应用数学和力学, 第 24 卷 第 8 期(2003 年 8 月
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2003 08_0839_10

水平集方法与距离函数*

王德军[1], 唐 云[2], 于洪川[1], 唐泽圣[1]

(1. 清华大学 计算机科学与技术系, 北京 100084;
2. 清华大学 数学科学系, 北京 100084

(戴世强推荐

摘要: 讨论了有关水平集方法的基本问题, 如保持为距离函数的方法, 水平集方程解的存在性和唯一性• 主要贡献是证明了, 在距离函数约束下, 水平集方程在初始零水平集附近有唯一解, 它是关于演化界面的有向距离函数• 并且用到了一些处理技巧: 如注意到原始方程的任意解都是距离函数, 将原始方程变化为另一简单形式• 由于新的方程组不是一个经典方程组, 则它被变换为一个普通形式, 其中隐函数方法被采用•

关 键 词: 水平集方法; 距离函数; 解的存在性和唯一性
中图分类号: O175.29 文献标识码: A

引 言

水平集方法主要是从界面传播等研究领域中逐步发展起来的, 它是处理封闭运动界面随时间演化过程中几何拓扑变化的有效的计算工具• Osher 和 Sethian[1] 首先提出依赖时间的运动界面的水平集描述, 其主要思想是引入水平集函数 $\phi: R^n \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, 将移动的界面 $S \subset R^n$ 作为零水平集嵌入高一维的水平集函数中• 在演化过程中, 演化曲面总是对应零水平集, 只要确定零水平集即可确定移动界面演化的位置• 这种方法自提出以来, 已在界面演化、流体力学、燃烧、图象处理、材料力学等领域[2~5] 得到广泛的应用•

考虑一族闭超曲面 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{p}, t) \in R^3$, 其中 $\boldsymbol{p}$ 是曲面参数 $\boldsymbol{p} = (p_1, \cdots, p_k)$, t 是时间参数• 根据欧最短流理论, 有

$$\frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial t} = \beta \boldsymbol{N},$$

初始条件为 $\boldsymbol{S}|_{t=0} = \boldsymbol{S}_0$, 其中 $\boldsymbol{N}$ 为演化曲面 $\boldsymbol{S}$ 的法向量, β 是速度函数, $\boldsymbol{S}_0$ 是初始闭曲面• 水平集方法的本质是引入水平集函数, $\phi: R^n \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, 它是演化界面的隐函数, $\forall t$, $\phi(\boldsymbol{S}, t) = 0$• 初始函数 ϕ_0 定义为相对于 $\boldsymbol{S}_0$ 的有向距离函数• 通常希望水平集方法能保证水平集方程在演化过程中, 水平集函数始终保持为相对于演化界面的有向距离函数•

遗憾的是, 以往的水平集方法并不能保证在演化过程中, 水平集方程的解保持为演化界面

* 收稿日期: 2001_11_27; 修订日期: 2003_05_06
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60011619 42, 60203003
作者简介: 王德军(1979— , 男, 江西人, 硕士, 主要研究医学体数据的三维分类与分割, 水平集方法和三维数据场可视化等(E_mail: wangdj@samsung.co.kr •

的距离函数, 这导致该方法在某些应用中的失败, 诸如成对曲面进化(coupled surfaces propagation[6]等问题• 通常的水平集函数 ϕ 并不保持为相对于演化界面的有向距离函数, 这无论在理论上还是在实践中都是水平集方法的缺陷• Faugeras 等人[7]对这一问题作了详细的总结•

事实上, 当初始零水平集不在所要检测物体边界上时, 演化过程中边界上任意一点的 $|\nabla\phi|$ 将变得越来越大, 显然水平集函数不保持为距离函数• 由于在物体边界上任意点的水平集函数是不变的, 则零水平集随时间演化将不会达到物体边界• 包括零水平集在内, 每一个水平集在以往的水平集方法中都将按着各自的能量最小原理演化, 这自然会导致水平集函数不再保持为相对于零水平集的距离函数•

目前, 已经提出有关水平集函数保持为演化界面距离函数的水平集方法• Faugeras 等人[7]提出距离函数约束可表示为 $|\nabla\phi| = 1$• 通常水平集方程组可写为

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = B,\quad B|_{\phi=0} = \beta,\quad \phi(\cdot, 0) = \mathrm{dist}(\cdot, \boldsymbol{S}_0),$$

给出了该方程组的解保持为距离函数的充要条件 $\nabla\phi\cdot\nabla B = 0$•

相似地, Sethian[8]考虑如下水平集方程组

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = F|\nabla\phi|,\quad F|_{\phi=0} = f,\quad \phi(\cdot, 0) = \mathrm{dist}(\cdot, \boldsymbol{S}_0),$$

