

文章编号: 1000-0887(2003) 08\_0865\_09

# 夹杂与基体对界面层螺旋位错的干涉效应\*

蒋持平<sup>1</sup>, 刘又文<sup>2</sup>, 徐耀玲<sup>1</sup>

(1. 北京航空航天大学 飞行器设计与应用力学系, 北京 100083;

2. 湖南大学 工程力学系, 长沙 410082)

(我刊原编委樊大钧推荐)

**摘要:** 研究圆形夹杂与基体对有限厚度界面层螺旋位错的干涉问题。结合复变函数的分区亚纯函数理论、施瓦兹对称原理与柯西型积分运算, 发展了多连通域联结问题的一个有效分析方法, 将 3 个区域应力函数的联结问题化归为界面层应力函数的函数方程, 并求得了显式级数解。利用该结果, 研究与讨论了界面层螺旋位错能与位错力。

**关键词:** 螺旋位错; 位错力; 非均匀材料; 界面; 复变函数方法

**中图分类号:** O346.1      **文献标识码:** A

## 引 言

位错与材料非均匀相的干涉效应对理解多种材料的硬化、强化与破坏机制有着重要的意义, 因而受到力学界与工程界的广泛重视。理想零厚度界面附近的位错问题研究较为充分, 其中 Head<sup>[1]</sup> 首先推导了临近不同材料直线界面位错的位错力, Smith<sup>[2]</sup> 求得了圆形夹杂内部和外部的螺旋位错干涉问题的解答, Gong 和 Meguid<sup>[3]</sup>, Deng 和 Meguid<sup>[4]</sup> 研究了螺旋位错与椭圆夹杂之间的干涉。作为研究的深入, 有限厚度的界面层模型能更精细地研究位错与界面之间的干涉效应, 但研究尚不充分。其中 Luo 和 Chen<sup>[5]</sup> 研究了三相同心圆柱模型中间相的刃形位错问题, Xiao 和 Chen<sup>[6]</sup> 研究了螺旋位错同带包层纤维的干涉问题。本文研究了圆形夹杂和基体对有限厚度界面层中螺旋位错的干涉效应。

复变函数方法<sup>[7,8]</sup> 被用于求解本文的问题。对于三相模型在无穷远均匀加载的特殊情形, 常常能获得封闭形式解<sup>[9,10]</sup>。但是位错、集中载荷等所带来的应力函数的奇异性会引起数学上求解困难。本文结合复变函数的分区亚纯函数理论、施瓦兹对称原理与柯西型积分运算, 发展了多连通域联结问题的一个有效分析方法, 将 3 个区域应力函数的联结问题化归为界面层应力函数的函数方程, 由此导出显式级数解, 并研究了位错干涉能与位错力。

## 1 一般问题的分析与解答

如图 1 所示, 半径为  $R_1$  和  $R_2$  的同心圆将平面分成三个区域  $S_1$ 、 $S_2$  和  $S_3$ , 分别由夹杂、界

\* 收稿日期: 2001\_12\_30; 修订日期: 2003\_04\_25

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10272009); 航空科学基金资助项目(99G51022)

作者简介: 蒋持平(1948—), 男, 湖南益阳人, 教授, 博士, 博士生导师(E-mail: jiangch0409\_cn@sina.com.cn)。

面层物质和基体 3 种介质占据, 其相应的剪切弹性模量为  $\mu_1$ 、 $\mu_2$  和  $\mu_3$ 。

螺旋位错引起反平面位移应力场。根据文献[7, 8], 反平面位移  $w$ 、剪应力  $\tau_{xz}$ 、 $\tau_{yz}$  及其任意弧段  $AB$  上合应力  $T$ , 可由解析函数  $f(z)$  表示

$$w = \frac{1}{2\mu} [f(z) + \overline{f(z)}], \quad (1)$$

$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} = f'(z), \quad (2)$$

$$T = \int_A^B (\tau_{xz} dy - \tau_{yz} dx) = \frac{i}{2} [\overline{f(z)} - f(z)]_A^B. \quad (3)$$

