

文章编号: 1000-0887(2003) 08-0785-06

基于气动载荷与叶片厚度分布的 叶栅气动设计方法*

姚 征¹, 刘高联²

(1. 上海理工大学 动力工程学院, 上海 200093;
2. 上海大学 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

(我刊编委刘高联来稿)

摘要: 建立一种以载荷与叶片厚度分布为约束的叶栅气动设计计算方法, 约束条件体现了气动特性与强度两方面的要求, 这些约束及其它所有边界条件, 都包含在相应的变分原理的驻值条件中. 变分原理以周角函数为泛函的未知函数, 周角函数定义在由流线坐标与流函数坐标(周向)构成的映象面上. 在映象面上, 求解域——叶栅通道——化作一个矩形, 叶片型线映射为一条水平直线, 从而避免了叶片外形未知的困难. 利用有限元方法建立了计算程序, 算例显示这种方法能有效地满足对叶片型线的设计要求, 而且迭代计算具有良好的收敛性.

关键词: 叶栅气动设计; 杂交型问题; 变分原理; 有限元方法
中图分类号: O357.5 **文献标识码:** A

引 言

与叶轮机械气动力学正问题方法的迅速发展及其在流场分析中广泛应用相比, 反问题方法的发展与推广应用则显得困难得多. 导致这种现状的一个重要原因是工程设计须同时考虑气动特性、结构、强度与冷却等多方面的要求, 而多数反问题方法只从气动条件出发建立模型, 从而得到的解往往不切实用. 杂交型问题则不同, 它的定解条件中包括了气动特性与几何特性等多方面约束, 因此能弥补单纯反问题之不足. 本文采用的方法以叶片的载荷分布与厚度分布为设计约束, 它们与控制方程及其余的边界条件一起组成杂交型问题, 从而将气动特性与强度的要求结合在一起. 通过数值计算可将叶片形状及其绕流场同时解出来.

变分原理的自然边界条件为处理叶栅气动设计杂交问题的特定边界条件提供了一种灵活而有效的手段^[1~4]. 以气动载荷与叶片厚度分布为约束的变分原理有周角函数型与矩函数型两种, 它们都可以在由流函数坐标与流线坐标构成的映象平面上导得, 周角函数根据连续方程定义, 矩函数则由动量矩方程定义^[5,6]. 本文采用周角函数型的变分原理. 在映象平面上, 求解域——叶栅通道——化作一个矩形, 叶片型线映射为一条水平直线, 从而避免了叶片外形未

* 收稿日期: 2001_08_28; 修订日期: 2003_05_02

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50136030); 上海市重点学科建设项目“能源岛系统研究”

作者简介: 姚征(1945—), 男, 浙江人, 教授, 硕士(E-mail: yyyzzz@online.sh.cn);

刘高联(1932—), 男, 教授, 博导, 科学院院士(E-mail: gliu@sh.163.net)

知的困难。利用有限元方法对变分原理进行离散并求其驻值解,解得的周角函数能直接给出叶片外形,再通过周角函数的进一步计算求得流场特性。

为验证方法的有效性,本文利用一个已知叶型,先用正问题方法解出其载荷分布,将此载荷与叶片厚度分布输给杂交问题计算程序,解出叶片形状与已知叶型相比较,显示两者很好吻合。然后,又对以上载荷分布加以修改,并据此解出一个新的叶型,再用正问题算法解得新叶型的载荷分布。与输入的目标载荷分布比较,显示除前缘附近略有误差外也能较好符合,本文最后对导致此误差的原因与改进方法作了讨论。

1 变分原理

1.1 气动力学方程组

以速度 ω 作匀速旋转的叶轮中,相对定常无粘流动的无量纲控制方程在流线坐标 l 与流函数坐标 ϕ 构成的映象平面中为

连续方程

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\tau \rho \Lambda_v} \right) - \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\tan \beta}{r} \right) = 0; \quad (1)$$