提出该方程组的解保持为距离函数的充要条件为 $\nabla\phi\cdot\nabla F = 0$• 遗憾的是该充要条件缺少数学证明•

仔细研究以上的结果, 不难发现它们都是建立在水平集方程组有唯一解这一前提上• 而以上水平集方程组并不是普通经典 PDE 问题, 它们解的存在性和唯一性需要被严格证明, 但这些基础性问题却一直被以往研究者所忽略• 我们将面对以下几个问题: 解的存在性和唯一性在无法保证情况下, 水平集方程是否还保持距离函数? 是否有其他的改进方法等• 这些问题需要进一步分析和解决•

本文中, 以上问题被详细研究• 我们将证明如果保持距离函数的水平集方程有解, 则解一定是相对于演化界面的有向距离函数• 并且在初始零水平集附近方程组的解是唯一的• 这些结论解决了被以往研究者所忽略的有关水平集方法的基本问题, 并成为水平集方法研究的理论基础•

在以上分析中, 一些技巧性方法被采用• 原始的水平集方程有两个未知变量, 求解困难• 考虑到原始方程组的解一定是距离函数, 它被转换为另一表示形式, 即只含有水平集函数一个未知变量• 而新的方程组不是一个经典问题, 为了将其变换成简单形式, 隐函数方法被采用•

在第 1 节中, 将证明保持距离函数约束的水平集方程的解保持为距离函数• 在第 2 节中, 将建立起保持距离函数约束的水平集方程有唯一解的条件• 在第 3 节中, 给出二维情形的证明• 第 4 节中是一些结论和展望•

1 水平集方程保持距离函数

考虑如下系统,

$$\begin{cases} \phi_t + F|\nabla\phi| = 0, & (1\mathrm{a}) \\ \nabla F\cdot\nabla\phi = 0, & (1\mathrm{b}) \\ \phi(\boldsymbol{x}, t)|_{t=0} = \mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{S}_0), & (1\mathrm{c}) \\ F|_{\{\boldsymbol{x}|\phi(\boldsymbol{x},t)=0\}} = -f(\boldsymbol{x}), & (1\mathrm{d}) \end{cases}$$

其中, $F: R^n \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ 为速度函数, S_0 为 R^n 中给定的封闭超曲面, $f(\boldsymbol{x})$ 为已知函数, $\mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, S_0)$ 为 $\boldsymbol{x}$ 相对于 S_0 的有向距离函数(通常当 $\boldsymbol{x}$ 在 S_0 内部时取负, 当 $\boldsymbol{x}$ 在 S_0 外部时取正)• (ϕ, F) 为待求量• 其中, $F: R^n \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ 为速度函数• 不失一般性, 假设(1) 的解 ϕ 足够光滑, 乃至解析, 我们先给出以下定理:

定理 1. 1 若方程组(1 存在解 (ϕ, F), 则对于任意 $\boldsymbol{x}$ 和 $t \geqslant 0$ 满足 $|\nabla\phi| = 1$, 且 $F = -\phi_t$•

证明 首先我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\nabla\phi|^2 = 2\nabla\phi \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\nabla\phi) = -2\nabla\phi \cdot \nabla|\nabla\phi| F \cdot \tag{2}$$

它将在以下证明中用到•

由(1c 有 $|\nabla\phi(\boldsymbol{x}, 0)| = 1$• 我们先证明对于任意 $\boldsymbol{x}$ 和 t 都有 $|\nabla\phi| = 1$• 若结论不成立, 存在 $t^* > 0$ 和 $\boldsymbol{x}_0$, 使得 $|\nabla\phi(\boldsymbol{x}_0, t^*)| \neq 1$• 令

$$t_0 = \sup\left\{t \geqslant 0 \,\Big|\, |\nabla\phi(\boldsymbol{x}, t)| = 1, \forall x\right\}, \tag{3}$$

显然 $0 \leqslant t_0 \leqslant t^*$•

由于 ϕ 是足够光滑的, $|\nabla\phi(\boldsymbol{x}, t)|$ 在 $t = t_0$ 附近对 t 进行 Taylor 展开,

$$|\nabla\phi(\boldsymbol{x}, t)| = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i(\boldsymbol{x})(t - t_0)^i \cdot \tag{4}$$

同样我们有

$$G(\boldsymbol{x}, t) := -F\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(\boldsymbol{x})(t - t_0)^i \cdot \tag{5}$$

