1(s) = (\gamma_1 - s) - (\gamma_1 + s) \mu_3 \exp[-2\gamma_1 h]$ ,

$g_2(s) = 1 + \mu_3 \exp[-2\gamma_1 h]$ .

对于方程(31)和(32)中的半无限积分分别可以变为<sup>[28]</sup>:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{s} J_{n+1} \left( s \frac{1-b}{2} \right) \left[ 1 + \frac{g_1(s)}{sg_2(s)} \right] \cos \left( s \frac{1+b}{2} \right) \sin(sx) ds =$$

$$\frac{1}{2(n+1)} \left\{ \frac{\left(\frac{1-b}{2}\right)^{n+1} \sin\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right)}{\left\{x + \frac{1+b}{2} + \sqrt{\left(x + \frac{1+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-b}{2}\right)^2}\right\}^{n+1}} \right. \\ \left. \sin\left[\left(n+1\right) \arcsin\left(\frac{1+b-2x}{1-b}\right)\right] \right\} + \\ \int_0^\infty \frac{g_1(s)}{s^2 g_2(s)} J_{n+1}\left(s \frac{1-b}{2}\right) \cos\left(s \frac{1+b}{2}\right) \sin(sx) ds, \quad (33)$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{s} J_{n+1}\left(s \frac{1-b}{2}\right) \left[1 + \frac{g_1(s)}{s g_2(s)}\right] \sin\left(s \frac{1+b}{2}\right) \sin(sx) ds = \\ \frac{1}{2(n+1)} \left\{ \cos\left[\left(n+1\right) \arcsin\left(\frac{1+b-2x}{1-b}\right)\right] - \right. \\ \left. \frac{\left(\frac{1-b}{2}\right)^{n+1} \cos\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right)}{\left\{x + \frac{1+b}{2} + \sqrt{\left(x + \frac{1+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-b}{2}\right)^2}\right\}^{n+1}} \right\} + \\ \int_0^\infty \frac{g_1(s)}{s^2 g_2(s)} J_{n+1}\left(s \frac{1-b}{2}\right) \sin\left(s \frac{1+b}{2}\right) \sin(sx) ds, \quad (34)$$

对于大的变量  $s$ , 方程(33)和(34)中的半无限积分的积分函数除了几个奇异点外几乎与函数  $1/s^2$  同阶。积分的奇异点就是函数  $g_2(s)$  的零点, 当然这些零点都在实轴上。为了克服这一困难, 把积分路径变在实轴以下, 从而在积分路径上没有奇异点。函数  $g(s)$  的零点不仅与材料性质、裂纹长度和电载荷有关, 而且与入射波频率有关。这些奇异点代表的是一些自由波解<sup>[30]</sup>, 同时积分取积分主值。从而可以利用菲龙方法<sup>[31]</sup>对方程(33)和(34)中的半无限积分进行数值求解。进而可以利用 Schmidt 方法求解方程(31)和(32)而获得未知系数  $a_n$  和  $b_n$ 。为了简化, 方程(31)可以重写为(对于方程(32)可以利用同一种方法求解):

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n E_n(x) = U(x) \quad (b < x < 1), \quad (35)$$

这里  $E_n(x)$  和  $U(x)$  是已知函数,  $a_n$  是未知函数。为了求解未知系数  $a_n$ , 重新构造一函数序列  $P_n(x)$ ,  $P_n(x)$  满足如下正交条件:

$$\int_b^1 P_m(x) P_n(x) dx = N_n \delta_{nm}, \quad N_n = \int_b^1 P_n^2(x) dx. \quad (36)$$

而  $P_n(x)$  是由已知函数  $E_n(x)$  通过如下形式构造的:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{M_{in}}{M_{nn}} E_i(x) \quad (37)$$

这里  $M_{ij}$  是矩阵  $D_n$  的元素  $d_{ij}$  的余因子。矩阵  $D_n$  和元素  $d_{ij}$  分别定义为:

$$D_n = \begin{bmatrix} d_{00} & d_{01} & d_{02} & \cdots & d_{0n} \\ d_{10} & d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{20} & d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{n0} & d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}, \quad d_{ij} = \int_b^1 E_i(x) E_j(x) dx. \quad (38)$$

利用方程(35)~(38)可得:

$$a_n = \sum_{j=n}^{\infty} q_j \frac{M_{nj}}{M_{jj}}, \quad q_j = \frac{1}{N_j} \int_0^1 U(x) P_j(x) dx \quad (39)$$

