

文章编号: 1000-0887(2003) 08-0821-06

超声速气流中含灰气体点源流动特性^{*}

王柏懿¹, A. N. 欧西普措夫², M. A. 特维若夫斯基²

(1. 中国科学院 力学研究所 非线性力学国家重点实验室, 北京 100080;

2. 莫斯科国立罗蒙洛索夫大学 力学研究所, 莫斯科 119899)

(我刊原编委 卞荫贵推荐)

摘要: 采用 Lagrange 方法, 研究了超声速气流中含灰气体点源的流动特性, 求得了对称轴附近激波层内的流动参数。计算数值模拟结果揭示了大惯性颗粒在激波层内沿着相互交叉的振荡轨迹运动, 颗粒分布形成了高、低密度层交错出现的“多层结构”, 而且粒子在轨迹包络线附近急剧聚集。

关键词: 含灰气体; 超声速流动; 点源; 粒子惯性; 轨迹交叉; 多层结构

中图分类号: O359 **文献标识码:** A

引 言

含灰气体(一类两相介质)是气固悬浮混合物, 这里的颗粒和气体分别称为弥散相和载气相。由于颗粒与气体分子间质量差异甚大, 气固两相体系中必然发生弛豫过程。在许多含灰气体流动中, 惯性粒子的轨迹可能是振荡型的, 从而造成粒子轨迹多重交叉区域的出现^[1]。建立研究这类效应的数值模型, 对于大量自然现象和工程应用都具有重要意义。例如, 天文学中彗星核向其周围大气的蒸发现象, 航天工程中欠膨胀喷管射流与迎面高超声速气流的相互作用, 还有高新技术应用中采用对撞射流喷雾器干燥颗粒材料, 等等。

研究颗粒轨道有交叉的两相流动时, 要求改进通常的含灰气体理论模型, 因为那里假定了颗粒参数的单值性^[2]。当然, 还需要发展相应的数值算法, 它们应当能显示轨迹交叉区域的边界, 同时能准确计算出颗粒浓度。Crowe 及其合作者^[3, 4]广泛综述了各种稀相气固两相流的数值计算方法, 它们大体上可划分为 Euler 方法和 Lagrange 方法两类。颗粒轨道交叉破坏了单值性, Euler 方法失效。一般的 Lagrange 方法需在大量轨道计算的基础上进行统计平均, 计算机时耗费巨大。因而人们曾广泛采用所谓的“大颗粒”方法及其改进来计算这类区域中的颗粒参数, 其缺点是颗粒浓度计算得不精确。Årnsperg^[5]建议了一种新颖的计算弥散相密度的方法, 它采用颗粒相连续方程的 Lagrange 形式。最近, Healy 和 Young^[6]通过二维算例评估了 Årnsperg 方法, 指出该法更加严谨并且高效。本文将改进这种新颖方法, 并说明它如何应用于轨道具有多重交叉的含灰气体流动。该方法使得人们可以去研究颗粒浓度分布具有多层结构并在轨迹

* 收稿日期: 2002_03_19; 修订日期: 2003_04_29

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(90205024); 俄罗斯基础研究基金资助项目(02_10_00770); 俄罗斯_中国双边合作基金资助项目(99_01_39020)

作者简介: 王柏懿(1941—), 女, 浙江绍兴人, 研究员, 主要研究领域为高速气体动力学、低温等离子体动力学和多相介质流体力学(E-mail: why@imech. ac. cn)。

包络线附近急剧增加的两相体系。

1 数学表述

作为一个典型问题,我们考虑超声速的含灰气体点源在纯气体的高超声速来流作用下所形成的定常流动。图 1 示出这种流动图像,其中含灰气体点源(载气相的质量流量 Q^* 恒定)位于点 O_1 处,纯气体的自由来流速度 V_∞^* 沿轴线 $O_2y_2^*$ 的负方向(下文中,凡需要与无量纲量区分时,我们采用 * 号表示有量纲量)。在来自点源的流动中将出现一个截止激波 1,而在自由来流中则会形成一个弓形激波 2,内外激波层由接触面 3 分开。假定在截止激波前方,气体 1 达到了最大速率 V_{\max}^* 而颗粒与载气相处于平衡,因此颗粒惯性是在激波阵面 1 后方开始显现的。我们在曲线坐标系 (x^*, y^*) 中研究颗粒的运动,这里 x^* 和 y^* 轴分别沿着和垂直截止激波曲面。对于弥散相,我们采用关于稀相含灰气体的一般假设^[7]:颗粒为不变形的球体,具有相同的直径 d 和质量 m ;布朗运动可忽略;体积分或质量浓度足够小,从而可以忽略颗粒的相互碰撞及其对载气相的影响。对于载气相,我们假定两种相撞的气体都是完全气体,它们的比热比 γ_1 和 γ_2 都是常数。