设三相介质完好连接, 则内边界应力与位移的连续性条件可表示为

$$T_1 = T_2, \quad w_1 = w_2 \quad |t| = R_1, \quad (4)$$

$$T_2 = T_3, \quad w_2 = w_3 \quad |t| = R_2, \quad (5)$$

式中, 下标 1、2、3 分别对应夹杂、界面层及基体。

设 Burgers 矢量为  $b_z$  (大小为  $b_z$ ) 的螺旋位错位于界面层所占区域  $S_2$  内, 无穷远应力为零, 则在 3 个材料域中应力函数的性质为: 在夹杂所占区域  $S_1$  ( $|z| < R_1$ ) 中应力函数  $f_1(z)$  全纯, 在界面层环域  $S_2$  ( $R_1 < |z| < R_2$ ) 中, 应力函数  $f_2(z)$  可表示为

$$f_2(z) = \frac{\mu_2 b_z}{2\pi i} \ln(z - z_0) + f_{20}(z), \quad (6)$$

其中,  $f_{20}(z)$  在环域  $S_2$  中全纯, 可以展开成罗朗级数。在略去代表刚性位移的常数项后,  $f_{20}(z)$  可以写成正幂次级数  $G_P(z)$  与负幂次级数  $G_N(z)$  之和

$$f_{20}(z) = G_P(z) + G_N(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{(k+1)} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{-(k+1)}. \quad (7)$$

在基体所占外域  $S_3$  ( $|z| > R_2$ ) 中, 应力函数  $f_3(z)$  可以写为

$$f_3(z) = \frac{\mu_3 b_z}{2\pi i} \ln z + f_{30}(z), \quad (8)$$

其中,  $f_{30}(z)$  为域  $S_3$  中的全纯函数。

为了后面分析的需要, 运用施瓦兹对称原理, 定义如下解析函数

$$f_1^*(z) = -f_1\left(\frac{R_1^2}{z}\right) \quad |z| > R_1, \quad (9)$$

$$f_2^*(z) = -f_2\left(\frac{R_1^2}{z}\right) = \frac{\mu_2 b_z}{2\pi i} \ln\left(\frac{R_1^2}{z} - z_0\right) + f_{2^*0}(z) \quad \frac{R_1^2}{R_2} < |z| < R_1, \quad (10)$$

其中  $f_{2^*0}(z) = -\overline{G_P\left(\frac{R_1^2}{z}\right)} - \overline{G_N\left(\frac{R_1^2}{z}\right)}$ 。

$$\text{又 } f_2^{**}(z) = -f_2\left(\frac{R_2^2}{z}\right) = \frac{\mu_2 b_z}{2\pi i} \ln\left(\frac{R_2^2}{z} - z_0\right) + f_{2^{**}0}(z) \quad R_2 < |z| < \frac{R_2^2}{R_1}, \quad (11)$$

其中  $f_{2^{**}0}(z) = -\overline{G_P\left(\frac{R_2^2}{z}\right)} - \overline{G_N\left(\frac{R_2^2}{z}\right)}$ 。

$$\text{又 } f_3^*(z) = -f_3\left(\frac{R_2^2}{z}\right) = \frac{\mu_3 b_z}{2\pi i} \ln\left(\frac{R_2^2}{z}\right) + f_{3^*0}(z) \quad |z| < R_2. \quad (12)$$

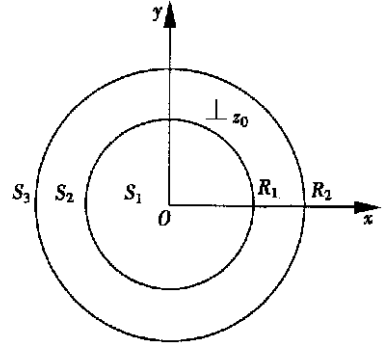


图 1 一个螺旋位错与夹杂和基体的相互作用

现在利用内边界应力与位移的连续条件求解应力函数。将式(3)代入到连续条件(4)和(5)的第一式,得到函数方程

$$[\overline{f_1(t)} - f_1(t)]_{S_1} = [\overline{f_2(t)} - f_2(t)]_{S_2} \quad |t| = R_1, \quad (13)$$

$$[\overline{f_2(t)} - f_2(t)]_{S_2} = [\overline{f_3(t)} - f_3(t)]_{S_3} \quad |t| = R_2. \quad (14)$$

