

文章编号: 1000-0887(2003) 08-0805-07

基于圆判据的一种 LMI 绝对镇定方法^{*}

杨莹, 黄琳

(北京大学 力学与工程科学系, 系统与控制研究中心, 北京 100871)

(叶庆凯推荐)

摘要: 针对非线性 Lur' e 系统, 提出了一种输出反馈控制器综合方法. 对于系统在无摄动及线性部分存在乘性范数摄动的情况, 分别设计了保证闭环系统绝对稳定的动态输出反馈控制器. 由圆判据出发, 通过把绝对稳定性问题等价地转化成 H_∞ 控制问题, 得到了一组由线性矩阵不等式 (LMI) 表达的控制器存在的充分性条件.

关键词: 非线性 Lur' e 系统; 圆判据; 绝对稳定性; H_∞ 控制; LMI

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

引 言

非线性系统稳定性研究的一个主要贡献是 1944 年 Lur' e 与 Postnikov 提出的绝对稳定性概念^[1], 其讨论的是一种前馈通道为线性对象而反馈通道为扇区非线性的系统 (即 Lur' e 系统) 的稳定性问题. 尽管此后吸引了许多学者的兴趣的努力, 但直到 1961 年罗马尼亚数学家 V. M. Popov 提出了其著名的 Popov 判据后^[2], 有关 Lur' e 系统绝对稳定性的研究才引起了广泛注意, 并由此出现了许多重要的成果. Popov 判据的优点是它是一种频域作图的方法, 只需通过系统线性部分的频率特性即可判断整个系统的绝对稳定性. 此后又有许多类似的频域结果出现, 但应用最广泛的是圆判据, 它给出了一个判断具有时变非线性函数的 Lur' e 系统绝对稳定性的充分条件^[3-5]. 尽管圆判据比 Popov 判据出现得晚, 但其应用范围却比 Popov 判据广. 主要原因是圆判据更类似于古典控制理论中的 Nyquist 判据, 并且能处理种类更多的非线性函数. 比如圆判据可用来判断具有记忆型或时变非线性函数的 Lur' e 系统, 而 Popov 判据只能用于非线性函数为无记忆、时不变情形的 Lur' e 系统.

尽管这些几何判据在判断 Lur' e 系统的绝对稳定性方面显示出极大的优越性, 但至今为止, 由这些判据出发研究 Lur' e 系统的控制器综合问题还鲜见于文献. 本文的目的就是从圆判据出发, 设计动态输出反馈控制器以保证闭环 Lur' e 系统绝对稳定. 我们给出了绝对镇定控制器存在的条件, 并分别给出了系统无摄动和线性部分存在乘性范数摄动时控制器的设计方法.

本文采用 LMI 方法设计动态输出反馈控制器, 其优点是运算简单、效率高^[6]. 用 LMI 的

* 收稿日期: 2001_03_19; 修订日期: 2003_04_29

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10272001); 国家重点基础研究专项经费资助项目 G1998020302)

作者简介: 杨莹 (1973—), 女, 河南人, 博士 (E-mail: yy@mech.pku.edu.cn).

方法解决非线性系统的绝对镇定问题可见于[7~9]。但这些文献研究的非线性系统与本文不同,绝对镇定的概念也不一样。本文中,系统的绝对稳定性问题被等价地转化成 H_∞ 控制问题,并在 H_∞ 次优控制理论的框架下进行控制器设计。最后的结果是由一组线性矩阵不等式表达的控制器存在的充分性条件。

1 预备知识

经典的圆判据是用来判断图1所示系统的绝对稳定性。其中非线性输入函数 φ 可以是无记忆或记忆、时变或时不变型函数,且满足扇区条件

$$k_1 \leq \frac{\varphi(t, \sigma)}{\sigma} \leq k_2$$

系统为绝对稳定是指 $G(j\omega)$ 满足

$$\begin{aligned} J(\omega^2) &\triangleq 1 + (k_1 + k_2)\operatorname{Re}G(j\omega) + \\ &k_1k_2 |G(j\omega)|^2 > 0 \\ \forall \omega \in (-\infty, +\infty) \end{aligned} \quad (1)$$

