

文章编号: 1000-0887(2003) 01-0055-07

# 谐和与随机噪声联合作用下的粘弹系统<sup>\*</sup>

徐 伟<sup>1</sup>, 戎海武<sup>2</sup>, 方 同<sup>3</sup>

(1. 西北工业大学 应用数学系, 西安 710072; 2. 佛山大学 应用数学系, 广东, 佛山 528000;  
3. 西北工业大学 振动工程研究所, 西安 710072)

(刘曾荣推荐)

摘要: 研究了粘弹系统在谐和与随机噪声联合作用下的响应和稳定性问题。用谐波平衡法和随机平均法分析了系统在确定性谐和激励和随机激励联合作用下的响应, 讨论了粘弹项、随机扰动项对系统响应的影响。结果表明, 在一定条件下, 系统具有两个均方响应值和跳跃现象。数值模拟表明, 谐波平衡法与随机平均法相结合的研究方法是有效的。

关键词: 粘弹系统; 谐波平衡法; 随机平均法  
中图分类号: O324; TB114 文献标识码: A

## 引 言

粘弹模型是一个很重要的物理模型, 很多实际问题都可以用这个模型进行描述。当系统受到外激和参激宽带噪声联合作用时, Ariaratnam<sup>[1]</sup>用传统的随机平均法研究了线性粘弹系统的随机稳定性, 由于传统随机平均法的采用, 这一方法仅仅反映了粘弹性对阻尼的效应, 对刚度的效应被忽略。针对这一弱点, Ariaratnam<sup>[2]</sup>进一步研究了线性粘弹性系统在有界随机参激下的稳定性, 但模型仍是线性的。目前, 非线性随机系统的大部分成果都属于对宽带激励的讨论。然而, 实际中很多情形下激励是窄带随机过程。而且与宽带随机激励相比, 在窄带随机激励下系统的非线性效应更为突出, 尤其在共振区及其邻域。研究起来也难些, 目前尚无有效的解析方法。因此, 研究系统对窄带随机激励的响应具有重要的理论与实际意义。窄带随机噪声的模型有多种, 本文方程(1)的右端项是一种窄带噪声的模型, 将窄带噪声看作是确定性谐和激励与宽带随机噪声的和。

由于非线性随机系统的复杂性, 精确求解很困难甚至是不可能的。事实上, 即使对于确定性的单自由度非线性系统, 大部分也不可能求出精确的解析解。只能通过各种近似方法如小参数法、坐标变形法、多尺度法、慢变参数法、KBM 法、等效线性化法、谐波平衡法、里茨-伽辽金法等等。对于非线性随机系统, 各种近似方法得到了广泛的应用, 如等效线性化法和随机平均法等。随机系统的等效线性化法可看作是确定性系统的等效线性化法在随机系统中的推广, 故确定性系统的其他近似方法如多尺度法和谐波平衡法可推广到随机系统的分析中去。

本文研究具有线性粘弹项的非线性随机模型, 讨论窄带噪声激励下的响应问题, 将谐波平

\* 收稿日期: 2000\_10\_10; 修订日期: 2002\_09\_28

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10072049)

作者简介: 徐伟(1957—), 男, 浙江上虞人, 教授, 博士, 博士生导师(E-mail: weixu@nwpu.edu.cn)。

衡法,引入到非线性随机系统的响应分析中,并结合随机平均法研究了非线性系统在窄带激励作用下系统的响应。本文的结果表明,谐波平衡法可有效地用于非线性随机系统的分析,在一定的条件下,非线性系统在窄带随机激励下可有多个均方位移响应。数值模拟表明,本文提出的谐波平衡法与随机平均法相结合的研究方法是有效的。

## 1 基本结论

考虑同时受谐和与随机噪声激励的粘弹系统

$$\ddot{u} + \mathcal{E}^2 \int_0^t f(t-\tau) u(\tau) d\tau + \omega_0^2 u + \mathcal{E}^2 u^3 = h \cos \Omega t + \xi(t), \quad (1)$$