由于在 $t = t_0$ 附近 $|\nabla\phi| \neq 0$, 于是(2 可化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\nabla\phi| = -F\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \cdot \nabla|\nabla\phi| = G(\boldsymbol{x}, t) \cdot \nabla|\nabla\phi|, \tag{6}$$

将(4 和(5 代入(6 得

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i(\boldsymbol{x}) i (t - t_0)^{i-1} = \sum_{i \geqslant 1} G(\boldsymbol{x}, t) \cdot \nabla a_i(\boldsymbol{x})(t - t_0)^i \cdot \tag{7}$$

比较(7 两边 $(t - t_0)^0$ 可以得知 $a_1(\boldsymbol{x}) = 0$•

采用数学归纳法, 来证明 $a_i(\boldsymbol{x}) \equiv 0, \forall i \geqslant 1$• 首先我们有 $a_1(\boldsymbol{x}) \equiv 0$• 设对所有 $i \leqslant k - 1$, $a_i(\boldsymbol{x}) \equiv 0$, 考虑 $(t - t_0)^{k-1}$ 的系数• (7) 左边系数是 $k a_k(\boldsymbol{x})$, 右边系数是

$$\sum_{i=0}^{k-1} g_i(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla a_{k-1-i} = 0,$$

则 $a_k(\boldsymbol{x}) \equiv 0$• 所以对于任意 $i \geqslant 1$, $a_i(\boldsymbol{x}) \equiv 0$• 由于 $|\nabla\phi|$ 在 $t = t_0$ 附近解析, 因而有 $\delta > 0$ 使对任一 $t \in [t_0, t_0 + \delta]$, $|\nabla\phi(\boldsymbol{x}, t)| \equiv 1$• 这与(3) 假设相矛盾, 因而命题成立• 又由(1a) 知 $\phi_t = -F$, 得证•

注 由(1b 可知 ϕ 和 F 的函数特征线是正交的, 由于距离函数的特征线是直线, 因而定理 1. 1 表明 F 沿 ϕ 的函数特征线是不变的• 假设两条直线在 S_0 上交于某一点 C, 则 ϕ 的函数特征线上任意一点速度函数均取值为 $F = -f(C)$• 需要指出的是定理 1. 1 是在方程组(1 解存在的假设条件下获得的• 事实上, 在水平集方法应用中方程组(1 解的存在性和唯一性需要被系统地研究•

2 水平集方程解的存在性和唯一性

首先, 为了降低问题难度, 我们引入方程组(1 的另一个表达形式• 然后将分析该等价形

式解的存在性和唯一性• 解的存在性和唯一性分析被分为两部分, 首先是一维情形, 然后是二维情形• 后者的证明过长, 将在下一部分中给出•

2.1 方程组(1)的另一表达形式

首先, 为了降低问题难度, 我们需要将方程组(1 变换为另一形式, 它可表达为

$$\begin{cases} |\nabla\phi| = 1, & (8a)\\ \left.\dfrac{\partial\phi}{\partial t}\right|_{\langle \boldsymbol{x} | \phi(\boldsymbol{x},t)=0\rangle} = f(\boldsymbol{x}), & (8b)\\ \phi(\boldsymbol{x},0) = \mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{S}_0)\bullet & (8c)\end{cases}$$

与方程组(1 相比, 方程组(8 仅包含一个未知量 ϕ• 显然后者比前者容易, 我们有以下引理:

引理 2.1 方程组(1 与(8 的解相同•

证明 我们首先证明方程组(1 的解满足方程组(8• 设 ϕ 为方程组(1) 的解, 由定理 1.1 知 ϕ 满足(8a)• 由(1a 和(1c) 有 $\phi_t = -F$, 和 $\phi_t|_{\langle \boldsymbol{x}|\phi(\boldsymbol{x},t)=0\rangle} = f(\boldsymbol{x})$, 故解 ϕ 满足(8b)• 而且解 ϕ 满足(8c), 于是 ϕ 满足方程组(8•

再设 ϕ 为方程组(8) 的解, 以下证明方程组(8) 的解满足(1)• 令 $F = -\phi_t$, 有 $\phi_t + F|\nabla\phi| = 0$, 则解 ϕ 满足(1a)• 由 $\nabla F\bullet\nabla\phi = \nabla(-\phi_t)\bullet\nabla\phi = -(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)|\nabla\phi|^2$ 和(8a), 知 $\nabla F\bullet\nabla\phi = 0$, 则解 ϕ 满足(1b)• 又由 $F|_{\langle \boldsymbol{x}|\phi(\boldsymbol{x},t)=0\rangle} = -f(\boldsymbol{x})$, 则解 ϕ 满足(1c)• 而且解显然满足(1d)• 因此方程组(8) 的解 ϕ 也为(1 的解• 证毕•