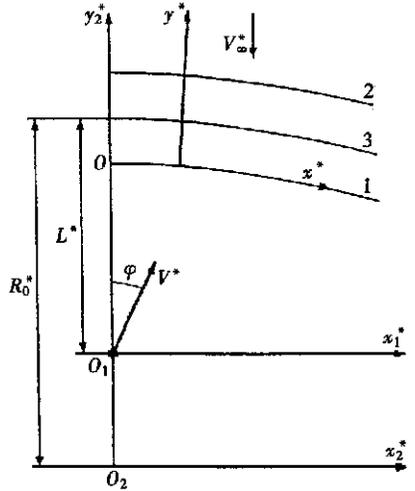


图 1 流动示意图

在这种单向耦合两相流动问题中,我们可以采用纯气体的薄激波层近似^[8]得到有关间断面几何形状的表达式:

(a) 点源到驻点的距离:

$$L^* = [((\gamma_1 + 1)/8\pi\gamma_1)^{1/2} Q^* V_{\max}^* / \rho_\infty^* V_\infty^{*2}]^{1/2}. \quad (1)$$

(b) 驻点处接触面的曲率半径:

$$R_0^* = 3L^* / 2. \quad (2)$$

(c) 激波层 1 的厚度:

$$\delta_1^* = \varepsilon_1 R_0^* (\sqrt{a} - b) / (a - b^2). \quad (3)$$

这里, $\varepsilon_1 = (v_{1c}^* / V_\infty^*) (\rho_{1c}^* / \rho_\infty^*)^{1/2}$, $a = 2$, $b = 0.5(\rho^*(0) / \rho_{1c}^*)^{-1/2}$; 其中下标 $1c$ 表示激波 1 后方对称轴处的参数,而 $\rho^*(0)$ 为激波 1 前方对称轴处气体密度。

(d) 激波层 2 的厚度:

$$\delta_2^* = \kappa_2 R_0^* / (1 + (8\kappa_2/3)^{1/2}), \quad (4)$$

这里 $\kappa_2 = (\gamma_2 - 1) / (\gamma_2 + 1)$ 。

(e) 极坐标 (r^*, φ) 中接触面的形状:

$$r^* = L^* \varphi / \sin \varphi. \quad (5)$$

类似地,我们可以依据高超声速流动理论^[9, 10],给定弓形激波和截止激波之间对称轴附近处气体参数的近似分析表达式(由于冗长而不在此处写出)。这样,余下的问题便是求解弥散相的流动特性。

为了便于求解颗粒参数(采用下标 s 表示),引进如下无量纲变量:

$$x = x^* / R_0^*, \quad y = y^* / \kappa_2 R_0^*, \quad R = R^* / R_0^*, \quad re = re^* / R_0^*,$$

$$u_s = u_s^* / V_\infty^*, v_s = v_s^* / V_\infty^*, T_s = T_s^* / T_{02}^*, \rho_s = \rho_s^* / \rho_s^*(0),$$

其中 T_{02}^* 为驻点温度, $\rho_s^*(0)$ 为激波 1 前方对称轴处固相密度。由于采用曲线坐标, 在控制方程中会出现曲率半径 $R(x)$ 和对称轴到激波 1 表面的距离 $r_e(x)$ 。

现考虑无量纲 Lagrange 坐标 (x_0, t) , 其中 x_0 为给定颗粒轨迹在激波 1 上的初始位置, 而 $t = t^* V_\infty^* / R_0^*$ 为颗粒从其初始位置开始的运动时间。在此坐标系下, 弥散相的运动和能量方程取下述形式:

$$\begin{cases} \frac{\partial x_s}{\partial t} = \frac{u_s}{1+H}, \quad \frac{\partial y_s}{\partial t} = \frac{v_s}{k_2}, \\ \frac{\partial u_s}{\partial t} = \beta \mu D (u - u_s) - \frac{u_s v_s}{RH}, \\ \frac{\partial v_s}{\partial t} = \beta \mu D (v - v_s) - \frac{u_s^2}{RH}, \\ \frac{\partial T_s}{\partial t} = \frac{2C}{3Pr} \beta \mu G (T - T_s), \end{cases} \quad (6)$$