### 3 强度因子

若未知系数  $a_n$  和  $b_n$  获得, 整个扰动应力场和扰动电位移场就可以获得。但对于断裂力学, 重要的是确定裂纹尖端附近的扰动应力场和扰动电位移场。沿裂纹面的应力  $\tau_{yz}$  和电位移  $D_y$  可表示为:

$$\begin{aligned} \tau_{yz}(x, 0, t) = & -\frac{2\mu}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n \int_0^{\infty} G_n(s) \left\{ 1 + \left[ \frac{Y_1}{s} F_1(s) - 1 \right] \right\} \times \\ & J_{n+1} \left( s \frac{1-b}{2} \right) \cos(xs) ds - \frac{2e_{15}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (b_n - \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} a_n) Q_n \int_0^{\infty} G_n(s) \times \\ & \left\{ 1 + [F_2(s) - 1] \right\} J_{n+1} \left( s \frac{1-b}{2} \right) \cos(xs) ds, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} D_y(x, 0, t) = & \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (\epsilon_{11} b_n - e_{15} a_n) Q_n \int_0^{\infty} G_n(s) \left\{ 1 + [F_2(s) - 1] \right\} \times \\ & J_{n+1} \left( s \frac{1-b}{2} \right) \cos(xs) ds, \end{aligned} \quad (41)$$

从方程(40)和(41)的表达式可得, 利用如下关系式<sup>[28]</sup>:

$$\begin{aligned} \cos \left( s \frac{1+b}{2} \right) \cos(sx) &= \frac{1}{2} \left\{ \cos \left[ s \left( \frac{1+b}{2} - x \right) \right] + \cos \left[ s \left( \frac{1+b}{2} + x \right) \right] \right\}, \\ \sin \left( s \frac{1+b}{2} \right) \cos(sx) &= \frac{1}{2} \left\{ \sin \left[ s \left( \frac{1+b}{2} - x \right) \right] + \sin \left[ s \left( \frac{1+b}{2} + x \right) \right] \right\}, \\ \int_0^{\infty} J_n(sa) \cos(bs) ds &= \begin{cases} \frac{\cos[\text{narc sin}(b/a)]}{\sqrt{a^2 - b^2}} & (a > b), \\ -\frac{a^n \sin(n\pi/2)}{\sqrt{b^2 - a^2} [b + \sqrt{b^2 - a^2}]^n} & (b > a). \end{cases} \\ \int_0^{\infty} J_n(sa) \sin(bs) ds &= \begin{cases} \frac{\sin[\text{narc sin}(b/a)]}{\sqrt{a^2 - b^2}} & (a > b), \\ \frac{a^n \cos(n\pi/2)}{\sqrt{b^2 - a^2} [b + \sqrt{b^2 - a^2}]^n} & (b > a). \end{cases} \end{aligned}$$

扰动应力场和扰动电位移场的奇异部分可表示为:

$$\tau = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (c_{44} a_n + e_{15} b_n) Q_n H_n(b, x), \quad (42)$$

$$D = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (\epsilon_{11} b_n - e_{15} a_n) Q_n H_n(b, x), \quad (43)$$

这里  $H_n(b, x) = (-1)^{n+1} f_1(b, x, n)$  ( $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ ; 对于  $0 < x < b$ ),

$$H_n(b, x) = -f_2(b, x, n) \quad (n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots; \text{对于 } 1 < x),$$

$$f_1(b, x, n) =$$

$$\frac{2(1-b)^{n+1}}{\sqrt{(1+b-2x)^2 - (1-b)^2} [1+b-2x + \sqrt{(1+b-2x)^2 - (1-b)^2}]^{n+1}}$$

$$f_2(b, x, n) =$$

$$\frac{2(1-b)^{m-1}}{\sqrt{(2x-1-b)^2 - (1-b)^2} [2x-1-b + \sqrt{(2x-1-b)^2 - (1-b)^2}]^{m-1}}$$

对于右边裂纹的左尖端应力强度因子  $K_L$  可以表示为:

$$K_L = \lim_{x \rightarrow b^-} \sqrt{2\pi(b-x)} \cdot \tau = \sqrt{\frac{2}{\pi(1-b)}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (c_{44} a_n + e_{15} b_n) Q_n, \quad (44)$$

对于右边裂纹的右尖端应力强度因子  $K_R$  可以表示为:

$$K_R = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{2\pi(x-1)} \cdot \tau = \sqrt{\frac{2}{\pi(1-b)}} \sum_{n=0}^{\infty} c_{44} a_n + e_{15} b_n) Q_n, \quad (45)$$