注意到在  $|t| = R_1$  上,  $tt = R_1^2$ ; 在  $|t| = R_2$  上,  $tt = R_2^2$ 。利用(9)~(12)式,方程(13)和(14)可以化为

$$[f_3^*(t) + f_2^*(t) - f_1(t)]_{S_1} = [f_3^*(t) - f_2(t) + f_1^*(t)]_{S_2} \quad |t| = R_1, \quad (15)$$

$$[f_3^*(t) - f_2(t) + f_1^*(t)]_{S_2} = [f_2^{**}(t) - f_3(t) + f_1^*(t)]_{S_3} \quad |t| = R_2, \quad (16)$$

其中下标  $S_1, S_2$  和  $S_3$  分别表示从域  $S_1, S_2$  和  $S_3$  趋近于相应内边界的函数值。由方程(15)和(16)可知  $f_3^*(z) + f_2^*(z) - f_1(z), f_3^*(z) - f_2(z) + f_1^*(z)$  与  $f_2^{**}(z) - f_3(z) + f_1^*(z)$  互为直接的解析延拓。注意到式(6)~(12),我们能够定义一个内边界如图2所示的分区全纯函数

$$F_{T0}(z) = \begin{cases} f_3^*(z) - f_1(z) & |z| < R_1^2/R_2, \\ f_3^*(z) + f_2^*(z) - f_1(z) & R_1^2/R_2 < |z| < R_1, \\ f_3^*(z) - f_2(z) + f_1^*(z) & R_1 < |z| < R_2, \\ -f_3(z) + f_2^{**}(z) - f_1^*(z) & R_2 < |z| < R_2^2/R_1, \\ -f_3(z) + f_1^*(z) & |z| > R_2^2/R_1, \end{cases} \quad (17)$$

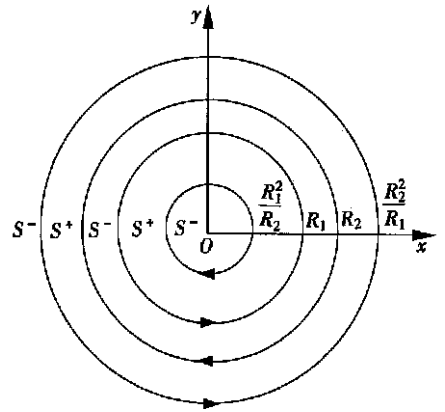


图2 分区全纯函数  $F_{T0}(z)$ 、 $F_{w0}(z)$  的边界

求出  $F_{T0}(z)$  在边界上的跳跃值,我们获得函数方程

$$F_{T0}^+(t) - F_{T0}^-(t) = \begin{cases} -\frac{G_P}{G_N} \left( \frac{R_1^2}{t} \right) - \frac{G_N}{G_P} \left( \frac{R_1^2}{t} \right) & |t| = \frac{R_1^2}{R_2}, \\ -\frac{\mu_2 b_z}{2\pi i} \ln \left( \frac{R_1^2}{t} - z_0 \right) - \frac{\mu_2 b_z}{2\pi i} \ln(t - z_0) & |t| = R_1, \\ -\frac{\mu_2 b_z}{2\pi i} \ln \left( \frac{R_2^2}{t} - z_0 \right) - \frac{\mu_2 b_z}{2\pi i} \ln(t - z_0) & |t| = R_2, \\ -\frac{G_P}{G_N} \left( \frac{R_2^2}{t} \right) - \frac{G_N}{G_P} \left( \frac{R_2^2}{t} \right) & |t| = \frac{R_2^2}{R_1}, \end{cases} \quad (18)$$

其中,上标+、-分别表示从  $S^+$  与  $S^-$  趋近于相应内边界的函数值(见图2)。

根据文献[7],方程(18)的解为

$$\begin{aligned}
 F_{T_0}(z) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=R_2/R_1} \frac{-\overline{G_P}(R_1^2/t) - \overline{G_N}(R_1^2/t)}{t-z} dt + \\
 & \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=R_1} \frac{-(\mu_2 b_z/2\pi i) \ln(R_1^2/t - \overline{z_0}) - (\mu_2 b_z/2\pi i) \ln(t - z_0)}{t-z} dt + \\
 & \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=R_2} \frac{-(\mu_2 b_z/2\pi i) \ln(R_2^2/t - \overline{z_0}) - (\mu_2 b_z/2\pi i) \ln(t - z_0)}{t-z} dt + \\
 & \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=R_2/R_1} \frac{-\overline{G_P}(R_2^2/t) - \overline{G_N}(R_2^2/t)}{t-z} dt, \tag{19}
 \end{aligned}$$