其中, $H = 1 + k_{2y} / R$ 为 Lamé 系数, $\beta = 3\pi d \mu_{02}^* R_0^* / m V_\infty^*$ 为弛豫参数 (μ_{02}^* 为驻点处气体 2 的粘性系数), $C = c_{p2} / c_s$ 为气体 2 和颗粒材料的比热比, Pr 为气体 Prandtl 数, $\mu = \mu^* / \mu_{02}^*$ 为无量纲的气体粘性系数。本文假定气体粘性系数对温度的依赖关系为指数形式 $\mu = T^\omega$ 。此外, 方程(6) 中的 D 和 G 是相间动量和热量交换表达式的修正函数^[1]:

$$\begin{cases} D = \left[1 + \frac{1}{6} Re_s^{2/3} \right] \left[1 + \exp\left(-\frac{0.427}{Ma_s^{4.63}}\right) \right], \\ G = \left[1 + 0.3 Pr^{1/3} Re_s^{1/2} \right] \sqrt{\left[1 + 3.42 \frac{Ma_s}{Re_s} \frac{1 + 0.3 Pr^{1/3} Re_s^{1/2}}{Pr} \right]}, \end{cases} \quad (7)$$

其中, $Re_s = \rho^* |V^* - V_s^*| d / \mu^*$ 为颗粒滑移的 Reynolds 数, 而 Ma_s 为绕颗粒流动的 Mach 数。显然, 上述表达式计入了 Reynolds 数、Mach 数和 Knudsen 数有限性的影响。应当指出的是, 方程(6) 中的气相速度和温度 (u, v 和 T) 要按照类似于颗粒的方式无量纲化, 而气体密度 ρ^* 则参照 ρ_∞^* 无量纲化。

2 Lagrange 方法

在 Euler 曲线坐标系 (x, y) 中, 弥散相的连续方程可写为:

$$\frac{\partial(\rho_s u_s r_e)}{\partial x} + \frac{1}{k_2} \frac{\partial(\rho_s v_s r_e H)}{\partial y} = 0; \quad (8)$$

而在 Lagrange 坐标 (x_0, t) 下, 该连续方程变为:

$$\rho_s(x_0, t) |J| = \frac{r_e(x_0)}{r_e(x_s, y_s)} \rho_s(x_0, 0), \quad (9)$$

这里, J 为从 Euler 坐标变换到 Lagrange 坐标的 Jacobi 行列式:

$$J = \left[1 + \frac{k_2 y_s}{R} \right] \frac{v_s(x_0, t)}{v_s(x_0, 0)} \frac{\partial x_s(x_0, t)}{\partial x_0} - \frac{u_s(x_0, t)}{v_s(x_0, 0)} \frac{\partial y_s(x_0, t)}{\partial x_0}. \quad (10)$$

方程(9) 给出了沿着一条固定的颗粒轨道 ($x_s(x_0, t), y_s(x_0, t)$), 弥散相密度的初始值 $\rho_s(x_0, 0)$ 和当前值 $\rho_s(x_0, t)$ 之间的关系。为了计算任意时刻的颗粒浓度, 我们应当确定式(10) 中的函数 $\partial x_s(x_0, t) / \partial x_0$ 和 $\partial y_s(x_0, t) / \partial x_0$ 。这可以通过对方程(6) 中前 4 个方程求偏导数来求得:

$$\frac{\partial W_1(x_0, t)}{\partial t} = \frac{W_2}{H} + \frac{k_2 u_s (y_s R' - R W_3)}{R^2 H^2}, \quad (11a)$$

$$\frac{\partial W_2(x_0, t)}{\partial t} = \beta \mu G \left[W_1 \frac{\partial u}{\partial x} + W_3 \frac{\partial u}{\partial y} - W_2 \right] + \beta (u - u_s) (\mu G)' - \frac{u_s W_4 + v_s W_2}{RH} + \frac{u_s v_s (R' + \kappa_2 W_3)}{R^2 H^2}, \quad (11b)$$

$$\frac{\partial W_3(x_0, t)}{\partial t} = \frac{W_4}{\kappa_2}, \quad (11c)$$

$$\frac{\partial W_4(x_0, t)}{\partial t} = \beta \mu G \left[W_1 \frac{\partial v}{\partial x} + W_3 \frac{\partial v}{\partial y} - W_4 \right] + \beta (v - v_s) (\mu G)' + \frac{2u_s W_2}{RH} - \frac{u_s^2 (R' + \kappa_2 W_3)}{R^2 H^2}, \quad (11d)$$