注 方程组(1 和(8 有同样的性质, 在以下讨论中我们将研究方程组(8 解的存在性和唯一性•

2.2 一维情形分析

考虑一维情形, 令 $x \in R^1$, 方程组(8 可表示为,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\phi}{\partial x} = 1, & (9a)\\ \left.\dfrac{\partial\phi}{\partial t}\right|_{\langle x|\phi(x,t)=0\rangle} = f(x), & (9b)\\ \phi(x,0) = x - x_0, & (9c)\end{cases}$$

其中 x_0 是已知的, $f(x)$ 是有界且足够光滑• 我们有下述定理:

定理 2.1 对于方程组(9, 解 $\phi(x,t) \in \mathbf{R}$, $(x,t) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}$, 存在且唯一•

证明 由 $\partial\phi/\partial x = 1$, 我们有 $\partial(\phi - x)/\partial x = 0$, 可知 $\phi(x,t) - x = H(t)$• 我们来确定函数 $H(t)$•

首先因 $\phi(x,t) = 0$, 我们有 $x = -H(t)$• 由(9b), $H'(t) = f(-H(t))$, 则由(9c), $\phi(x,t)|_{t=0} = x - x_0$, 有 $H(0) = -x_0$• 于是我们得到一个常微分方程初值问题

$$H'(t) = f(-H(t)),\quad H(t)|_{t=0} = -x_0, \tag{10}$$

由于 $f(x)$ 有界, 根据文献[9], 我们知道(10) 存在唯一的全局解 $H(t)$, $\forall t \in \mathbf{R}^+$•

于是, 我们得到 $\phi(x,t) = x + H(t)$ 为方程组(9 的唯一解• 证毕•

注 对于 $x \in R^1$, 方程组(9) 有唯一的解• 但对于 $n > 1$ 且 $\boldsymbol{x} \in R^n$, 方程组(8) 的解将更加复杂• 在以下讨论中我们考察方程组(8) 在初始零水平集 S_0 附近解的情形, 其中 $\boldsymbol{x} \in R^2$•

2.3 二维情形分析

令 $\boldsymbol{x} = (x, y)^{\mathrm{T}} \in R^2$, 方程组(8 可被写为

$$\begin{cases} |\nabla\phi| = 1, & (11\mathrm{a}) \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial t}\Big|_{\{(x,y)\mid\phi(x,y,t)=0\}} = F(x,y), & (11\mathrm{b}) \\ \phi(x,y,t)\mid_{t=0} = \mathrm{dist}((x,y),S_0). & (11\mathrm{c}) \end{cases}$$

其中 $F(x,y)\neq 0$ 是足够光滑乃至解析. 由于零水平集 $\{(x,y)\mid\phi(x,y,t)=0\}$ 是未知的, 方程组(11) 不是一个经典 PDE 问题. 我们需要将它们转化为一般方程组. 不失一般性, 假定 $F(x,y)>0$, 有

定理 2. 2 在 S_0 附近方程组(11) 存在唯一解 ϕ.

该定理的证明过长, 我们将在下一节中给出.

3 定理 2. 2 的证明

为了证明定理 2. 2, 我们首先给出以下引理:

引理 3. 1 如果方程组(11 存在解 $\phi(x,y,t)$, 则在 S_0 附近存在 $t=\varphi(x,y)$ 满足 $\phi(x,y,t)=0$, 并且

$$|\nabla\varphi(x,y)|\cdot F(x,y)=1,\quad \varphi|_{(x,y)\in S_0}=0.$$

证明 设方程组(11 存在解 $\phi(x,y,t)$, 由(11a) 知

$$\nabla\phi\cdot\nabla\phi_t=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\nabla\phi|^2=0,$$

其中 ϕ 为到零水平集的有向距离函数, 并且其特征线为零水平集上某点的切线方向. 而 ϕ_t 的特征线为零水平集上某点的法线方向. 因此, 对任一 t 和任一 $A(x,y)$, 在零水平集上存在点 $B(x^*,y^*)$, 使得 $\overrightarrow{AB}$ 连线为 B 点所在的法线. 所以有,

$$\phi_t(x,y)=\phi_t(x^*,y^*)=F(x^*,y^*)>0.$$

对于 $\phi(x,y,t)=0$ 应用隐函数定理, 存在 $t=\varphi(x,y)$ 满足 $\phi(x,y,\varphi(x,y))=0$. 取微分后有