动量矩方程

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\tau \rho \tilde{p}}{k} \right) = 0; \quad (2)$$

能量方程

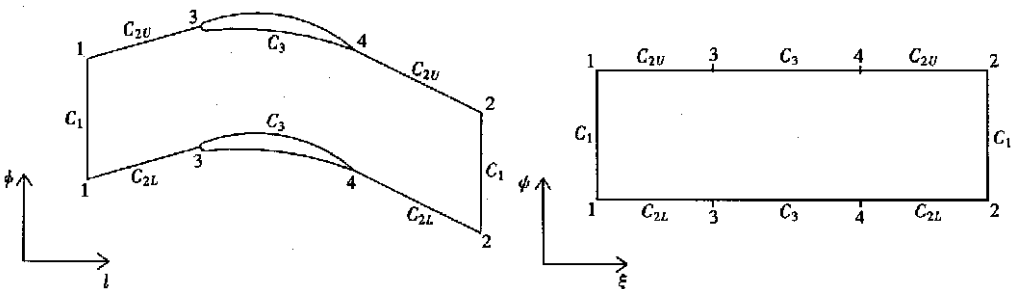
$$\rho = \tilde{p}^{1/k} = \left[1 - \frac{k-1}{2} (\Lambda^2 - \Lambda_u^2) \right]^{1/(k-1)}; \quad (3)$$

其中 Λ 是以滞止音速 a_0 为参考量的速度系数,下标 ϕ 与 l 分别表示周向与子午流线方向分量,无量纲密度 ρ 与压力 \tilde{p} 的参考量分别为滞止密度与滞止压力,环量 $\Gamma = r(\Lambda_\phi + \Lambda_u)$,牵连速度系数 $\Lambda_u = \omega r / a_0$ 。根据方程(1)定义周角函数 $\theta(\xi, \phi)$ 如下

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \frac{\tan \beta}{r}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \phi} = \frac{1}{\tau \rho \Lambda_v}, \quad (4)$$

很容易看出 θ 等同于周角函数。

1.2 边界条件



(a) 物理平面

(b) 映象平面

图1 叶栅流动求解域及其映象

参阅图1,边界条件按如下给定

C_1 (进、出口边界):

$$\Lambda_\phi = (\Lambda_\phi)_{pr}; \quad (5a)$$

C_2 (周期边界):

$$\theta(\xi, \psi \pm k \Delta \varphi) = \theta(\xi, \psi) \pm k \Delta \varphi \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \tag{5b}$$

C_S (吸力面):

$$\theta_p - \theta_s = g\theta(\xi), \quad \tilde{p}_p - \tilde{p}_s = g_p(\xi); \tag{5c}$$

式中, $g_p(\xi)$ 、 $g\theta(\xi)$ 与 $(\Lambda_\varphi)_{pr}$ 都预先给定。

1.3 变分原理

由文献[1]可知, 方程(1)至(5)的解使下列泛函 $J(\theta)$ 取驻值, 即使变分 $\delta J = 0$,

$$J(\theta) = \iint F d\xi d\psi - \int_{C_1} \Gamma_{pr} \theta \mathbf{i}_\xi \cdot \mathbf{n} ds + \frac{1}{2k} \int_{C_{2L}} \mathcal{T}_r (\theta_U - \theta_L - \Delta \varphi) \cdot (\tilde{p}_U - \tilde{p}_L) d\xi + L_0, \tag{6}$$

其中

$$F = \frac{1}{\rho \Lambda_l} \left[\frac{\tilde{p}}{\rho} + \rho (\Lambda^2 - \Lambda_\varphi \Lambda_u) \right],$$

$$L_0 = - \int_{C_S} \frac{\mathcal{T}_r}{k} [(\theta_p - g\theta)(\tilde{p}_s + g_p) - \tilde{p}_s \theta_s] d\xi.$$

证明 对泛函 $J(\theta)$ 取变分并令它等于零, 再用格林定理进行变换后就得到以下条件欧拉方程: 方程(2);

