应用数学和力学,第 24 卷 第 1 期(2003 年 1 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2003) 01_0025_04

圆薄膜在集中力作用下的大变形*

陈山林, 郑周练

(重庆大学(B 区) 土木工程系,重庆 400045)

(我刊编委陈山林来稿)

摘要: 利用圆薄膜在中心集中力作用下大变形的基本方程、边界条件和 Hencky 变换, 求解了非线性边值问题,推广了 Hencky 变换, 得到了集中力作用下圆薄膜大变形问题的精确解•

关 键 词: 圆薄膜; 集中力; 大变形; 精确解
中图分类号: O344.3 文献标识码: A

1 轴对称圆薄膜的大变形问题

轴对称圆薄膜的大变形问题,是一个具有实际意义的问题• Hencky(1915)[1] 得到了均布力情形的幂级数解; Алексеев(1951)[2] 得到了集中力作用下圆环膜的解析解,解答当 $\nu = 1/3$ 时是精确的• 钱伟长等(1981)[3] 得到了圆膜中心部分受均布力情形的解析解• 其它作者[4]~[6] 的结果都是近似的解• 本文推广了 Hencky 变换,得到了集中力作用下圆膜大变形问题的精确解,解答是简单的• 本文情形只是文[2]和[3]的一种特殊情况,但由文[2]和[3]的复杂的解析结果难于直接导出本文解答,因此本文结果是有益的•

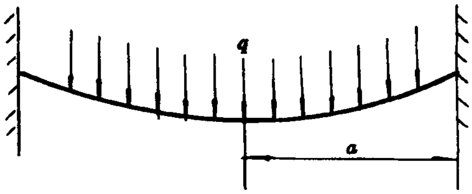

图 1 Hencky 问题

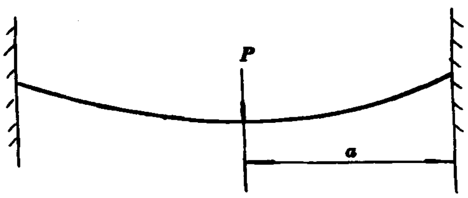

图 2 圆薄膜受集中力作用问题

2 基本方程和 Hencky 变换的推广

引入无量纲参数

$$x = \frac{r^2}{R^2}, \quad y = \frac{[3(1-\nu^2)]^{1/2} w}{h},$$

$$v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

---

* 收稿日期: 2001_08_28; 修订日期: 2002_09_18
作者简介: 陈山林(1942—),男,四川内江人,教授,博导•

$$S = \frac{-6(1-\nu^2)R^2N_r}{Eh^3},$$

$$p = \frac{[3(1-\nu^2)]^{3/2}R^2P}{2\pi Eh^4},$$

式中: r 为径向半径; R 为圆膜半径; h 为厚度; w 为挠度; Nr 为径向薄膜力; E 为弹性模量; ν 为泊松系数; P 为集中力.

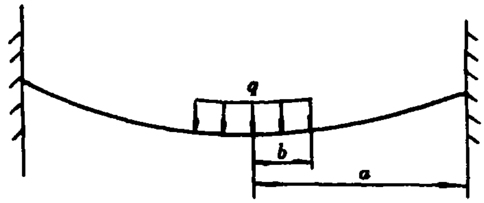

图 3　圆薄膜中心部分受均布载荷的问题

则圆薄膜在中心集中力作用下大变形问题的基本方程为[3]

$$p = xsv, \qquad (xs)'' = v^2. \tag{1}$$

式中 $(\ )' = \mathrm{d}/\mathrm{d}x$. 消去 v, 并令 $z = xs$, 得

$$z'' = p^2z^{-2} \tag{2}$$

相应有边界条件

$$x = 1,\ 2z' - (1+\nu)z = 0. \tag{3}$$

在膜中心处, 由于集中力存在, N_r 具有奇异性, 因此有 $x = 0$ 点条件

$$\lim_{x\to 0} z(x) = O(x^\alpha),\ 且\ \alpha < 1. \tag{4}$$

我们的问题是在条件(4)下求解非线性边值问题(2)、(3).

设方程(2)的另一特解为 $z_1(x)$, 则变换

$$z(x) = a^kz_1(x_1),\ x_1 = ax + b. \tag{5}$$

若代入(2)式中, 有

$$a^{4+3k}\frac{\mathrm{d}^2z_1}{\mathrm{d}x_1^2} = \frac{a^2p^2}{z_1^2}. \tag{6}$$

如果令 $a \equiv 1$, 则(6)式恒成立. 此时变换(5)式得出(2)式的通解, b 为积分常数. $b = 0$ 情形的变换即 Hencky 变换[1], 因此(5)式可看做 Hencky 变换在集中力情形的推广.