$$\phi_x+\phi_t\cdot\varphi_x=0,\quad \phi_y+\phi_t\cdot\varphi_y=0.$$

故 $(\varphi_x^2+\varphi_y^2)\phi_t^2=\phi_x^2+\phi_y^2=1$ 且 $|\nabla\varphi|F=1$, 即 $|\nabla\varphi(x,y)|=1/F(x,y)$. 由于 $\phi(x,y,0)|_{(x,y)\in S_0}=0$, $\phi(x,y,\varphi(x,y))|_{(x,y)\in S_0}=0$, 并且 $\phi_t\neq 0$, 根据隐函数定理, 有 $\varphi(x,y)|_{(x,y)\in S_0}=0$. 因此 φ 满足

$$|\nabla\varphi(x,y)|=\frac{1}{F(x,y)},\quad \varphi|_{(x,y)\in S_0}=0. \qquad (12$$

证毕.

注 以上的分析仅是解存在的必要条件.

引理 3. 2 方程组(12 存在唯一的解.

证明 现在讨论方程组(12 解 φ 的存在性和唯一性. 首先引进Hamilton 系统, 命 $p=\varphi_x$, $q=\varphi_y$, 为了参数化 $x=x(s)$, $y=y(s)$, 设

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=p,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=q. \qquad (13\mathrm{a, b}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\varphi_x=\varphi_{xx}x_s+\varphi_{xy}y_s=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\varphi_x^2+\varphi_y^2)=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{F(x,y)}\right), \qquad (14\mathrm{a}$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{f(x,y)}\right)\cdot \tag{14b}$$

初值被确定为

$$(x(0), y(0), p(0), q(0)) = (x_0, y_0, p_0, q_0), \tag{15a}$$

其中 $(x_0, y_0) \in S_0$ · 有 $p_0 = \varphi_x(x_0, y_0)$, $q_0 = \varphi_y(x_0, y_0)$ · 由于 $\phi(x, y, \varphi(x, y)) = 0$ 并且

$$\begin{cases} \phi_x + \phi_t\varphi_x = 0, \\ \phi_y + \phi_t\varphi_y = 0, \end{cases}$$

有

$$\begin{cases} \varphi_x\mid_{(x,y)\in S_0} = -\left.\dfrac{\phi_x}{\phi_t}\right|_{t=0}, \\ \varphi_y\mid_{(x,y)\in S_0} = -\left.\dfrac{\phi_y}{\phi_t}\right|_{t=0}, \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} \varphi_x(x_0, y_0) = \dfrac{-\phi_x(x_0, y_0, 0)}{\phi_t(x_0, y_0, 0)}, \\ \varphi_y(x_0, y_0) = \dfrac{-\phi_y(x_0, y_0, 0)}{\phi_t(x_0, y_0, 0)}\cdot \end{cases}$$

则

$$\begin{cases} \varphi_x(x_0, y_0) = \dfrac{-\phi_x(x_0, y_0, 0)}{f(x_0, y_0)}, \\ \varphi_y(x_0, y_0) = \dfrac{-\phi_y(x_0, y_0, 0)}{f(x_0, y_0)}\cdot \end{cases} \tag{15b}$$

可见方程组(13)和(14)中 p, q, x, y 的初值由(15)确定·

由(13)和(15),便得出唯一解 φ, 即

$$\begin{cases} x = x(s), \quad y = y(s), \\ p = p(s) = \varphi_x(x(s), y(s)), \\ q = q(s) = \varphi_y(x(s), y(s))\cdot \end{cases}$$

由于 $\varphi_x \cdot x_s + \varphi_y \cdot y_s = p^2 + q^2 = 1/f^2 > 0$, 解 φ 横截穿过 S_0· 由 $\varphi\mid_{S_0} = 0$, 有

$$\varphi(x(s), y(s)) = \int_0^s \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}s = \int_0^s (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\,\mathrm{d}s = \int_0^s \frac{\mathrm{d}s}{f^2(x(s), y(s))},$$

则在初始零水平集 S_0 附近存在唯一解 φ· 证毕·

定理 3.1 在初始零水平集 S_0 附近, 方程组(11)存在唯一的解·

证明 若方程组(11)有解 ϕ, 由引理 3.1, 则存在 $\varphi(x, y)$ 使当 $t = \varphi(x, y)$, $\phi(x, y, t) = 0$, 根据引理 3.2 知它是唯一解, 即

$$\phi(x, y, \varphi(x, y)) \equiv 0, \tag{16}$$

由(16), $\phi(x, y, t)$ 可写成

$$\phi(x, y, t) = (t - \varphi(x, y))A(x, y, t)\cdot \tag{17}$$

为了确定 $\phi(x, y, t)$, 则需要确定 $A(x, y)$· 我们指出方程组(11)有以下形式,

$$\phi_x^2 + \phi_y^2 = 1, \quad \phi\mid_{t=0} = \mathrm{dist}((x, y), S_0), \quad \phi_t\mid_{\langle (x,y)\mid \phi(x,y,t)=0\rangle} > 0, \tag{18a, b, c}$$