对于右边裂纹的左尖端电位移强度因子  $D_L$  可以表示为:

$$D_L = \lim_{x \rightarrow b^-} \sqrt{2\pi(b-x)} \cdot D = \sqrt{\frac{2}{\pi(1-b)}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (e_{15} a_n - \varepsilon_{11} b_n) Q_n, \quad (46)$$

对于右边裂纹的右尖端电位移强度因子  $D_R$  可以表示为:

$$D_R = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{2\pi(x-1)} \cdot D = \sqrt{\frac{2}{\pi(1-b)}} \sum_{n=0}^{\infty} (e_{15} a_n - \varepsilon_{11} b_n) Q_n, \quad (47)$$

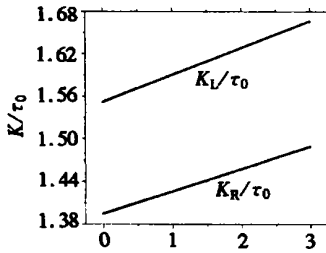


图2 应力强度因子随  $\lambda$  的变化情况

( $b = 0.1, h = 1.0, \omega/c_{SH} = 0.5$ ,  
铝/PZT\_4 铝)

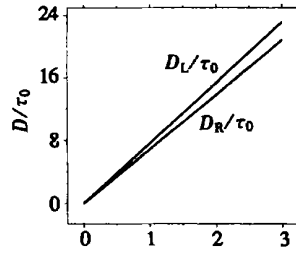


图3 电位移强度因子随  $\lambda$  的变化情况

( $b = 0.1, h = 1.0, \omega/c_{SH} = 0.5$ ,  
铝/PZT\_4 铝)

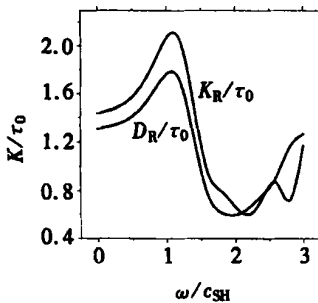


图4 应力强度因子随  $\omega/c_{SH}$  的变化情况

( $b = 0.1, \lambda = 0.2, h = 1.0$ ,  
铝/PZT\_4 铝)

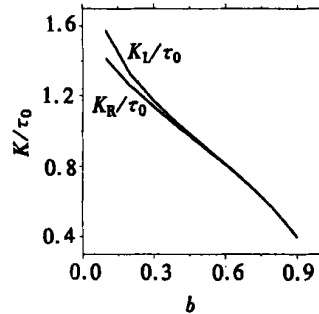
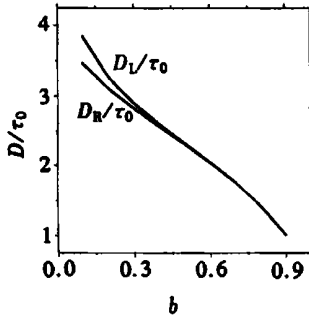


图5 应力强度因子随  $b$  的变化情况

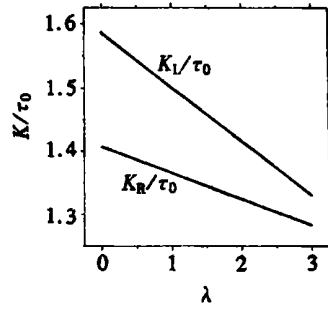
( $\lambda = 0.5, h = 1.0, \omega/c_{SH} = 0.5$ ,  
铝/PZT\_4 铝)

## 4 数值计算和讨论

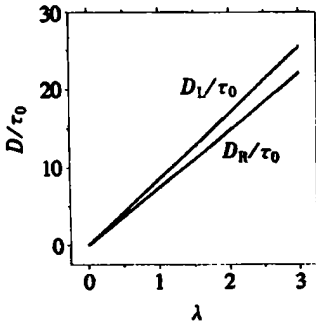
从文献<sup>[32-36]</sup>中的研究方法可知, 可以利用 Schmidt 方法来求解方程(35), 且选取级数的

图 6 电位移强度因子随  $b$  的变化情况

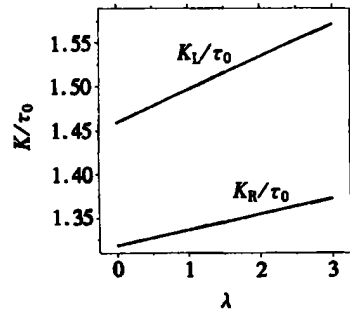
( $\lambda = 0.5, \omega/c_{SH} = 0.5, h = 1.0$ ,  
铝/PZT\_4 铝)