式中  $u$  上方的圆点表示对时间  $t$  的导数,  $\int_0^t f(t-\tau) u(\tau) d\tau$ ,  $\omega_0$  分别为系统的粘弹项和自然频率,一般粘弹项的被积函数  $f(t)$  常可模型化为:

$$f(t) = \sum_i \beta_i \exp(-\alpha_i t),$$

$\alpha_i \geq 0$ ,  $\beta_i \geq 0$  代表粘弹系数,  $h, \Omega > 0$  是常数分别表示确定性谐和激励的振幅和频率,  $\xi(t)$  是零均值宽带随机过程,谱密度为  $S(\omega)$ 。模型(1)可看作粘弹系统在窄带随机过程激励下的模型,  $h \cos \Omega + \xi(t)$  可看作是窄带随机过程。先讨论确定性谐和激励对系统响应的影响。此时方程(1)变为

$$\ddot{u} + \mathcal{E}^2 \int_0^t f(t-\tau) u(\tau) d\tau + \omega_0^2 u + \mathcal{E}^2 u^3 = h \cos \Omega t. \quad (2)$$

我们用谐波平衡法,求解系统(2)的周期解。为此,设方程(2)的零阶近似解为

$$u_0 = a_0 \cos(\Omega t + \gamma), \quad (3)$$

将(3)式代入(2)式并利用公式

$$\cos^3(\Omega t + \gamma) = \frac{3}{4} \cos(\Omega t + \gamma) + \frac{1}{4} \cos[3(\Omega t + \gamma)],$$

可得

$$\begin{aligned} & \left[ -a_0 \Omega^2 + a_0 \omega_0^2 + \frac{3}{4} \mathcal{E}^2 a_0^3 \right] \cos(\Omega t + \gamma) + \frac{1}{4} \mathcal{E}^2 a_0^3 \cos[3(\Omega t + \gamma)] - \\ & a_0 \Omega \mathcal{E}^2 \left[ \sum_i \beta_i \frac{1}{\alpha_i^2 + \Omega^2} [-\Omega \cos(\Omega t + \gamma) + \alpha_i \sin(\Omega t + \gamma)] \right] - \\ & a_0 \Omega \mathcal{E}^2 \left[ \sum_i \beta_i \frac{1}{\alpha_i^2 + \Omega^2} [\exp(-\alpha_i t) (\Omega \cos \gamma - \alpha_i \sin \gamma)] \right] = \\ & h \cos \Omega t. \end{aligned} \quad (4)$$

略去高次谐波  $\cos[3(\Omega t + \gamma)]$  项,令上式等式两边同次谐波系数相等,得

$$\begin{cases} \left[ -a_0 \Omega^2 + a_0 \mathcal{E}^2 \sum_i \frac{\Omega^2 \beta_i}{\alpha_i^2 + \Omega^2} + a_0 \omega_0^2 + \frac{3}{4} \mathcal{E}^2 a_0^3 \right] \cos \gamma - a_0 \Omega \mathcal{E}^2 \sum_i \frac{\alpha_i \beta_i}{\alpha_i^2 + \Omega^2} \sin \gamma = h, \\ \left[ -a_0 \Omega^2 + a_0 \mathcal{E}^2 \sum_i \frac{\Omega^2 \beta_i}{\alpha_i^2 + \Omega^2} + a_0 \omega_0^2 + \frac{3}{4} \mathcal{E}^2 a_0^3 \right] \sin \gamma + a_0 \Omega \mathcal{E}^2 \sum_i \frac{\alpha_i \beta_i}{\alpha_i^2 + \Omega^2} \cos \gamma = 0. \end{cases}$$