这里上标'表示对 x_0 求导数。此外, W 函数的定义如下:

$$W_1 = \frac{\partial x_s(x_0, t)}{\partial x_0}, \quad W_2 = \frac{\partial u_s(x_0, t)}{\partial x_0}, \quad W_3 = \frac{\partial y_s(x_0, t)}{\partial x_0}, \quad W_4 = \frac{\partial v_s(x_0, t)}{\partial x_0}.$$

这样, 确定弥散相参数的问题就简化为对于不同的初始值 x_0 求解一组常微分方程(6)、(11)和关系式(10)。为了完成计算, 首先要按照前面所述的薄激波层近似理论方法, 求得所需的气相参数及其空间导数。基于含灰气体点源流动处于平衡的假定, 我们可以给出对称轴附近截止激波处的初始条件如下:

$$t = 0: x_s = x_0, \quad y_s = 0, \quad u_s = 0.5x_0(\rho(0))^{-1/2}, \quad v_s = (\rho(0))^{-1/2},$$

$$T_s = T(0), \quad W_1 = 1, \quad W_2 = 0.5(\rho(0))^{-1/2}, \quad W_3 = W_4 = 0, \quad \rho_s = 1,$$

这里 $\rho(0)$ 和 $T(0)$ 为截止激波前方的无量纲气体密度和温度。此外, 我们可由式(5)得到对于小的 x_0 值有 $R(x_0) = 1 + 1.5x_0^2$ 。

3 数值结果

从方程(6)可知, 颗粒相的相似准则为 β 、 Rb 、 c_{p1}/c_s 、 c_{p2}/c_s 和 Pr , 这里 $Rb = Re_0^{2/3}/6$, 而 $Re_0 = \rho_\infty^* V_\infty^* d / \mu_{02}^*$ 是基于颗粒直径的自由来流 Reynolds 数。问题(6)、(10)和(11)的数值计算是采用 Kutta_Merson 方法完成的, 其中流动介质的性质为: $\gamma_1 = \gamma_2 = 1.4$, $c_{p1}/c_{p2} = 1$, $\mu_{01}^*/\mu_{02}^* = 1$, $\omega_1 = \omega_2 = 0.5$, $c_{p1}/c_s = c_{p2}/c_s = 1$ 以及 $Pr = 2/3$ 。沿着截止激波的母线, 计算域取为 $0 \leq x \leq 0.4$ (即对称轴附近)。

图2中示出了 $Rb = 100$ 时, 气体和颗粒运动情况, 其中的实线1和2分别表示接触面和弓形激波。计算的气体流线(虚线)表明: 由于自由来流与点源流动的相互作用, 气体1和2均发生偏移并向侧面流去; 但是, 由于惯性效应, 颗粒不能立即跟随载气相在激波层内运动的变化。例如, 重粒子可能穿越接触面甚至运动到弓形激波外。在我们的问题中, 弥散相和载气相之间的速度滑移和温度跳跃首先在截止激波的后方出现。在这种非平衡状态下, 颗粒必然与气体交换动量和能量。对于大惯性颗粒, 完成相间弛豫过程需要相当长的时间。我们的计算对惯性参数 β 选择了两个典型值: $\beta = 0.01$ (大惯性颗粒)和 $\beta = 1$ (小惯性颗粒)。计算的轨迹表明了颗粒可能出现两类运动: 振荡型(曲线3, $\beta = 0.01$)和单调型(曲线4, $\beta = 1$)。