完成柯西型积分运算, 得到

$$F_{T_0}(z) = \begin{cases} \overline{G_N}\left(\frac{R_1^2}{z}\right) - \overline{G_N}\left(\frac{R_2^2}{z}\right) - \frac{\mu_2 b_z}{2\pi i} \ln(z - z_0) + \frac{\mu_2 b_z}{2\pi i} \ln\left(z - \frac{R_2^2}{z_0}\right) & |z| < \frac{R_1^2}{R_2}, \\ -\overline{G_P}\left(\frac{R_1^2}{z}\right) - \overline{G_N}\left(\frac{R_2^2}{z}\right) - \frac{\mu_2 b_z}{2\pi i} \ln(z - z_0) + \frac{\mu_2 b_z}{2\pi i} \ln\left(z - \frac{R_2^2}{z_0}\right) & \frac{R_1^2}{R_2} < |z| < R_1, \\ -\overline{G_P}\left(\frac{R_1^2}{z}\right) - \overline{G_N}\left(\frac{R_2^2}{z}\right) + \frac{\mu_2 b_z}{2\pi i} \left[ \ln\left(z - \frac{R_1^2}{z_0}\right) - \ln z \right] + \frac{\mu_2 b_z}{2\pi i} \ln\left(z - \frac{R_2^2}{z_0}\right) & R_1 < |z| < R_2, \\ -\overline{G_P}\left(\frac{R_1^2}{z}\right) - \overline{G_N}\left(\frac{R_2^2}{z}\right) + \frac{\mu_2 b_z}{2\pi i} \ln\left(z - \frac{R_1^2}{z_0}\right) - \frac{\mu_2 b_z}{2\pi i} \ln(z - z_0) & R_2 < |z| < \frac{R_2^2}{R_1}, \\ -\overline{G_P}\left(\frac{R_1^2}{z}\right) + \overline{G_P}\left(\frac{R_2^2}{z}\right) + \frac{\mu_2 b_z}{2\pi i} \ln\left(z - \frac{R_1^2}{z_0}\right) - \frac{\mu_2 b_z}{2\pi i} \ln(z - z_0) & |z| > \frac{R_2^2}{R_1}. \end{cases} \tag{20}$$

同样地, 将式(1)代入到连续条件(4)、(5)第二式中, 得到函数方程

$$\mu_2 [\overline{f_1(t)} + f_1(t)]_{S_1} = \mu_1 [\overline{f_2(t)} + f_2(t)]_{S_2} \quad |t| = R_1, \tag{21}$$

$$\mu_3 [\overline{f_2(t)} + f_2(t)]_{S_2} = \mu_2 [\overline{f_3(t)} + f_3(t)]_{S_3} \quad |t| = R_2. \tag{22}$$

利用式(9)~(12)函数方程(21)和(22)可以化为

$$\begin{aligned}
 & [\mu_2 f_3^*(t) + \mu_1 f_2^*(t) + \mu_2 f_1(t)]_{S_1} = \\
 & [\mu_2 f_3^*(t) + \mu_1 f_2(t) + \mu_2 f_1^*(t)]_{S_2} \quad |t| = R_1, \tag{23}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & [\mu_2 f_3^*(t) + \mu_2 f_2(t) + \mu_2 f_1^*(t)]_{S_2} = \\
 & [\mu_3 f_2^{**}(t) + \mu_2 f_3(t) + \mu_2 f_1^*(t)]_{S_3} \quad |t| = R_2. \tag{24}
 \end{aligned}$$

注意到式(6)~(12), 定义内边界如图2所示的分区全纯函数

$$F_{w0}(z) = \begin{cases} \mu_2 f_3^* 0(z) + \mu_2 f_1(z) & |z| < R_1^2/R_2, \\ \mu_1 f_2^* 0(z) + \mu_2 f_1(z) + \mu_3 f_3^* 0(z) & R_1^2/R_2 < |z| < R_1, \\ \mu_2 f_3^* 0(z) + \mu_2 f_1^*(z) + \mu_1 f_{20}(z) & R_1 < |z| < R_2, \\ \mu_3 f_2^{**} 0(z) + \mu_2 f_{30}(z) + \mu_2 f_1^*(z) & R_2 < |z| < R_2^2/R_1, \\ \mu_2 f_{30}(z) + \mu_2 f_1^*(z) & |z| > R_2^2/R_1, \end{cases} \quad (25)$$