把方程中两式平方相加,便可得系统(2)的频率响应方程

$$\left[ -a_0 \Omega^2 + a_0 \omega_0^2 + \frac{3}{4} \mathcal{E}^2 a_0^3 + \mathcal{E}^2 a_0 \delta \right]^2 + a_0^2 \Omega^2 \mathcal{E}^4 \beta^2 = h^2, \quad (5)$$

式中

$$\delta = \sum_i \frac{\Omega^2 \beta_i}{\alpha_i^2 + \Omega^2}, \beta = \sum_i \frac{\alpha_i \beta_i}{\alpha_i^2 + \Omega^2}.$$

从上式可见若  $\beta \neq 0$ , 而  $h = 0$ , 则振幅  $a_0 = 0$ . 由弗洛凯理论知, 由(3) 式定义的周期解稳定的充分必要条件是

$$\left[ \omega_0^2 - \Omega^2 + \delta \varepsilon^2 + \frac{3}{4} \varepsilon^2 a_0^2 \right] \left[ \omega_0^2 - \Omega^2 + \delta \varepsilon^2 + \frac{9}{4} \varepsilon^2 a_0^2 \right] + \varepsilon^4 \beta^2 \Omega^2 < 0. \quad (6)$$

(6) 式表明, 并不是所有由(5) 式定义的周期响应都是稳定的. 可以证明, 如果由(5) 式能解出三个解, 则大解和小解都是稳定的, 而中间的那个解是不稳定的. 这说明对于非线性系统来说, 其受迫振动稳态解的振幅和频率与初始条件有关, 其振幅可具有多值性, 即在一定条件下同一干扰力频率对应着几个稳态周期运动, 物理上实现哪一个周期运动取决于初始条件. 下面我们研究随机扰动项  $\xi(t)$  对系统响应的影响. 为此令

$$u = u_0 + Y = a_0 \cos(\Omega t + \gamma) + Y, \quad (7)$$

式中  $Y$  是摄动项. 将(7) 式代入(1) 式, 并忽略非线性项, 可得如下线性化方程

$$\dot{Y} + \varepsilon^2 \left[ \int_0^t f(t-\tau) \mathcal{Y}(\tau) d\tau + 3a_0^2 \cos^2(\Omega t + \gamma) Y \right] + \omega_0^2 Y = \varepsilon \xi(t). \quad (8)$$

用随机平均法求解系统(8) 的稳态响应. 引入变换

$$Y(t) = A(t) \cos \Phi, \quad \mathcal{Y}(t) = -A(t) \omega_0 \sin \Phi, \quad \Phi = \omega_0 t + \Theta. \quad (9)$$

可将(8) 式化为标准形式微分方程

$$\begin{cases} \dot{A} = \frac{\varepsilon^2}{\omega_0} \left[ -\omega_0 \int_0^t f(t-\tau) A(\tau) \sin \Phi(\tau) d\tau + 3a_0^2 \cos^2(\Omega t + \gamma) A \cos \Phi \right] \sin \Phi - \\ \quad \frac{\varepsilon}{\omega_0} \sin \Phi \xi(t), \\ \dot{\Theta} = \frac{\varepsilon^2}{A \omega_0} \left[ -\omega_0 \int_0^t f(t-\tau) A(\tau) \sin \Phi(\tau) d\tau + 3a_0^2 \cos^2(\Omega t + \gamma) A \cos \Phi \right] \cos \Phi - \\ \quad \frac{\varepsilon}{A \omega_0} \cos \Phi \xi(t). \end{cases} \quad (10)$$

对(10) 用随机平均法可得相应的 Ito 随机微分方程为

$$\begin{cases} dA = \varepsilon^2 \left[ -\frac{\beta A}{2} + \frac{\pi S(\omega_0)}{2A \omega_0^2} \right] dt + \frac{\sqrt{\pi S(\omega_0)}}{\omega_0} \varepsilon dW_1(t), \\ d\Theta = \varepsilon^2 \left[ \frac{1}{2} \sum_i \frac{\omega_0 \beta_i}{\alpha_i^2 + \omega_0^2} + \frac{\pi S(\omega_0)}{2A^2 \omega_0^2} + \frac{3a_0^2}{4\omega_0} \right] dt + \frac{\sqrt{\pi S(\omega_0)}}{A \omega_0} \varepsilon dW_2(t). \end{cases} \quad (11)$$

其中  $W_1(t), W_2(t)$  是独立的标准 Wiener 过程.