自然边界条件: 方程(5a)至(5c)。

2 有限元解法

泛函 $J(\theta)$ 取驻值的必要条件, 即 $\delta J = 0$ 可写作

$$\iint \left[\frac{\mathcal{T}_p}{k} \frac{\partial(\delta\theta)}{\partial\psi} + \Gamma \frac{\partial(\delta\theta)}{\partial\xi} \right] d\xi d\psi - \int_{C_1} \Gamma_{pr} \theta \mathbf{i}_\xi \cdot \mathbf{n} d\xi - \int_{C_S} \frac{\mathcal{T}_r}{k} g_p \delta\theta d\xi + \frac{1}{2k} \int_{C_{2L}} \mathcal{T}_r (\theta_U - \theta_L - \Delta \varphi) \cdot (\tilde{p}_U - \tilde{p}_L) \mathbf{i}_\psi \cdot \mathbf{n} ds - \int \frac{\mathcal{T}_r}{k} (\theta_p - \theta_s - g\theta) \delta\tilde{p}_s d\xi = 0. \tag{7}$$

当下列条件作为强加边界条件来处理时, 上式中最后两个积分项就消失了。

$$\theta_U - \theta_L = \Delta \varphi \quad (\text{边界 } C_{2L}),$$

$$\theta_p - \theta_s = g\theta \quad (\text{边界 } C_S).$$

将求解域划分为 N 个矩形单元 $A^e (e = 1, \dots, N)$, 每个单元的 θ 与 $\delta\theta$ 都表示为

$$\theta = \phi_i(\xi, \eta) \theta_i; \quad \delta\theta = \phi_j(\xi, \eta) \delta\theta_j \quad (i, j = 1, \dots, 9), \tag{8}$$

其中 θ_j 与 $\delta\theta_j$ 代表 θ 与 $\delta\theta$ 在 9 个节点上的值, 而 ϕ_i 与 ϕ_j 为形状函数, 将(8)式代入(7)式导致下列矩阵方程

$$[A] \{ \theta \} = \{ B \}, \tag{9}$$

式中

$$[A] = \sum_{e=1}^N \iint_{A^e} \left[r^2 \Lambda_l \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} \frac{\partial \phi_j}{\partial \xi} + \frac{(\mathcal{T}_r)^2 \rho^{+1} \Lambda_l}{k} \frac{\partial \phi_i}{\partial \psi} \frac{\partial \phi_j}{\partial \psi} \right] d\xi d\psi,$$

$$\{ B \} = \sum_{e=1}^N \left\{ \iint_{A^e} r \Lambda_u \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} d\xi d\psi \pm \int_{C_1} \Gamma_{pr} \phi_i d\psi + \int_{C_p} \frac{\mathcal{T}_r}{k} g_p \phi_i d\xi \right\}.$$

由方程(9)解出的矢量 $\{\theta\}$ 也就是周角坐标 ϕ , 因此它在边界 C_3 (即 C_s 和 C_p) 上的值直接给出叶片的型线, 变量 Λ 与 ρ 则可利用 θ 按照方程(3)与(4)计算得到。

3 算 例

算例采用 15° 安装角, 栅距与弦长之比为 1.33 的 NACA65(12) 10 叶型^[7], 取进口马赫数为 0.4, 进口气流角为 25° , 转速为 1 600 r/min。先利用正问题解法求得上下叶面的压力差,