按求  $F_{T0}(z)$  的方法, 我们可以得到  $F_{w0}(z)$  的解答

$$F_{w0}(z) = \mu_1 \overline{G_N} \left( \frac{R_1^2}{z} \right) - \mu_3 \overline{G_N} \left( \frac{R_2^2}{z} \right) + (\mu_1 - \mu_3) G_P(z) + \frac{\mu_1 \mu_2 b_z}{2\pi i} \ln(z - z_0) + \frac{\mu_2 \mu_3 b_z}{2\pi i} \ln \left[ z - \frac{R_2^2}{z_0} \right] \quad |z| < \frac{R_1^2}{R_2}, \quad (26)$$

$$F_{w0}(z) = -\mu_1 \overline{G_P} \left( \frac{R_1^2}{z} \right) - \mu_3 \overline{G_N} \left( \frac{R_2^2}{z} \right) + (\mu_1 - \mu_3) G_P(z) + \frac{\mu_1 \mu_2 b_z}{2\pi i} \ln(z - z_0) + \frac{\mu_2 \mu_3 b_z}{2\pi i} \ln \left[ z - \frac{R_2^2}{z_0} \right] \quad \frac{R_1^2}{R_2} < |z| < R_1, \quad (27)$$

$$F_{w0}(z) = -\mu_1 \overline{G_P} \left( \frac{R_1^2}{z} \right) - \mu_3 \overline{G_N} \left( \frac{R_2^2}{z} \right) + (\mu_1 - \mu_3) G_P(z) + \frac{\mu_1 \mu_2 b_z}{2\pi i} \left[ \ln \left[ z - \frac{R_1^2}{z_0} \right] - \ln z \right] + \frac{\mu_2 \mu_3 b_z}{2\pi i} \ln \left[ z - \frac{R_2^2}{z_0} \right] \quad R_1 < |z| < R_2, \quad (28)$$

$$F_{w0}(z) = -\mu_1 \overline{G_P} \left( \frac{R_1^2}{z} \right) - \mu_3 \overline{G_N} \left( \frac{R_2^2}{z} \right) + (\mu_3 - \mu_1) G_N(z) + \frac{\mu_1 \mu_2 b_z}{2\pi i} \left[ \ln \left[ z - \frac{R_1^2}{z_0} \right] - \ln z \right] - \frac{\mu_2 \mu_3 b_z}{2\pi i} \left[ \ln z - \ln(z - z_0) \right] \quad R_2 < |z| < \frac{R_2^2}{R_1}, \quad (29)$$

$$F_{w0}(z) = -\mu_1 \overline{G_P} \left( \frac{R_1^2}{z} \right) + \mu_3 \overline{G_P} \left( \frac{R_2^2}{z} \right) + (\mu_3 - \mu_1) G_N(z) + \frac{\mu_1 \mu_2 b_z}{2\pi i} \ln \left[ z - \frac{R_1^2}{z_0} \right] - \frac{\mu_2(\mu_1 + \mu_3) b_z}{2\pi i} \ln z + \frac{\mu_2 \mu_3 b_z}{2\pi i} \ln(z - z_0) \quad |z| > \frac{R_2^2}{R_1}. \quad (30)$$

注意到式(17)和(25), 由式(20)第1式和式(26), 可以求得

$$f_1(z) = \frac{(\mu_1 + \mu_2) b_z}{4\pi i} \ln(z - z_0) + \frac{(\mu_3 - \mu_2) b_z}{4\pi i} \ln \left[ z - \frac{R_2^2}{z_0} \right] + \frac{\mu_1 - \mu_2}{2\mu_2} \overline{G_N} \left( \frac{R_1^2}{z} \right) + \frac{\mu_2 - \mu_3}{2\mu_2} \overline{G_N} \left( \frac{R_2^2}{z} \right) + \frac{\mu_1 - \mu_3}{2\mu_2} G_P(z). \quad (31)$$