由于(11) 第一式不依赖于  $\Theta$  知,  $A(t)$  本身是一个时齐扩散过程, 其稳态概率密度  $p(a)$  由下面 FPK 方程支配

$$\frac{d}{da} \left[ \left[ \frac{\beta a}{2} - \frac{\pi S(\omega_0)}{2a \omega_0^2} \right] \varepsilon^2 p \right] + \frac{\pi S(\omega_0)}{2 \omega_0^2} \varepsilon^2 \frac{d^2 p}{da^2} = 0. \quad (12)$$

由(12) 式可解得

$$p(a) = \frac{a}{\sigma^2} \exp \left[ -\frac{a^2}{2\sigma^2} \right], \quad (13)$$

式中

$$\sigma^2 = \frac{\pi S(\omega_0)}{\omega_0^2} \left[ \sum_i \frac{\alpha_i \beta_i}{\alpha_i^2 + \omega_0^2} \right]^{-1}.$$

由上式可得  $A(t)$  的一、二阶矩为

$$EA(t) = \int_0^\infty ap(a) da = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma, \quad EA^2(t) = \int_0^\infty a^2 p(a) da = 2\sigma^2, \quad (14)$$

由(7)、(9)和(14)式可得

$$Eu^2 = E[a_0 \cos(\Omega + \gamma) + A(t) \cos \Phi]^2 = \frac{a_0^2}{2} + \frac{\pi S(\omega_0)}{\omega_0^2} \left[ \sum_i \frac{\alpha_i \beta_i}{\alpha_i^2 + \omega_0^2} \right]^{-1}. \quad (15)$$

在一定的参数范围,由(5)式定义的周期解的幅值  $a_0$  有三个解,其中大解和小解都是稳定的,而中间的那个解是不稳定的。当  $S(\omega_0)$  充分小时,随机扰动项  $\xi(t)$  并不影响由(5)式定义的周期解的稳定性。当  $a_0$  有三个解时,由(15)式可知此时系统有三个均方响应值,其中大的和小的都是稳定的,而中间的那个是不稳定的。

## 2 数值模拟

有关随机过程数值模拟的方法可见文献[3,4],本文数值模拟中设  $\xi(t)$  的谱密度为

$$S(\omega) = \begin{cases} S_0, & (0 < \omega \leq 2\omega_0), \\ 0, & (\omega > 2\omega_0), \end{cases} \quad (16)$$

则  $\xi(t)$  可取为如下形式

$$\xi(t) = \sqrt{\frac{4\omega_0 S_0}{N}} \sum_{k=1}^N \cos \left[ \frac{\omega_0}{N} (2k-1)t + \varphi_k \right], \quad (17)$$

式中  $\varphi_k$  是  $(0, 2\pi]$  上均匀分布的独立同分布随机变量序列,  $N$  是一个较大的整数。应用中心极限定理容易证明,当  $N \rightarrow \infty$  时,由(17)定义的随机过程  $\xi(t)$  接近于高斯平稳过程,且是遍历的。它的相关函数与谱密度函数分别逼近于由(16)式定义的目标函数与谱密度。

在本文的数值模拟中,取参数如下

$$\alpha_1 = 0.5, \quad \beta_1 = 8.0, \quad \omega_0 = h = 1, \quad \varepsilon^2 = 0.1, \quad N = 1000.$$