3　解　答

取方程(2)的任一特解为

$$z(x) = p^{2/3}x^\mu\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

代入(2)式得

$$x^{3\mu-2}\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\sum_{i+j+l=n}a_ia_ja_l(l+\mu)(l+\mu-1)\Big]x^n = 1.$$

由上式, 可知应有

$$3\mu - 2 = 0,\ 即\ \mu = \frac{2}{3} \tag{9}$$

以及

$$-\frac{2}{9}a_0^3 = 1,\ 即\ a_0 = -\left(\frac{9}{2}\right)^{1/3},$$

$$a_n = 0 \qquad (n = 1, 2, \cdots). \tag{10}$$

于是有特解

$$z(x) = -\left(\frac{9}{2}p^2\right)^{1/3} x^{2/3}. \tag{11}$$

利用变换(5)式,并取 $a \equiv 1$,可得(2)的一般解

$$z(x) = -\left(\frac{9}{2}p^2\right)^{1/3} (x + b)^{2/3}. \tag{12}$$

积分常数 b 应由边界条件(3)式决定,将(12)式代入(3)式,可得

$$b = \frac{1-3\nu}{3(1+\nu)}, \tag{13}$$

最后,得

$$z(x) = -\left(\frac{9}{2}p^2\right)^{1/3} \left[x + \frac{1-3\nu}{3(1+\nu)}\right]^{2/3}. \tag{14}$$

解答是简单的. 可以验证,条件(4)是满足的,此时 $\alpha = 0 < 1(\nu \neq 1/3)$ 及 $\alpha = 2/3 < 1(\nu = 1/3)$.

现在考虑弹性特征,回到方程(1),将(14)式代入,得

$$v = -\left(\frac{2}{9}p\right)^{1/3} \left[x + \frac{1-3\nu}{3(1+\nu)}\right]^{-2/3}. \tag{15}$$

无量纲中心挠度

$$y_0 = \int_1^0 v\,\mathrm{d}x = \left[1 - \left(\frac{1-3\nu}{4}\right)^{1/3}\right]\left(\frac{8p}{1+\nu}\right)^{1/3}.$$

回到有量纲情形,即是

$$\left(\frac{w_0}{h}\right)^3 = \left[1 - \left(\frac{1-3\nu}{4}\right)^{1/3}\right]^3 \frac{4R^2}{(1+\nu)\pi E h^4}P. \tag{17}$$

当 $\nu = 1/3$ 时,

$$\left(\frac{w_0}{h}\right)^3 = \frac{3R^2}{\pi E h^4}P. \tag{18}$$

与文献[2]结果一致.

[参 考 文 献]

[1] Hencky H. Uber den spannungszustand in Kreisunden platten mit verschwindender Biegungssteifigkeit [J]. Zeit F Math U Phyzik, 1915, (63): 311–317.

[2] Алексеев С А. Кольцеобразная упругая мембрана под действием поперечной силы, приложенной к жесткому центрально расположенному диску[A]. Инженерный Сборник[C], **10**, 1951, 71—80.

[3] 钱伟长, 王志忠, 徐尹格, 等. 圆薄膜中心部分受均布载荷产生的对称变形[J]. 应用数学和力学, 1981, **2**(6): 599—612.

[4] Sherbourne A N, lennox, WC. Elastic large deflections of annular membranes[J]. J Engng Mech Divis, Proc ASCE, 1966, **92**(EM2): 75—99.

[5] Kao R, Perrone N. Large deflections of axisymmetric circular membranes[J]. Internat J Solids Structures, 1971, (7) **12**: 1601—1612.

[6] Dadeppo A, Schmidt R. New analysis of an unprestretched annular membrane with restrained edges

[J]. J Indus Math Soc, 1972, **24**(1): 49—58.

Large Deformation of Circular Membrane Under the Concentrated Force

CHEN Shan_lin, ZHENG Zhou_lian
(Faculty of Civil Engineering, Chongqing University,
Chongqing 400045, China)

Abstract: Making use of basic equation of large deformation of circular membrane under the concetrated force and its boundary conditions and Hencky transformation, the problems of nonlinear boundary condition were solved. The Hencky transformation was extended and a precise solution of large deformation of circular membrane under the concentrated force has been obtained.

Key words: circular membrane; concentrated force; large deformation; precise solution