注意到式(6)、(17)和(25), 由式(20)第3式和式(28), 可求得

$$f_2(z) = \frac{\mu_2 b_z}{2\pi i} \ln(z - z_0) + \frac{\mu_2(\mu_1 - \mu_2) b_z}{2\pi i(\mu_1 + \mu_2)} \ln \left[ 1 - \frac{R_1^2}{z z_0} \right] + \frac{\mu_2(\mu_3 - \mu_2) b_z}{2\pi i(\mu_1 + \mu_2)} \ln \left[ z - \frac{R_2^2}{z_0} \right] + \frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_1 + \mu_2} G_P(z) + \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \overline{G_P} \left( \frac{R_1^2}{z} \right) + \frac{\mu_2 - \mu_3}{\mu_1 + \mu_2} \overline{G_N} \left( \frac{R_2^2}{z} \right). \quad (32)$$

注意到式(8)、(17)和(25), 由式(20)第5式和式(30), 可求得

$$\begin{aligned}
 f_3(z) = & \frac{(\mu_3 - \mu_1) b_z}{4\pi i} \ln z + \frac{(\mu_1 - \mu_2) b_z}{4\pi i} \ln \left[ z - \frac{R_1^2}{z_0} \right] + \\
 & \frac{(\mu_2 + \mu_3) b_z}{4\pi i} \ln(z - z_0) + \frac{\mu_3 - \mu_1}{2\mu_2} G_N(z) + \\
 & \frac{\mu_2 - \mu_1}{2\mu_2} G_P \left[ \frac{R_1^2}{z} \right] + \frac{\mu_3 - \mu_2}{2\mu_2} G_P \left[ \frac{R_2^2}{z} \right]. \quad (33)
 \end{aligned}$$

将式(6)代入到式(32), 经整理获得决定界面层应力函数  $f_2(z) = G_P(z) + G_N(z)$  的函数方程

$$\begin{aligned}
 (\mu_1 + \mu_2) G_N(z) + (\mu_1 - \mu_2) G_P \left[ \frac{R_1^2}{z} \right] + \\
 (\mu_2 + \mu_3) G_P(z) + (\mu_3 - \mu_2) G_N \left[ \frac{R_2^2}{z} \right] = \\
 \frac{\mu_2(\mu_1 - \mu_2) b_z}{2\pi i} \ln \left[ 1 - \frac{R_1^2}{z z_0} \right] + \frac{\mu_2(\mu_3 - \mu_2) b_z}{2\pi i} \ln \left[ z - \frac{R_2^2}{z_0} \right], \quad (34)
 \end{aligned}$$

此时, 三个区域的应力函数已经解耦, 函数方程(34)易于求解. 将式(7)代入到式(34)中, 求得  $G_P(z)$  和  $G_N(z)$  展开式系数的显示通解

$$\begin{aligned}
 a_k = & \frac{\mu_2 b_z (\mu_3 - \mu_2)}{2\pi i (k+1)} \times \\
 & \frac{(\mu_1 - \mu_2) R_1^{2(k+1)} + (\mu_1 + \mu_2) (z_0 \bar{z}_0)^{k+1}}{\left[ (\mu_1 - \mu_2) (\mu_3 - \mu_2) R_1^{2(k+1)} - (\mu_1 + \mu_2) (\mu_2 + \mu_3) R_2^{2(k+1)} \right] z_0^{k+1}}, \quad (35)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_k = & \frac{\mu_2 b_z (\mu_1 - \mu_2)}{2\pi i (k+1)} \times \\
 & \frac{(\mu_2 + \mu_3) R_2^{2(k+1)} + (\mu_3 - \mu_2) (z_0 \bar{z}_0)^{k+1}}{(\mu_1 - \mu_2) (\mu_3 - \mu_2) R_1^{2(k+1)} - (\mu_1 + \mu_2) (\mu_2 + \mu_3) R_2^{2(k+1)}} \left[ \frac{R_1^2}{z_0} \right]^{k+1}. \quad (36)
 \end{aligned}$$

确定  $G_P(z)$  和  $G_N(z)$  后, 由式(31) ~ (33), 3个材料域的复应力函数  $f_1(z)$ 、 $f_2(z)$  和  $f_3(z)$  完全确定, 问题已解.