原因如下:

方程组(11)的解显然满足方程组(18)· (18a)等价于(11a),且(18b)等价于(11c)· 由

$$\phi_t\cdot\varphi_x+\phi_x=0,\quad \phi_t\cdot\varphi_y+\phi_y=0,$$

得

$$\phi_t^2\cdot(\varphi_x^2+\varphi_y^2)=(\phi_x^2+\phi_y^2)=1,\ 和\ \phi_t^2=|\nabla\varphi|^{-2}=F^2\cdot$$

在 S_0 曲面上, 有 $\phi_t>0$ 和 $F>0$. 根据函数连续性, 有 $\phi_t|_{\langle(x,y)|\phi(x,y,t)=0\rangle}=F$, 则解 ϕ 满足式(11b), 即满足方程组(18) 的解必(11b). 因此方程组(11) 和(18) 是等价的.

在(18 条件下, 需要通过解方程(17 来获得 $A(x,y,t)$. 假定 $A(x,y,t)$ 在 $t=0$ 附近作 Taylor 展开, 即 $A(x,y,t)=\sum_{i\geqslant0}A_i(x,y)t^i$. 代入(17), 分别对 x 和 y 求导有

$$\begin{cases}\phi_x=-\varphi_x\sum_{i\geqslant0}A_i(x,y)t^i+(t-\varphi(x,y))\cdot\sum_{i\geqslant0}\frac{\partial A_i(x,y)}{\partial x}t^i,\\ \phi_y=-\varphi_y\sum_{i\geqslant0}A_i(x,y)t^i+(t-\varphi(x,y))\cdot\sum_{i\geqslant0}\frac{\partial A_i(x,y)}{\partial y}t^i\cdot\end{cases}$$

由于 $\phi_{t=0}=f_0$, 有 $-A_0\varphi=f_0$, 则

$$A_0=\begin{cases}-\frac{f_0}{\varphi} & 当(x,y)\notin S_0,\\ \lim\limits_{(x',y')\to(x,y)}\frac{-f_0}{\varphi} & 当(x,y)\in S_0,\end{cases}$$

其中极限的存在性在下面证明. 根据方程(16 的解和(18b 有以下方程

$$\phi(x,y,\varphi(x,y))=0,\quad \phi(x,y,0)=f_0,$$

二者相减, 根据中值定理, 可知存在 $t'\in(0,\varphi)$ 使得 $\phi_t(x,y,t')\cdot(\varphi-0)=(0-f_0)$. 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)\in S_0$ 有

$$\lim\frac{-f_0}{\varphi}=\lim\phi_t(x,y,t')=\phi_t(x_0,y_0,0)\cdot \qquad (19$$

需要证明(19 大于 0, 及 $A_0>0$.

因为 $\phi(x,y,\varphi(x,y))=0$ 且 $\phi_t\nabla\varphi=-\nabla\phi$, 则 $-\nabla\phi|_{t=0}$ 是 S_0 上向内法向量. 当 t 足够小, 则 $\phi_t>0$, 和 $-\nabla\phi|_{t=0}$ 是向内的, $\nabla\varphi$ 也是 S_0 上向内法向量. 这表明

$$\begin{cases}\varphi>0 & S_0\ 内部,\\ \varphi<0 & S_0\ 外部,\end{cases}$$

并且

$$\begin{cases}f<0 & S_0\ 内部,\\ f>0 & S_0\ 外部,\end{cases}$$

则 $A_0>0$. 通常当水平集向内演化时, $\varphi>0$ 和 $f<0$. 因此当 t 足够小时, $A(x,y,t)>0$, 有 $\phi_t|_{\langle(x,y)|\phi(x,y,t)=0\rangle}>0$.