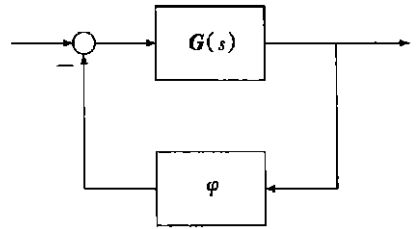


图1 非线性 Lur'e 系统

设

$$U = \operatorname{Re}G(j\omega) \text{ 和 } V = \operatorname{Im}G(j\omega),$$

条件(1)可写为

$$\begin{aligned} J(\omega^2) &= k_1k_2 \left\{ \left[U + \frac{1}{2}(k_1^{-1} + k_1^{-2}) \right]^2 + V^2 - \frac{1}{4}(k_1^{-1} + k_1^{-2})^2 \right\} \triangleq \\ &k_1k_2 [(U - v_0)^2 + V^2 - r_0^2] > 0 \end{aligned} \quad (2)$$

条件(2)的几何解释为:在 U, V 平面上, $J(\omega^2) = 0$ 对应圆 $(U - v_0)^2 + V^2 = r_0^2$ 而 $J(\omega^2) > 0$ 对应的区域与 k_1 和 k_2 的符号有关。若 $k_1k_2 > 0$, $J(\omega^2) > 0$ 对应圆外的区域,若 $k_1k_2 < 0$, $J(\omega^2) > 0$ 对应圆内的区域。

考虑 $k_1k_2 < 0$ 的情况,则条件(1)变为

$$J(\omega^2) = \left| \frac{2}{k_2^{-1} - k_1^{-1}} G(j\omega) + \frac{k_2^{-1} + k_1^{-1}}{k_2^{-1} - k_1^{-1}} \right| \triangleq |rG(j\omega) + \rho| < 1, \quad (3)$$

即 $G(s)$ 的频率响应曲线落在复平面上半径为 $(k_2^{-1} - k_1^{-1})/2$, 圆心为 $(-(k_1^{-1} + k_2^{-1})/2, 0)$ 的圆内。也就是说 $G(s)$ 上任一点到圆心的距离不超过其半径 $(k_2^{-1} - k_1^{-1})/2$, 即

$$\|rG(j\omega) + \rho\|_\infty < 1 \quad (4)$$

可见当 $k_1k_2 < 0$ 时,圆判据可等价地转化成 H_∞ 范数约束,由此系统的绝对镇定问题就可以在 H_∞ 的框架下讨论。对于 $k_1k_2 > 0$ 或 $k_1k_2 = 0$ 的情形,我们总可以用回路变换的方法将其转化为 $k_1k_2 < 0$ ^[4] 因此下面我们将只讨论 $k_1k_2 < 0$ 时系统的绝对镇定问题。

2 主要结果

在本节中,我们分别给出系统无摄动及线性部分存在乘性摄动时控制器存在的条件,它可以归结为一组线性矩阵不等式解的存在性问题。

2.1 无摄动情况

考虑图2的非线性 Lur'e 系统。设 $G(s)$ 为严格真有理函数且

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & -B \\ \hline C & \mathbf{0} \end{array} \right],$$

$K(s)$ 为待设计的控制器且

$$K(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_k & B_k \\ \hline C_k & D_k \end{array} \right] \cdot$$

定理 1 存在全阶控制器 $K(s)$ 使得 $K(s)$ 绝对镇定 $\{G(s), \varphi\}$ 的条件为 $\mathcal{L}_D \neq \emptyset$, 其中

$$\mathcal{L}_D = \left\{ (R, S) \in \mathbf{R}^{n \times n} \times \mathbf{R}^{n \times n} : R \in \mathcal{L}_B, S \in \mathcal{L}_C, \begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} > 0 \right\},$$

$$\mathcal{L}_B = \left\{ R \in \mathbf{R}^{n \times n} : R = R^T > 0, \text{ 且} \right.$$

$$\left. \begin{bmatrix} B^\perp & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AR + RA^T & RC^T & -rB \\ CR & -1 & \rho \\ -rB^T & \rho & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^{-\perp T} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} < 0 \right\},$$

$$\mathcal{L}_C = \left\{ S \in \mathbf{R}^{n \times n} : S = S^T > 0, \text{ 且} \right.$$

$$\left. \begin{bmatrix} C^T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SA + A^T S - rSB & C^T \\ -rB^T S & -1 & \rho \\ C & \rho & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^{T \perp} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} < 0 \right\} \cdot$$

对于定理 1 中的线性矩阵不等式, 可用[10]中的 LMI 工具包来求解。以下给出一个控制器设计的方法:

1. 求解定理 1 中的 LMI 得到一个解 (R, S) ;
2. 由 (R, S) , 通过奇异值分解(SVD) 计算可逆矩阵 $M, N \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 使得

$$MN^T = I - RS \cdot$$

3. 由下式计算 X_{cl} :

$$X_{cl} \begin{bmatrix} R & I \\ M^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & S \\ 0 & N^T \end{bmatrix} \cdot$$