用四阶龙格库特法可计算出系统(1)的响应。当  $\xi(t) = 0$ , 即系统只受确定性谐和激励时,对应于不同的激励频率  $\Omega$ , 由(5)式给出的系统响应的振幅  $a_0$  的理论值与数值计算值的比较见图1。由图1可见,理论解和数值解吻合得很好,这说明用谐波平衡法求解方程(2)是非常有效的。

下面研究随机扰动  $\xi(t)$  对系统响应的影响。当  $S(\omega_0) = 0.25$  时  $\xi(t)$  一个样本的时间历程见图2。

取  $\Omega = 1.7$ , 此时系统(2)将有两个稳定的稳态解。当  $S(\omega_0) = 0.0025$ , 对应于不同的初值系统(1)响应的时间历程图和相轨图分别见图3和图4。图3中的初值是  $u(0) = 1.0, u'(0) = 1.0$ , 图4中的初值是  $u(0) = -5.0, u'(0) = 5.0$ 。

由图3、4可见,当随机扰动  $\xi(t)$  较小时,对应于不同的初值,系统(1)可有两个不同的稳态响应,与前述理论分析的结果一致。由于随机扰动  $\xi(t)$  的存在,系统响应从一周期解变为一近似周期解,系统的相轨也从一极限环变为一扩散的极限环。计算表明,随着  $\xi(t)$  的增大,此扩散的极限环的宽度将增大,且小的稳态解将变得不稳定。当  $\xi(t)$  较大时,系统只有一个稳

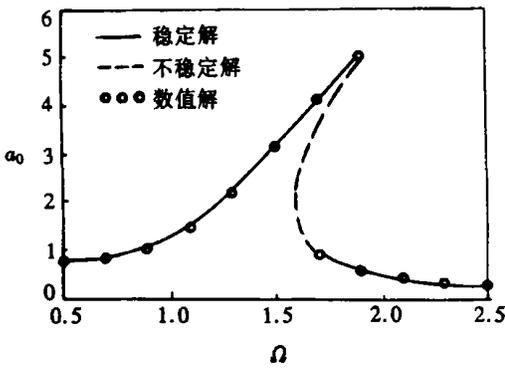


图1 系统(1)频率响应曲线

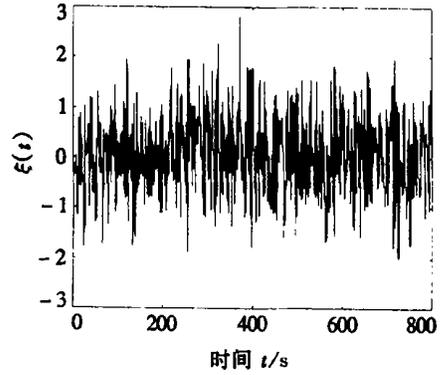
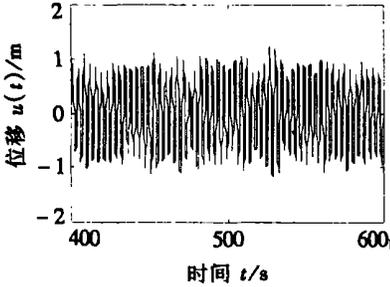
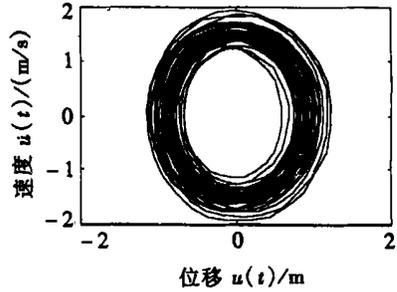