因为 $|\nabla\phi|^2=1$, 并且 t^0 项系数为 1, 则有

$$\left(-\varphi_xA_0(x,y)-\varphi\frac{\partial A_0}{\partial x}\right)^2+\left(-\varphi_yA_0(x,y)-\varphi\frac{\partial A_0}{\partial y}\right)^2=1,$$

$$|\nabla\varphi|^2A_0^2+2\varphi A_0\left(\varphi_x\frac{\partial A_0}{\partial x}+\varphi_y\frac{\partial A_0}{\partial y}\right)+\varphi^2|\nabla A_0|^2=1, \qquad (20$$

将 $\varphi A_0=-f_0$ 代入(20 有

$$\frac{A_0^2}{F^2}+2f_0\left(\varphi_x\frac{f_{0x}\varphi-f_0\varphi_x}{\varphi^2}+\varphi_y\frac{f_{0y}\varphi-f_0\varphi_y}{\varphi^2}\right)+$$

$$\frac{1}{\varphi^2}((f_{0x}\varphi+\varphi_x)^2+(f_{0y}\varphi+\varphi_y)^2)=1\Leftrightarrow$$

$$\frac{f_0^2}{F^2\varphi^2}+\frac{2f_0}{\varphi^2}(\varphi(f_{0x}\varphi_x+f_{0y}\varphi_y)-f_0(\varphi_x^2+\varphi_y^2))+$$

$$\frac{1}{\varphi^2}(\varphi^2+f_0^2|\nabla\varphi|^2-2f_0\varphi(f_{0x}\varphi_x+f_{0y}\varphi_y))=1\Leftrightarrow$$

$$\frac{f_0^2}{F^2}+2f_0\left(\varphi(f_{0x}\varphi_x+f_{0y}\varphi_y)-\frac{f_0}{F^2}\right)+\frac{f_0^2}{F^2}-2f_0\varphi(f_{0x}\varphi_x+f_{0y}\varphi_y)=0\Leftrightarrow$$

$$0=0.$$

再由 $\phi_x^2+\phi_y^2=1$ 来比较 $t^i(i\geqslant1)$ 的系数, 将 ϕ_x 和 ϕ_y 改写为

$$\begin{cases}\phi_x=-\varphi_xA_0-\varphi\dfrac{\partial A_0}{\partial x}+\displaystyle\sum_{i\geqslant1}\left(-\varphi_xA_i-\varphi\dfrac{\partial A_i}{\partial x}+\dfrac{\partial A_{i-1}}{\partial x}\right)t^i,\\ \phi_y=-\varphi_yA_0-\varphi\dfrac{\partial A_0}{\partial y}+\displaystyle\sum_{i\geqslant1}\left(-\varphi_yA_i-\varphi\dfrac{\partial A_i}{\partial y}+\dfrac{\partial A_{i-1}}{\partial y}\right)t^i,\end{cases}$$

其中 $A_i(i\geqslant1)$ 需要被确定. 现采用数学归纳法确定之.

假定 $A_i(0\leqslant i\leqslant n-1)$ 均确定, 下面考虑 t^n 项的系数

$$2\left(-\varphi_xA_n-\varphi\frac{\partial A_n}{\partial x}+\frac{\partial A_{n-1}}{\partial x}\right)\cdot\left(-\varphi_xA_0-\varphi\frac{\partial A_0}{\partial x}\right)+$$

$$2\left(-\varphi_yA_n-\varphi\frac{\partial A_n}{\partial y}+\frac{\partial A_{n-1}}{\partial y}\right)\cdot\left(-\varphi_yA_0-\varphi\frac{\partial A_0}{\partial y}\right)+$$

$$G\left(A_i,\frac{\partial A_i}{\partial x},\frac{\partial A_i}{\partial y}\right)=0,$$

其中 $1\leqslant i\leqslant n-1$. 上式可被写为

$$(f_{0x}\varphi_x+f_{0y}\varphi_y)A_n+f_{0x}\varphi\frac{\partial A_n}{\partial x}+f_{0y}\varphi\frac{\partial A_n}{\partial y}=G',\qquad(21$$

其中 G' 是已知的. 需要证明在 S_0 附近方程(21) 的解 A_n 存在且唯一.

令 $B(x,y)=\varphi A_n(x,y)$, 可知 $\varphi|_{S_0}=0$. 在 S_0 附近对于任意 $C(x_0,y_0)$ 存在唯一的 $D(x_1,y_1)\in S_0$. 因此 $\overrightarrow{DC}$ 平行于在 $D(x_1,y_1)$ 点的法向量, 则

$$\int_{\overrightarrow{DC}}(\nabla f\cdot\nabla B)\,\mathrm{d}l=B(x_0,y_0)-B(x_1,y_1)=B(x_0,y_0),$$

即

$$B(x_0,y_0)=\int_{\overrightarrow{DC}}G'\,\mathrm{d}l.$$

可推出

$$A_n=\begin{cases}\dfrac{1}{\varphi(x_0,y_0)}\displaystyle\int_{\overrightarrow{DC}}G'\,\mathrm{d}l & (x_0,y_0)\notin S_0,\\ \displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\dfrac{1}{\varphi(x,y)}\int_{\overrightarrow{DC}}G'\,\mathrm{d}l & (x_0,y_0)\in S_0,\end{cases}$$