一旦得到 X_{cl} , 则可以由[11]中的通解公式设计控制器。

2.2 线性部分存在乘性摄动的情况

以下考虑线性部分存在乘性范数摄动的非线性 Lur'e 系统鲁棒绝对稳定控制器存在的条件, 即 $G(s) = \{G(s)(1 + \Delta), \Delta \in RH_\infty, \|\Delta\|_\infty \leq \gamma\}$ 。其反馈结构如图 3 所示。

设

$$G_c(s) \stackrel{\Delta}{=} \frac{G(s)(1 + \Delta)}{1 + K(s)G(s)(1 + \Delta)} \quad \|\Delta\|_\infty \leq \gamma$$

为 $(G(1 + \Delta), K)$ 的闭环传递函数。对单输入单输出系统来说, Δ 可以用复数 $\alpha + \beta i, \alpha^2 + \beta^2 \leq \gamma^2$ 代替, 即

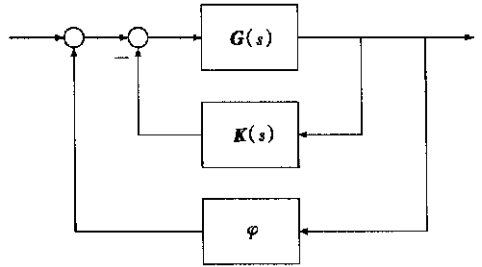


图 2 反馈非线性 Lur'e 系统

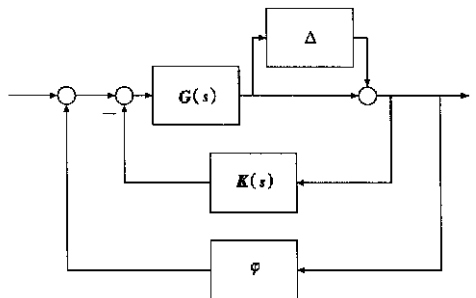


图 3 线性部分存在乘性摄动的 Lur'e 系统

$$G_c(s) = \frac{G(s)(1 + \alpha + \beta i)}{1 + K(s)G(s)(1 + \alpha + \beta i)} \quad \forall \alpha, \beta, \alpha^2 + \beta^2 \leq \gamma^2 \quad (5)$$

设 $rG_c(s) + \rho$ 的状态空间实现为

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{cl} & B_{cl} \\ \hline C_{cl} & D_{cl} \end{array} \right], \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{cl} = \begin{bmatrix} A + BD_k(1 + \alpha + \beta i)C & BC_k \\ B_k(1 + \alpha + \beta i)C & A_k \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} A + BD_kC & BC_k \\ B_kC & A_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BD_k(\alpha + \beta i)C & \mathbf{0} \\ B_k(\alpha + \beta i)C & \mathbf{0} \end{bmatrix} \triangleq \\ A_u + \begin{bmatrix} BD_k(\alpha + \beta i)C & \mathbf{0} \\ B_k(\alpha + \beta i)C & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \\ B_{cl} = \begin{bmatrix} -rB \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \triangleq B_u, \\ C_{cl} = [(1 + \alpha + \beta i)C \quad \mathbf{0}] = [C \quad \mathbf{0}] + [(\alpha + \beta i)C \quad \mathbf{0}] \triangleq \\ C_u + [(\alpha + \beta i)C \quad \mathbf{0}], \\ D_{cl} = \rho, \end{array} \right. \quad (6)$$

$\left[\begin{array}{c|c} A_u & B_u \\ \hline C_u & \rho \end{array} \right]$ 为 $rG_c(s) + \rho$ 当 $G_c(s) = \frac{G(s)}{1 + K(s)G(s)}$ 时的状态空间实现。

定理 2 图 3 所示系统鲁棒绝对稳定的条件为存在 $X_{cl} = X_{cl}^T > 0$ 及 $\kappa > 0$ 使得

$$\begin{bmatrix} X_{cl}A_u + A_u^T X_{cl} & X_{cl}B_u & \kappa X_{cl}B & C_u^T & \gamma C_u^T / \kappa \\ B_u^T X_{cl} & -1 & 0 & \rho & 0 \\ \kappa B^T X_{cl} & 0 & -1 & \kappa & 0 \\ C_u & \rho & \kappa & -1 & 0 \\ \gamma C_u / \kappa & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} < 0, \quad (7)$$