图2  $\xi(t)$  的时间历程图

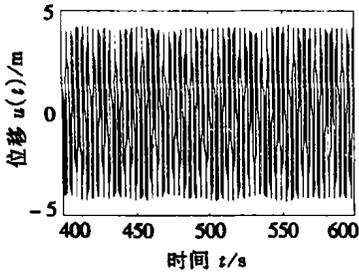


(a)  $u(t)$  的时间历程图

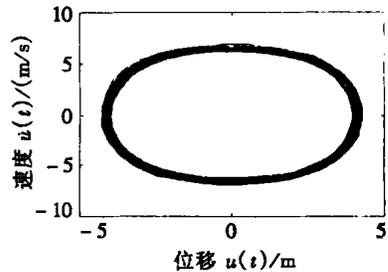


(b) 相轨图

图3 系统(1)的数值结果  $u(0) = 1.0, \dot{u}(0) = 1.0$



(a)  $u(t)$  的时间历程图



(b) 相轨图

图4 系统(1)的数值结果  $u(0) = -5.0, \dot{u}(0) = 5.0$

定的稳态解,即大的那个稳态解是稳定的,而小的那个变得不稳定。

当  $S(\omega_0) = 0.0025$ , 对应于不同的激励频率  $\Omega$ , 由(15)式给出的系统均方响应的理论值与数值计算值的比较见图5。

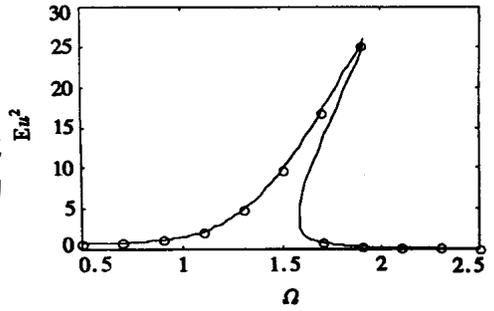
计算表明, 当随机扰动  $\xi(t)$  较小时, 类似于确定性系统中的跳跃和滞后现象仍存在。当干扰力频率逐渐增加或减小时, 振幅开始沿响应曲线逐渐变化, 当到达临界点时振幅突然减小或增大。然后又沿响应曲线变化, 并且在频率减小或增加的变化中, 跳跃总是滞后前一次跳跃点, 形成一个滞后环。本文的数值模拟系统中, 对应的系统临界频率为  $\Omega_1 = 1.58, \Omega_2 = 1.92$ 。即当  $\Omega < \Omega_1$  或  $\Omega > \Omega_2$  时, 系统只有一个均方响应; 当  $\Omega_1 < \Omega < \Omega_2$  时, 对应于不同的初值系统有两个均方响应。跳跃将发生在  $\Omega = \Omega_1, \Omega_2$  处。

最后, 考虑粘弹系统变化对系统响应的影响, 取参数如下

$$\omega_0 = h = 1, \Omega = 1.4, \varepsilon^2 = 0.1,$$

$$N = 1000, S(\omega_b) = 0.0025$$

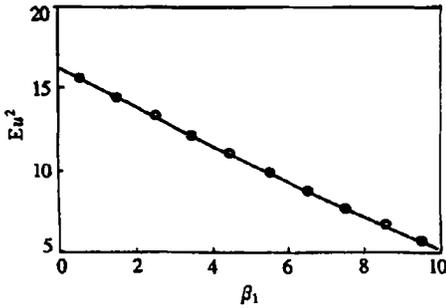
图6给出了当  $\alpha_1 = 0.2$  固定,  $\beta_1$  变化时, 由(15)式给出的系统均方响应的理论值与数值计算值的比较. 图7给出了当  $\beta_1 = 0.1$  固定,  $\alpha_1$  变化时, 系统均方响应的理论值与数值计算值的比较. 结果表明, 理论值与数值计算值是一致的, 说明本文所提方法, 可有效地用于窄带随机激励下的粘弹模型分析.