由本文解答的特殊情况, 可以得到某些熟知的经典解答与有意义的新结果. 当  $\mu_1 = \mu_2$  时, 本文解答将退化到圆形夹杂内部螺旋位错问题的解答, 与经典解<sup>[2, 3]</sup>一致. 当  $\mu_2 = \mu_3$  时, 本文解答将退化到螺旋位错位于圆形夹杂附近的基体中的问题的解答, 与经典解<sup>[2, 3]</sup>一致. 当  $\mu_3 = 0$  时, 由本文的解答将得到圆柱覆盖层内螺旋位错问题的解答.  $\mu_1 = 0$ 、 $\mu_3 = 0$  时, 由本文的解答将得到圆柱壳内螺旋位错问题的解答. 据作者所知, 以往文献还没有给出后面这两种情况的解答.

## 2 位错干涉能与位错力

为了揭示界面层材料位错运动与“捕获”的机制, 需要研究位错干涉能与位错力. 在无穷均匀介质中, 一个螺旋位错产生的应变能为

$$W = \frac{1}{2} b_z T, \quad (37)$$

其中,  $T$  为沿位错线的合力,  $b_z$  为 Burgers 矢量的大小(参见式(3)).

材料非均匀性引起的干涉能为<sup>[3]</sup>

$$\Delta W = \frac{1}{2} b_z \operatorname{Im}[\Delta f_2(z_0)], \quad (38)$$

式中,  $\text{Im}$  表示函数的虚部,  $\Delta f_2(z_0)$  表示  $f_2(z_0)$  非奇异部分

对于圆形夹杂, 不失一般性, 可设  $z_0 = \bar{z}_0 = x_0$  位于  $x$  轴. 将式(7)代入式(38), 得

$$\Delta W = \frac{1}{2} b_z \text{Im} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x_0^{-(k+1)} \right], \quad (39)$$

沿  $x$  轴正向的位错力定义为<sup>[3]</sup>

$$F = - \frac{\delta(\Delta W)}{\delta x_0}. \quad (40)$$

将式(35)和(36)代入到式(39)和(40), 得到

$$F = - \frac{\delta(\Delta W)}{\delta x_0} = - \frac{\mu_2 b_z^2}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_{k+1} x_0^{-2k-3} + C_{k+1} x_0^{2k+1}}{M_{k+1}}, \quad (41)$$

其中

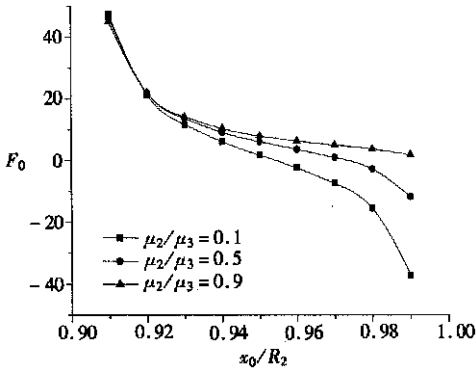
$$\begin{cases} M_{k+1} = (\mu_1 - \mu_2)(\mu_3 - \mu_2) R_1^{2(k+1)} - (\mu_1 + \mu_2)(\mu_3 + \mu_2) R_2^{2(k+1)}, \\ A_{k+1} = (\mu_1 - \mu_2)(\mu_2 + \mu_3) R_1^{2(k+1)} R_2^{2(k+1)}, \\ C_{k+1} = (\mu_1 + \mu_2)(\mu_3 - \mu_2). \end{cases} \quad (42)$$

### 3 数值结果与讨论

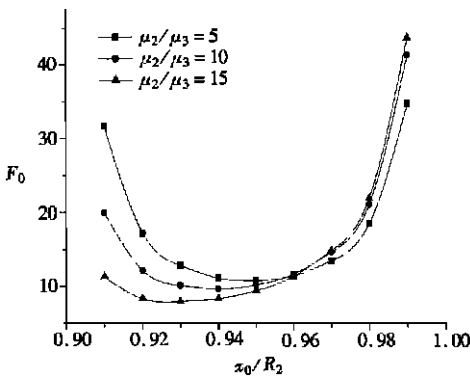
根据所求得解析表达式, 现在通过数值分析研究各相材料参数的不同匹配对界面层内

螺旋位错力的影响, 典型结果绘于图3中. 其中, 夹杂与基体剪切模量之比  $\mu_1/\mu_3 = 20$ ,  $R_1/R_2 = 0.9$ , 无量纲位错力为  $F_0 = 2\pi R_2 F / (\mu_2 b_z^2)$ . 考察界面层无量纲剪切模量  $\mu_2/\mu_3$  从小到大变化时,  $F_0$  的变化规律.