图 7 应力强度因子随  $\lambda$  的变化情况

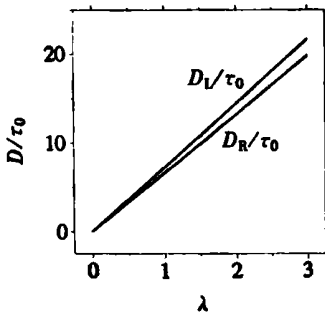
( $b = 0.1, h = 0.5, \omega/c_{SH} = 0.5$ ,  
铝/PZT\_4 铝)

图 8 电位移强度因子随  $\lambda$  的变化情况

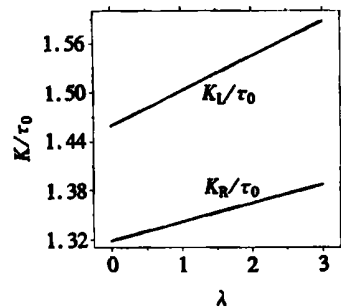
( $b = 0.1, h = 0.5, \omega/c_{SH} = 0.5$ ,  
铝/PZT\_4 铝)

图 9 应力强度因子随  $\lambda$  的变化情况

( $b = 0.1, h = 3.5, \omega/c_{SH} = 0.5$ ,  
铝/PZT\_4 铝)

图 10 电位移强度因子随  $\lambda$  的变化情况

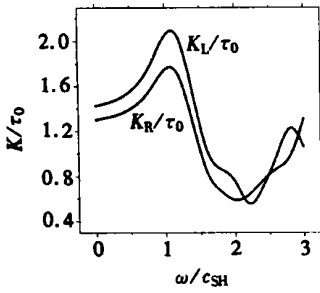
( $b = 0.1, h = 3.5, \omega/c_{SH} = 0.5$ ,  
铝/PZT\_4 铝)

图 11 应力强度因子随  $\lambda$  的变化情况

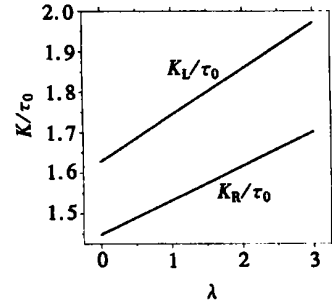
( $b = 0.1, h = 5.0, \omega/c_{SH} = 0.5$ ,  
铝/PZT\_4 铝)

前十项就可以满足有关精度。对于任意长度的共线对称双裂纹的情况可以经过一个简单变换后就可以利用本文所求的形式。压电层为 PZT\_4 或 PZT\_5H, 半空间为铝或环氧。PZT\_4 的材料常数为  $c_{44} = 2.56 \times 10^{10} (\text{N/m}^2)$ ,  $e_{15} = 12.7 (\text{C/m}^2)$ ,  $\epsilon_{11} = 64.6 \times 10^{-10} (\text{C/Vm}^2)$ ,  $\rho = 7500 \text{ kg/m}^3$ 。PZT\_5H 的材料常数分别为  $c_{44} = 2.3 \times 10^{10} (\text{N/m}^2)$ ,  $e_{15} = 17.0 (\text{C/m}^2)$ ,  $\epsilon_{11} = 150.4 \times 10^{-10} (\text{C/Vm}^2)$ ,  $\rho = 7500 \text{ kg/m}^3$ 。铝的材料常数分别为  $c_{44}^E = 2.65 \times 10^{10} (\text{N/m}^2)$ ,  $\rho = 2706 \text{ kg/m}^3$ 。环氧的材料常数分别为  $c_{44}^E = 0.176 \times 10^{10} (\text{N/m}^2)$ ,  $\rho = 1600 \text{ kg/m}^3$ 。有关结果可以用图



图 12 应力强度因子随  $\omega/c_{SH}$  的变化情况(  $b = 0.1, \lambda = 0.2, h = 1.0,$ 

铝/PZT\_4/铝)

图 13 应力强度因子随  $\lambda$  的变化情况(  $b = 0.1, h = 1.0, \omega/c_{SH} = 0.5,$ 

环氧/PZT\_5H/环氧)

2 至图 13 表示出来。从这些图中可以得出以下结论:

(i) 动态应力强度因子不仅与裂纹长度、压电夹层宽度、电载荷和入射波频率有关,而且与材料性质有关。但是电位移强度因子仅与裂纹长度、压电夹层宽度、电载荷和材料性质有关。

(ii) 裂纹之间的影响是随裂纹间距离的增加而减小。

(iii) 动态应力强度因子随压电夹层宽度的增加而减小。

(iv) 对于  $h > 1.0$  的情况, 动态应力强度因子随电载荷的增加而增加。但对于  $h < 1.0$  的情况, 动态应力强度因子随电载荷的增加而变小, 这是由于机电耦合效应引起的。但是对于任何  $h$  值, 电位移强度因子随电载荷的增加而增加。

(v) 动态应力强度因子的幅值随入射波频率的增加而增加, 并达到一个峰值, 随后降低。但当  $\omega/c_{SH} > 2.4$  时, 动态应力强度因子的幅值随入射波频率的增加而又达到一个峰值。这种现象是由自由波引起的。这里, 自由波是由方程(31)~(32)中积分的积分函数奇异性引起的。

(vi) 应力强度因子  $K_L$  对于  $\omega/c_{SH} < 1.5$  时是大于  $K_R$  的。但当  $\omega/c_{SH} > 1.5$  时,  $K_L$  可能小于  $K_R$ 。而电位移强度因子  $D_L$  是大于  $D_R$  的。

### [参 考 文 献]

- [1] Deeg W E F. The analysis of dislocation, crack and inclusion problems in piezoelectric solids[D]. Ph D thesis, Stanford University, 1980.
- [2] Pak Y E. Crack extension force in a piezoelectric material[J]. Journal of Applied Mechanics, 1990, 57(4): 647—653.
- [3] Pak Y E. Linear electroelastic fracture Mechanics of piezoelectric materials[J]. International Journal of Fracture, 1992, 54(1): 79—100.
- [4] Sosa H A, Pak Y E. Three dimensional eigenfunction analysis of a crack in a piezoelectric ceramics [J]. International Journal of Solids and Structures, 1990, 26(1): 1—15.
- [5] Sosa H A. Plane problems in piezoelectric media with defects[J]. International Journal of Solids and Structures, 1991, 28(4): 491—505.
- [6] Sosa H A. On the fracture mechanics of piezoelectric solids[J]. International Journal of Solids and Structures, 1992, 29(8): 2613—2622.
- [7] Suo Z, Kuo C M, Barnett D M, et al. Fracture mechanics for piezoelectric ceramics[J]. Journal of Mechanics and Physics of Solids, 1992, 40(5): 739—765.