—稳定解; ---不稳定解; °°° 数值解  
图5 系统(1)频率响应曲线

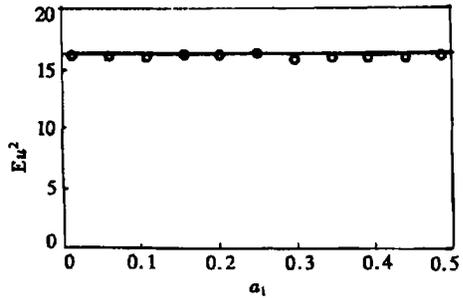
### 3 结论与讨论

理论分析与数值模拟表明, 当随机扰动  $\xi(t)$  较



—理论解; °°° 数值解

图6 系统(1)频率响应曲线



—理论解; °°° 数值解

图7 系统(1)频率响应曲线

小时, 对应于不同的初值系统(1)可有两个不同的稳态响应; 计算表明, 随着  $\xi(t)$  的增大, 此极限环的宽度将增大且小的稳态解将变得不稳定. 当  $\xi(t)$  较大时, 系统只有一个稳定的稳态解, 即大的那个稳态解是稳定的, 而小的那个变得不稳定. 类似于确定性系统中的跳跃和滞后现象仍存在. 这些结论是符合物理直觉的, 因为当  $\xi(t)$  较小时, 系统(1)中起主要作用的是确定性谐和激励项  $h \cos \Omega t$ , 故在一定条件下确定性系统的一些现象如多解现象和跳跃现象是可以存在的. Nayfeh 和 Serhan<sup>[5]</sup> 在研究 Duffing-Rayleigh 振子在确定性谐和激励和随机激励联合作用时也得到了类似的结论.

### [ 参 考 文 献 ]

[1] Ariaratnam S T. Stochastic stability of linear viscoelastic systems[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 1993, 8(1): 153—155.

[2] Ariaratnam S T. Stochastic stability of viscoelastic systems under bounded noise excitation[J]. IUTAM Symposium on Advances in Nonlinear Stochastic Mechanics, 1996, 11(1): 11—18.

[3] Shinozuka M. Simulation of multivariate and multidimensional random processes[J]. Journal of Sound and Vibration, 1971, 19(2): 357—367.

[4] Shinozuka M. Digital simulation of random processes and its applications[J]. Journal of Sound and Vibration, 1972, 25(1): 111—128.

[5] Nayfeh A H, Serhan S J. Response statistics of nonlinear system to combined deterministic and random excitations[J]. International Journal of Nonlinear Mechanics, 1990, 25(5): 493—509.

- [6] Rajan S, Davies H G. Multiple time scaling of the response of a Duffing oscillator to narrow-band excitations[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1988, **123**(2): 497—506.
- [7] Fand T, Dowell E H. Numerical simulations of jump phenomena in stable Duffing systems[J]. *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 1987, **22**(2): 267—274.
- [8] Zhu W Q, Lu M Q, Wu Q T. Stochastic jump and bifurcation of a Duffing oscillator under narrow-band excitation[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1993, **165**(2): 285—304.
- [9] Wedig W V. Invariant measures and Lyapunov exponents for generalized parameter fluctuations[J]. *Structural Safety*, 1990, **81**(1): 13—25.

## **Visco\_Elastic Systems Under Both Deterministic Harmonic and Random Excitation**

XU Wei<sup>1</sup>, RONG Hai\_wu<sup>2</sup>, FANG Tong<sup>3</sup>

- (1. Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China;
- 2. Department of Applied Mathematics, Foshan University, Foshan, Guangdong 528000, China;
- 3. Institute of Vibration Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

**Abstract:** The response of visco\_elastic system to combined deterministic harmonic and random excitation was investigated. The method of harmonic balance and the method of stochastic averaging were used to determine the response of the system. The theoretical analysis was verified by numerical results. Theoretical analyses and numerical simulations show that when the intensity of the random excitation increase, the nontrivial steady state solution may change from a limit cycle to a diffused limit cycle. Under some conditions the system may have two steady state solutions and jumps may exist.

**Key words:** visco\_elastic system; method of harmonic balance; method of stochastic averaging