类似地, 当惯性参数不同时, 颗粒的热力学行为也呈现不同的特征。图3画出了沿对称轴运动颗粒的温度随时间变化历程, 这里 $Rb = 100$ 而 $\beta = 0.01$ (曲线1)或 $\beta = 1$ (曲线2)。我们的计算中, 来流的驻点温度高于点源流温度, 因此冷粒子进入激波层后将被加热。根据前面轨迹计算结果可知, 重粒子可以进入外激波层而轻粒子仅在内激波层中运动。因此重粒子可以达到更高的温度并趋于驻点温度。此外, 颗粒加热速率也依赖于轨迹类型。对于振荡运动的颗粒,

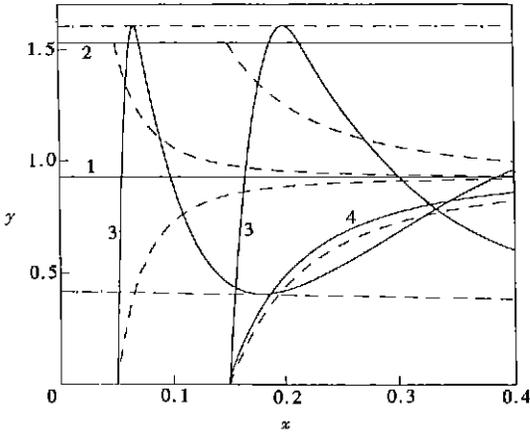


图2 气体流线以及颗粒轨迹

在轨迹的不同区段(相应于激波层1或2以及外部气流或内部气流)有着不同的加热速率(参见曲线1)• 与此相反,单调运动的颗粒仅出现在激波层1中,因而其加热速率几乎恒定不变(参见曲线2)•

如前所述,将方程(6)和(11)的解代入关系式(10)便可确定颗粒浓度• 对于 $Rb = 100$ 和 $\beta = 0.01$ 的情况,图4画出了与 $x = \text{const}$ 相交发生在下述情况时三股颗粒微团的密度:

(a) 第一个转折点之前,参见曲线1 ($x = 0, 0.1, 0.4$); (b) 在第一个转折点之后但第二个转折点之前,参见曲线2 ($x = 0, 0.1$) 以及曲线4 ($x = 0.4$); (c) 在第二个转折点之后但第三个转折点之前,参见曲线3 ($x = 0$) 以及曲线5 ($x = 0.4$)• 每个截面处的总密度等于各股颗粒微团密度之和,计算表明了其它颗粒微团对总密度的贡献可忽略不计• 从图4可以看出,颗粒分布具有高、低密度层交错出现的分层结构,而且在轨迹包络线附近颗粒浓度趋于无限大• 为了解释颗粒聚集的机制,我们首先考虑振荡型颗粒运动• 从图2可以看到,大惯性颗粒发生振荡并且与接触面交叉若干次• 在转折点处,颗粒的法向速度变为零,从而造成其密度趋于无限大• 换言之,颗粒将在轨迹包络线(图2中点划线所示)附近聚集• 此外,由于在这两个聚集区之间出现颗粒轨迹的多重交叉现象,这样就难以采用 Euler 方法计算该区域中颗粒参数• 本文所发展的 Lagrange 方法则可以克服弥散相参数非唯一性所带来的困难• 当然,应当注意到接触面附近也是一个颗粒聚集区域• 这种聚集区对两类颗粒运动情况均可以存在• 但是对于单调型运动来说,它是唯一可能的聚集机制• 显然,接触面附近的聚集效应要比轨迹包络线附近的弱一些,其原因是接触面附近的颗粒法向速度并非为零(除非在 $x \rightarrow \infty$ 处)• 与多重聚集情况比较,在区间 $Rb \in [0, 100]$ 上,接触面附近存在单级聚集区的惯性参数 β 范围则要宽得多•