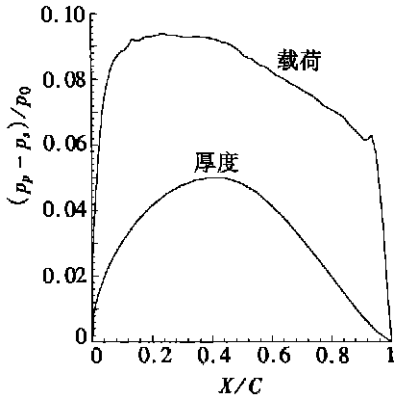


图 2(a) 叶片厚度与载荷

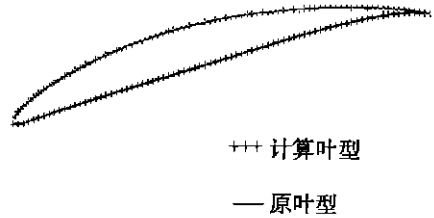


图 2(b) 计算叶型与原始叶型比较

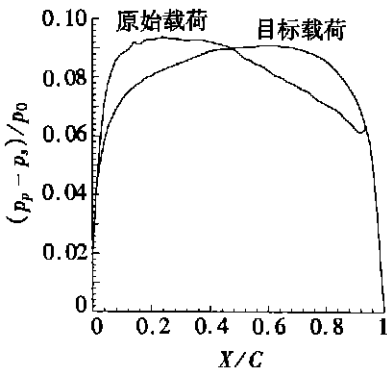


图 3(a) 载荷分布修改

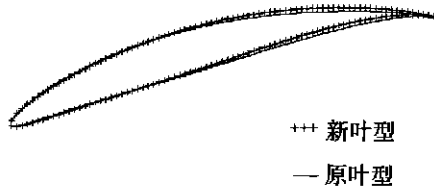


图 3(b) 修改前后叶片几何形状比较

将其与叶片厚度分布一起输入杂交问题计算解得叶片几何形状。图 2(a) 显示了叶片厚度与载荷分布, 图 2(b) 将计算出的叶片型线与原来的型线进行比较, 两者完全吻合。图 3(a) 显示了对原有载荷的修改, 载荷从叶片的前部向后部转移, 但总载荷量接近相同以使出口气流角保持不变。图 3(b) 显示了新叶型, 与原叶型相比, 它在后缘附近的曲率增加了。再次用正问题方法计算新叶片的载荷, 并将它与目标载荷曲线一起在图 3(c) 给出。

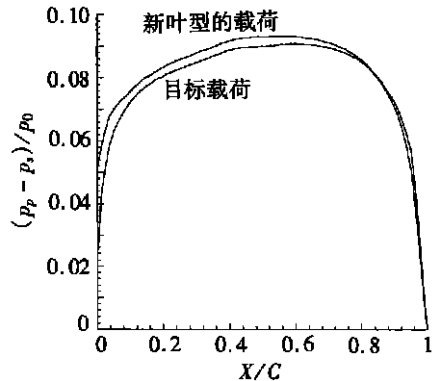


图 3(c) 新叶型的载荷

新的载荷分布与目标曲线总体上符合较好, 但在前边部分有 3% 左右的误差。这个误差是由于前缘附近计算精度不足导致的。由于映象平面上求解域是个矩形, 因此很自然地将它划分为矩

形单元。这样,在物理平面与之相对应的便是 H 型网格,而 H 型网格很容易在叶片前缘处发生畸变,从而导致误差。实际上,这是叶栅流动数值计算中的共同性问题,为了克服这一缺陷,在正问题计算中发展了各种结构类型的网格,但在反问题计算中,尚缺乏这方面的研究。可以预期,如将 C 型或 O 型等结构的网格引入映象平面将有可能提高前缘附近的计算精度。

4 结束语

在反问题与杂交问题求解过程中经常会遇到收敛的困难,这是由于控制方程与边界条件包含很强的非线性,以致有时要依靠初场的仔细设置和对迭代过程的精心控制才能取得收敛。这也是反问题与杂交问题方法难以推广的重要原因,因为对一个具有实用价值的设计计算方法来说,稳定可靠的收敛性是个基本的要求。令人鼓舞的是本文的方法能快速稳定地达到收敛,对初场与迭代过程的控制都无特别要求(见图 4)。事实上,本次计算中,初场是按一元流动的简单运算得到的,而在整个迭代运算过程中,松弛因子都固定为 0.5。这个优点应归功于本方法的约束条件,即对载荷与叶片厚度分布的规定。由于叶片形状可以由其中弧线形状与厚度分布确定,而在一定的工况下,载荷分布主要决定于中弧线形状,因此对于确定叶片形状而言,这种约束条件比其他的约束条件,如规定沿整个叶面的速度分布,来得更强。此外,在迭代计算过程中,始终严格满足势流的零环量条件与后缘库塔条件,这些因素都有利于迭代的稳定收敛。