- [8] Park S B, Sun C T. Fracture criteria for piezoelectric ceramics[J]. *Journal of American Ceramics Society*, 1995, **78**(7): 1475—1480.
- [9] Zhang T Y, Tong P. Fracture mechanics for a mode III crack in a piezoelectric material[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1996, **33**(5): 343—359.
- [10] Gao H, Zhang T Y, Tong P. Local and global energy rates for an elastically yielded crack in piezoelectric ceramics[J]. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 1997, **45**(4): 491—510.
- [11] WANG Biao. Three dimensional analysis of a flat elliptical crack in a piezoelectric materials[J]. *International Journal of Engineering*, 1992, **30**(6): 781—791.
- [12] Narita K, Shindo Y. Scattering of Love waves by a surface breaking crack in piezoelectric layered media[J]. *JSME International Journal*, Series A, 1998, **41**(1): 40—52.
- [13] Narita K, Shindo Y. Scattering of anti-plane shear waves by a finite crack in piezoelectric laminates[J]. *Acta Mechanica*, 1999, **134**(1): 27—43.
- [14] ZHOU Zhen\_gong, WANG Biao, CAO Mao\_sheng. Analysis of two collinear cracks in a piezoelectric layer bonded to dissimilar half spaces subjected to anti-plane shear[J]. *European Journal of Mechanics A/ Solids*, 2001, **20**(2): 213—226.
- [15] YU Shou\_wen, CHEN Zeng\_tiao. Transient response of a cracked infinite piezoelectric strip under anti-plane impact[J]. *Fatigue and Engineering Materials and Structures*, 1998, **21**(4): 1381—1388.
- [16] CHEN Zeng\_tiao, Karihaloo B L. Dynamic response of a cracked piezoelectric ceramic under arbitrary electro\_mechanical impact[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1999, **36**(5): 5125—5133.
- [17] Paul H S, Nelson V K. Axisymmetric vibration of piezo\_composite hollow circular cylinder[J]. *Acta Mechanica*, 1996, **116**(5): 213—222.
- [18] Khutoryansky N M, Sosa H. Dynamic representation formulas and fundamental solutions for piezoelectricity[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1995, **32**(8): 3307—3325.
- [19] Shindo Y, Katsura H, Yan W. Dynamic stress intensity factor of a cracked dielectric medium in a uniform electric field[J]. *Acta Mechanica*, 1996, **117**(1): 1—10.
- [20] Narita K, Shindo Y, Watanabe K. Anti-plane shear crack in a piezoelectric layered to dissimilar half spaces[J]. *JSME International Journal*, Series A, 1999, **42**(1): 66—72.
- [21] Tauchert T R. Cylindrical bending of hybrid laminates under thermo\_electro\_mechanical loading[J]. *Journal of Thermal Stresses*, 1996, **19**(4): 287—296.
- [22] Lee J S, Jiang L Z. Exact electro\_elastic analysis of piezoelectric laminate via state space approach[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1996, **33**(4): 977—985.
- [23] Tang Y Y, Noor A K, Xu K. Assessment of computational models for thermoelectroelastic multilayered plates[J]. *Computers and Structures*, 1996, **61**(6): 915—924.
- [24] Batra R C, Liang X Q. The vibration of a rectangular laminated elastic plate with embedded piezoelectric sensors and actuators[J]. *Computer and Structures*, 1997, **63**(4): 203—212.
- [25] Heyliger P. Exact solutions for simply supported laminated piezoelectric plates[J]. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1997, **64**(4): 299—313.
- [26] Shindo Y, Domon W, Narita F. Dynamic bending of a symmetric piezoelectric laminated plate with a through crack[J]. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 1998, **28**(2): 175—184.
- [27] Morse P M, Feshbach H. *Methods of Theoretical Physics*[M]. Vol 1. New York McGraw\_Hill, 1958, 828—929.
- [28] Gradshteyn I S, Ryzhik I M. *Table of Integral, Series and Products*[M]. New York Academic Press, 1980, 980—997.

- [29] Erdelyi A. Tables of Integral Transforms [M]. Vol 1. New York: McGraw\_Hill, 1954, 38—95.
- [30] Keer L M, Luong W C. Diffraction of waves and stress intensity factors in a cracked layered composite [J]. Journal of the Acoustical Society of America, 1974, **56**(5): 1681—1686.
- [31] Amemiya A, Taguchi T. Numerical Analysis and Fortran [M]. Tokyo: Maruzen, 1969.
- [32] Itou S. Three dimensional waves propagation in a cracked elastic solid [J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 1978, **45**(2): 807—811.
- [33] Itou S. Three dimensional problem of a running crack [J]. International Journal of Engineering Science, 1979, **17**(7): 59—71.
- [34] ZHOU Zheng\_gong, HAN Jie\_cai, DU Shan\_yi. Two collinear Griffith cracks subjected to uniform tension in infinitely long strip [J]. International Journal of Solids and Structures, 1999, **36**(4): 5597—5609.
- [35] ZHOU Zhen\_gong, HAN Jie\_cai, DU Shan\_yi. Investigation of a Griffith crack subject to anti\_plane shear by using the non\_local theory [J]. International Journal of Solids and Structures, 1999, **36**(3): 3891—3901.
- [36] 周振功, 王彪. 采用新方法研究非局部理论中 I 型裂纹的断裂问题 [J]. 应用数学和力学, 1999, **20**(10): 1025—1032.

## Investigation of the Dynamic Behavior of Two Collinear Anti Plane Shear Cracks in a Piezoelectric Layer Bonded to Two Half Spaces by a New Method

ZHOU Zhen\_gong, WANG Biao

(Center for Composite Materials and Electro\_Optics Research Center,  
Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

**Abstract:** The dynamic behavior of two collinear anti\_plane shear cracks in a piezoelectric layer bonded to two half spaces subjected to the harmonic waves is investigated by a new method. The cracks are parallel to the interfaces in the midplane of the piezoelectric layer. By using the Fourier transform, the problem can be solved with two pairs of triple integral equations. These equations are solved by using Schmidt's method. This process is quite different from that adopted previously. Numerical examples are provided to show the effect of the geometry of cracks, the frequency of the incident wave, the thickness of the piezoelectric layer and the constants of the material upon the dynamic stress intensity factor of cracks.

**Key words:** Schmidt method; triple integral equations; piezoelectric materials; dynamic stress intensity factor, cracks