4 结 论

本文发展了一种新颖的计算颗粒浓度的 Lagrange 方法,它可以用来预报纯气体高超声速

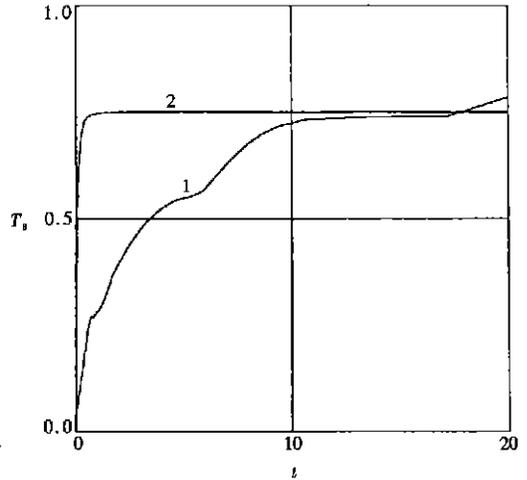


图3 沿对称轴的颗粒温度

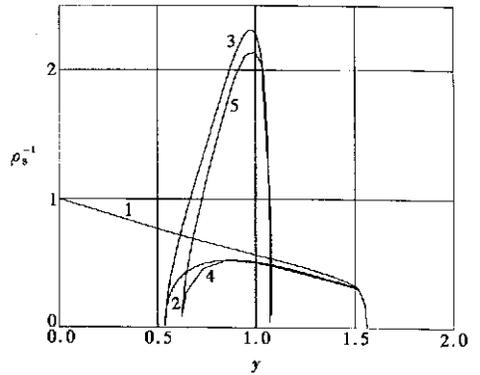


图4 颗粒浓度分布

来流与含灰气体点源的超声速流相遇时对称轴附近的流动结构。本文计算揭示了在弓形激波和截止激波之间存在着颗粒轨迹多重交叉区,表明了颗粒分布形成了高、低密度层交错出现的多层结构。弥散相在激波层中急剧聚集和分层现象对于解释慧星大气实验数据等自然现象及相关工程问题具有重要意义。

[参 考 文 献]

[1] Wang B Y, Osipov A N, Teverovskii M A. Dynamics of dusty gas flow in the vicinity of a point source in a supersonic flow. *Journal of Applied Mechanics*, 1992, (4): 60—66.

[2] Marble F. Dynamics of dusty gases[J]. *Ann Rev Fluid Mech*, 1970, 2: 397—446.

[3] Crowe C T. Review—numerical models for dilute gas particle flows[J]. *Trans ASME, J Fluids Engineering*, 1982, 104(3): 297—303.

[4] Crowe C T, Troutt T R, Chung J N. Numerical models for two phase turbulent flows[J]. *Ann Rev Fluid Mech*, 1996, 28: 11—43.

[5] Wang B Y, Osipov A N, Teverovskii M A. Numerical simulation of dusty gas flow in the vicinity of a point source in a supersonic flow. *Journal of Applied Mechanics*, 1998, (6): 80—87.

[6] Healy D P, Young J B. Calculating of inertial particle transport using the Osiptsov Lagrangian method [A]. In: *Fourth International Conference on Multiphase Flow, ICMF 2001* [C]. New Orleans, May 27—June 1, 2001, 1—12.

[7] Rudinger G. *Fundamentals of Gas-Particles Flow* [M]. Amsterdam: Elsevier, 1980.

[8] Wang B Y, Osipov A N, Teverovskii M A. Numerical simulation of dusty gas flow in the vicinity of a point source in a supersonic flow. *Journal of Applied Mechanics*, 1995, (1): 1—12.

[9] Wang B Y, Osipov A N, Teverovskii M A. Numerical simulation of dusty gas flow in the vicinity of a point source in a supersonic flow. *Journal of Applied Mechanics*, 1975, (1): 1—12.

[10] Hayes W D, Probst R F. *Hypersonic Flow Theory* [M]. New York: Academic Press, 1959.

[11] Carlson D J, Hoglund R F. Particle drag and heat transfer in rocket nozzles [J]. *AIAA Journal*, 1964, 2(6): 1980—1984.

Flow Properties of a Dusty_Gas Point Source in a Supersonic Free Stream

WANG Bo_yi¹, Alexander N. Osipov², Misha A. Teverovskii²

(1. LNM, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, P. R. China;

2. Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University,
Moscow 119899, Russia)

Abstract: By using Lagrangian method, the flow properties of a dusty_gas point source in a supersonic free stream were studied and the particle parameters in the near_symmetry_axis region were obtained. It is demonstrated that fairly inertial particles travel along oscillating and intersecting trajectories between the bow and termination shock waves. In this region, formation of “multi_layer structure” in particle distribution with alternating low_and_high_density layers is revealed. Moreover, sharp accumulation of particles occurs near the envelopes of particle trajectories.

Key words: dusty gas; supersonic flow; point source; particle inertia; trajectory intersection; multi_layer structure