其中极限的存在性需要被进一步解释. 根据中值定理, 存在 $(x^*,y^*)\in\overrightarrow{DC}$ 使得

$$\int_{\overrightarrow{DC}}G'\,\mathrm{d}l=G'(x^*,y^*)\cdot(-f_0(x,y)),$$

可导出

$$A_n(x_0,y_0)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}G'(x,y)\cdot\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}-\frac{f_0}{\varphi},$$

由连续性定理和(19 ,知极限存在,在 S_0 附近方程(21) 的解 A_n 存在且唯一• 所以在 S_0 附近方程组(11 有唯一解• 证毕•

上述结论还可推广到三维甚至高维空间•

4 结 论

我们的研究工作既具有理论价值,又有实践意义• 在理论方面,我们指出对于带有距离函数约束的水平集方程,如果解存在,则解一定保持为相对于演化界面的有向距离函数• 并且解的存在性和唯一性都只在初始零水平集附近有保证•

在分析过程中,一些数学技巧被采用• 原始的水平集方程组(1 是一阶非线性 PDE• 它有两个未知变量,并且不是经典方程,求解困难• 因此我们首先证明方程组(1 的任意解都是距离函数,则该方程组可被变换为另一形式,它只含有一个未知变量• 但新的方程组不是普通经典方程组• 因为原始速度函数只在零水平集处可以确定,但零水平集是未知的• 为将该方程组变换为普通方程组,则采用隐函数方法• 事实上,这些方法还可以用于其他非线性 PDE 问题研究中•

在实践方面,用上述结果,我们已在图象分割等实际应用中验证方程组(1 在初始零水平集附近,水平集演化是唯一的• 远离初始零水平集方程组(1 的解是否还保持唯一? 这是我们今后研究的问题•

[参 考 文 献]

[1] Osher S, Sethian J A. Fronts propagating with curvature dependent speed: algorithms based on the Hamilton_Jacobi formulation[J]. Journal of Computational Physics, 1988, **79**(1): 12—49.

[2] Kass M, Witkin A, Terzopoulos D. SNADES: Active contour models[J]. Int'l Journal of Computer Vision, 1988, **1**(3): 321—332.

[3] Cohen L, Cohen I. Finite element methods for active contour models and balloons for 2D and 3D images[J]. IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1993, **15**(11): 1131—1147.

[4] McInerney T, Terzopoulos D. Topologically adaptable snakes[A]. In: IEEE Proc 5th Int'l Conf Computer Vision[C]. Boston, MA: IEEE Computer Society Press, 1995, 694—699.

[5] Sethian J A, Strain J. Crystal growth and dendritic solidification[J]. Journal of Computational Physics, 1992, **98**(2): 231—253.

[6] Zeng X, Staib L, Schultz R T, et al. Volumetric layer segmentation using coupled surfaces propagation [A]. In: IEEE Proc Int'l Conf Computer Vision & Pattern Recognition[C]. Santa Barbara, CA: IEEE Computer Society Press, 1998, 708—715.

[7] Gomes J, Faugeras O. Level sets and distance functions[A]. In: David Vernon Ed. Proc 6th European Conference Computer Vision[C]. LNCS 1842, Berlin: Springer_Verlag, 2000, 588—602.

[8] Sethian J A. Level Set Methods and Fast Matching Methods[M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1999.

[9] 张芷芬, 于同仁, 董金柱, 等. 常微分方程定性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1985.

Level Set Methods Based on Distance Function

WANG De_jun[1], TANG Yun[2], YU Hong_chuan[1], TANG Ze_sheng[1]

(1. Institute of Software, Department of Computer Sciences, Tsinghua University, Beijing 100084, P. R. China;

2. Department of Mathematical Sciences, Tsinghua University, Beijing 100084, P. R. China

Abstract: Some basic problems on the level set methods were discussed, such as the method used to preserve the distance function, the existence and uniqueness of solution for the level set equations. The main contribution is to prove that in a neighborhood of the initial zero level set, the level set equations with the restriction of the distance function have a unique solution, which must be the signed distance function with respect to the evolving surface. Some skillful approaches were used: Noticing that any solution for the original equation was a distance function, the original level set equations were transformed into a simpler alternative form. Moreover, since the new system was not a classical one, the system was transformed into an ordinary one, for which the implicit function method was adopted.

Key words: level set methods; distance function; existence and uniqueness of the solution