其中 $B = \begin{bmatrix} BD_k \\ B_k \end{bmatrix}$ 。

证明 当

$$\|rG_c(s) + \rho\|_\infty < 1, \quad \forall \alpha, \beta, \alpha^2 + \beta^2 \leq \gamma^2.$$

图 3 的系统绝对稳定。其中 $G_c(s)$ 由(5)定义。

根据有界实引理, 上述条件成立当且仅当存在 $X_{cl} > 0$ 使得

$$\Phi(X_{cl}, \Sigma_{cl}) \triangleq \begin{bmatrix} X_{cl}A_{cl} + A_{cl}^H X_{cl} & X_{cl}B_{cl} & C_{cl}^H \\ B_{cl}^H X_{cl} & -1 & D_{cl}^H \\ C_{cl} & D_{cl} & -1 \end{bmatrix} < 0. \quad (8)$$

设

$$X_u = \begin{bmatrix} X_{cl}A_u + A_u^T X_{cl} & X_{cl}B_u & C_u^T \\ B_u^T X_{cl} & -1 & \rho \\ C_u & \rho & -1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} X_{cl}B \\ \mathbf{0} \\ I \end{bmatrix}, \quad Y = [C_u \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}], \quad (9)$$

则不等式(8)化为

$$\Phi(X_{cl}, \Sigma_{cl}) = X_u + X(\alpha + \beta i) Y + Y^T(\alpha - \beta i) X^T < 0,$$

上式成立当且仅当存在 $\kappa > 0$ 使得

$$X_u + \kappa^2 X X^T + \frac{Y^2}{\kappa^2} Y^T Y < 0 \quad (10)$$

设

$$Z = \begin{bmatrix} \kappa X & \frac{Y}{\kappa} Y^T \end{bmatrix}, \quad (11)$$

则(10)变为

$$X_u + Z Z^T < 0, \quad (12)$$

应用 Schur 补, (12) 可写为

$$\Phi(X_{cl}, \Sigma_{cl}) = \begin{bmatrix} X_u & Z \\ Z^T & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (13)$$

将(9)和(11)代入(13)并重新排列矩阵 $\Phi(X_{cl}, \Sigma_{cl})$ 的行列, 即可得(7) □

以下给出上述系统控制器存在的条件.

注意到(7)是关于变量 (X_{cl}, K) 的双线性矩阵不等式, 我们首先用文[12]的方法把它变成线性矩阵不等式. 取参数 $p = \{P_f, P_g, P_h, W_f, W_g, W_h, L\}$, $P_f, P_g \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $P_h \in \mathbf{R}^{(n_c - n) \times (n_c - n)}$, $W_f \in \mathbf{R}^{1 \times n_c}$, $W_g \in \mathbf{R}^{n_c \times 1}$, $W_h \in \mathbf{R}$, $L \in \mathbf{R}^{n_c \times n_c}$, 且

$$\begin{bmatrix} P_f & I \\ I & P_g \end{bmatrix} > 0, \quad P_h > 0$$

设

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}, \quad W_f = [W_{f1} \quad W_{f2}], \quad W_g = \begin{bmatrix} W_{g1} \\ W_{g2} \end{bmatrix},$$

其中 $L_{11} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $W_{f1} \in \mathbf{R}^{1 \times n}$, $W_{g1} \in \mathbf{R}^{n \times 1}$.

定义以下矩阵仿射函数:

$$M_p(p) = \begin{bmatrix} P_f & I_n & \mathbf{0} \\ I_n & P_g & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & P_h \end{bmatrix}, \quad M_A(p) = \begin{bmatrix} AP_f + BW_{f1} & A + BW_h C & BW_{f2} \\ L_{11} & P_g A + W_{g1} C & L_{12} \\ L_{21} & W_{g2} C & L_{22} \end{bmatrix},$$

$$M_C(p) = \begin{bmatrix} C_1 P_f & C_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad M_B(p) = \begin{bmatrix} B_1 + BW_h N_1 \\ P_g B_1 + W_{g1} N_1 \\ W_{g2} N_1 \end{bmatrix}, \quad M_D(p) = D_1,$$

$$\Phi^*(p) = M_p(p) \oplus \begin{bmatrix} -M_A(p) - M_A^T(p) & M_B(p) & M_C^T(p) \\ M_B^T(p) & 1 & -M_D(p) \\ M_C(p) & -M_D(p) & 1 \end{bmatrix},$$

其中

$$B_1 = [-rB \quad \mathbf{0}], \quad C_1 = \begin{bmatrix} C \\ \sqrt{C}/\kappa \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} \rho & \kappa \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_1 = [0 \quad \kappa].$$

利用[12]的结果, 我们得到以下定理.