如前所述,在前缘附近区域,由于网格的原因使计算精度尚不令人满意。在映象平面上采用网格优化技术显然比在物理平面上困难得多,但我们将在下步工作中对网格的影响作专门研究。

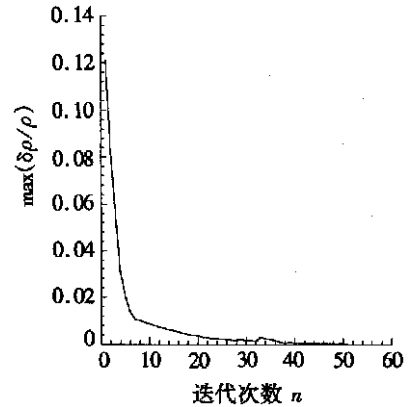


图 4 收敛历史

[参 考 文 献]

- [1] LIU Gao-lian. Variational principles and generalized variational principles for hybrid aerodynamic problem of airfoil cascades on an arbitrary stream sheet of revolution (I) [J]. Scientia Sinica , 1980, 23(10): 1339—1347.
- [2] 刘高联. 任意旋成面叶栅杂交型气动命题的变分原理与广义变分原理(II) [J]. 工程热物理学报, 1981, 2(4): 24—33.
- [3] 刘高联, 姚征. 任意旋成面叶栅杂交型气动命题的变分原理与广义变分原理(III) [J]. 工程热物理学报, 1986, 7(4): 329—331.
- [4] LIU Gao-lian. A united theory of hybrid problems for fully 3_D incompressible rotor_flow based on variational principles with variable domain [J]. ASME J Engineering for GT & Power , 1986, 108(2): 254—258.
- [5] 刘高联. 矩函数及其在旋成面叶栅气动反命题及杂交命题中的应用 [J]. 工程热物理学报, 1982, 3(2): 138—144.
- [6] 姚征, 陈月林. 叶轮机械任意旋成面叶栅气动杂交命题矩函数型变分有限元解法 [J]. 空气动力学学报, 1989, 7(3): 313—322.

[7] Horlock J K. Axial Flow Compressor [M]. London: Butterworth Scientific Publications, 1958.

Aerodynamic Design Method of Cascade Profiles Based on Load and Blade Thickness Distribution

YAO Zheng¹, LIU Gao_lian²

(1. Power Engineering School, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, P. R. China ;

2. Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, P. R. China)

Abstract: A cascade profile design method was proposed using the aerodynamic load and blade thickness distribution as the design constraints, which were correspondent to the demands from the aerodynamic characteristics and the blade strength. These constraints, together with all the other boundary conditions, were involved in the stationary conditions of a variational principle, in which the angle function was employed as the unknown function. The angle function (i. e. the circumferential angular coordinate) was defined in the image plane composed of the stream function coordinate (circumferential direction) and streamline coordinate. The solution domain, i. e. , the blade to blade passage, was transformed into a square in the image plane, while the blade contour was projected to a straight line; thus, the difficulty of the unknown blade geometry was avoided. The finite element method was employed to establish the calculation code. Applications show that this method can satisfy the design requests on the blade profile from both aerodynamic and strength respects. In addition, quite different from the most inverse problem approaches that often encounter difficulties in the convergence of iteration, the present method shows a stable and fast convergence tendency. This will be significant for engineering applications.

Key words: cascade design; hybrid problem; variational principle; finite element method