定理 3 对某一 $n_c > n$, 若存在 p 及 $\kappa > 0$ 使得

$$\Phi^*(p) > 0,$$

则存在阶数为 n_c 的控制器 $K(s)$ 绝对镇定图 3 所示闭环系统且 $K(s)$ 的状态空间实现由下式

决定

$$\left[\begin{array}{c|c} D_k & C_k \\ \hline B_k & A_k \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{B} & -P_g^{-1} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{n_c-n} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|cc} W_h & W_{f1} & W_{f2} \\ \hline W_{g1} & L_{11} - P_g A P_f & L_{12} \\ \hline W_{g2} & L_{21} & L_{22} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|cc} 1 & C P_f S_f^{-1} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & S_f^{-1} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & P_h^{-1} \end{array} \right],$$

$$S_f = P_f - P_g^{-1} (> 0).$$

例 1 考虑如下系统

$$G(s) = \frac{0.5}{s+1.5}(1+\Delta) \quad \|\Delta\|_\infty \leq 0.625,$$

且 $\varphi \in [-1.5, 2.5]$. 设 $\kappa = 1.525$, 则存在参数集 p

$$P_f = 34.1638, P_g = 0.9249, W_h = 0.0191, W_f = -2591.9,$$

$$W_g = -0.6249, L = -57.3559$$

满足定理 3 的条件, 由此求得控制器为

$$K(s) = \frac{0.019091(s-2.773)}{s+78.38}.$$

3 结束语

本文研究了非线性 Lur'e 系统的输出反馈绝对镇定问题. 通过把圆判据化成一个 H_∞ 范数约束条件, 控制器综合问题即可用 H_∞ 方法来解决. 对于系统无摄动和线性部分存在乘性范数摄动的情况, 分别得到了用一组 LMI 表达的控制器存在条件. 实例分析表明该文提出的控制器设计方法是有效的.

[参 考 文 献]

- [1] Lur'e A I, Postnikov V N. On the theory of stability of control systems[J]. Prikl Mat Meh, 1944, 8(3).
- [2] Popov V. Absolute stability of non_linear systems of automatic control[J]. Automation and Remote Control, 1961, 22: 857—875.
- [3] Narendra K S, Taylor J H. Frequency Domain Criteria for Absolute Stability [M]. New York Academic Press, 1973.
- [4] Vidyasagar M. Nonlinear System Analysis [M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1993.
- [5] Khalil H K. Nonlinear System [M]. New York MacMillan Publishing, 1992.
- [6] Boyd S, Chaoui L E, Feron E, et al. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory [M]. Philadelphia, Pennsylvania: SIAM, 1994.
- [7] Savkin A V, Petersen I R. A connection between H^∞ control and the absolute stabilizability of uncertain systems[J]. System and Control Letters, 1994, 23(3): 197—203.
- [8] Konishi K, Kokame H. Robust stability of Lur'e systems with time_varying uncertainties: a linear matrix inequality approach[J]. Int J System Science, 1999, 30(1): 3—9.
- [9] Kahutani Y, Hagiwara T, Araki M. LMI representation of the shifted of Popov criterion[J]. Automatica, 2000, 36(5): 765—770.
- [10] Gahinet P, Arkadi Nemirovski, Laub J A, et al. LMI Control Toolbox User's Guide [M]. Natick, Mass: The Math Works, Inc, 1995.
- [11] Iwasaki, Skelton R E. All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas[J]. Automatica, 1994, 30(8): 1307—1317.

- [12] Izumi Masubuchi, Atsumi Ohara, Nobuhide Suda. LMI_based controller synthesis: a unified formulation and solution[J]. Int J Robust Nonlinear Control, 1998, 8(8): 669—686.

Absolute Stabilization Related to Circle Criterion: an LMI_Based Approach

YANG Ying, HUANG Lin

(Center for Systems and Control, Department of Mechanics and Engineering Science,
Peking University, Beijing 100871, P. R. China)

Abstract: A method is proposed for synthesizing output feedback controllers for nonlinear Lur' e systems. The problem of designing an output dynamic controller for uncertain_free systems and systems subject to multiplicative norm_bounded perturbations in the linear part were proposed respectively. The procedure is based on the use of the absolute stability, through the circle criterion, and a linear matrix inequalities(LMI) formulation. The controller existence conditions are given in terms of existence of suitable solutions to a set of parameter_dependent LMIs.

Key words: nonlinear Lur' e systems; circle criterion; absolute stabilization; H_∞ control; LMI