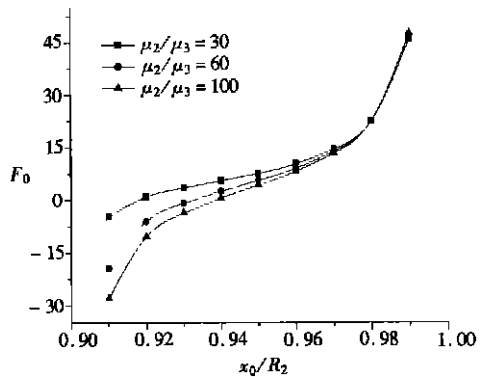
图3(a)显示了软界面层的计算结果 ( $\mu_2 < \mu_1$ ,  $\mu_2 < \mu_3$ ). 对这种材料参数的匹配, 界面层螺旋位错存在一个平衡点(位错力为零的点), 并且该平衡点是稳定的. 随着  $\mu_2/\mu_3$  的增大, 此平衡点向靠近基体的一侧移动, 趋近于基体. 这个结果解释了一个在软内相层中的所谓位错“捕获”



(a)  $\mu_2 < \mu_1$ ,  $\mu_2 < \mu_3$



(b)  $\mu_3 < \mu_2 < \mu_1$



(c)  $\mu_2 > \mu_1$ ,  $\mu_2 > \mu_3$

图3 不同界面层模量下位错力随位错位置的变化

机制· 当  $\mu_2 = \mu_3$  时, 不再存在平衡点· 当界面层模量介于夹杂与基体的模量之间时 ( $\mu_3 < \mu_2 < \mu_1$ ), 由于从夹杂、界面层到基体的剪切模量依次递减, 位错力总是从夹杂指向基体, 不存在位错平衡点· 随着位错的位置变化, 位错力从大到小再变大, 在界面层某一位置取极小值, 此种情况的计算结果绘于图 3(b) 中· 图 3(c) 显示硬界面层的情况 ( $\mu_2 > \mu_1, \mu_2 > \mu_3$ ), 此时螺旋位错存在一个不稳定平衡点· 在其它位置, 位错或是由夹杂, 或是由基体吸引·

## 4 结 论

本文对多连通域的联结问题, 发展了一个有效的分析方法, 将圆形弹性夹杂有限界面层的螺旋位错问题化为一个简单的函数方程, 求得了显式级数解· 本文解答的特殊情形, 可以得到某些熟知的经典解答和有意义的新结果· 本文也获得了界面层内的螺旋位错干涉能与位错力的解析解, 并用于揭示了各相材料的不同组合对位错力的影响规律, 这对于理解界面层内位错的运动与捕获机制有着重要价值·

### [参 考 文 献]

- [1] Head A K. The interaction of dislocation and boundaries[J]. Philosophical Magazine, 1953, **44**: 92—94.
- [2] Smith E. The interaction between dislocations and inhomogeneities\_I [J]. International Journal of Engineering Science, 1968, **6**: 129—143.
- [3] Gong S X, Meguid S A. A screw dislocation interaction with an elliptical inhomogeneity[J]. International Journal of Engineering Science, 1994, **32**(8): 1221—1228.
- [4] Deng W, Meguid S A. Analysis of a screw dislocation inside an elliptical inhomogeneity in piezoelectric solids[J]. International Journal of Solids and Structures, 1999, **36**(10): 1449—1469.
- [5] Luo H A, Chen Y. An edge dislocation in a three\_phase composite cylinder model[J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 1991, **58**(1): 75—86.
- [6] Xiao Z M, Chen B J. A screw dislocation interacting with a coated fiber[J]. Mechanics of Materials, 2000, **32**(8): 485—494.
- [7] Muskhelishvili N I. Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity [M]. Groningen, Holland: Noordhoff Ltd, 1953.
- [8] Sih G C. Stress distribution near internal crack tips for longitudinal shear problems[J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 1965, **32**: 51—58.
- [9] Jiang C P, Cheung Y K. A fiber/matrix/composites model with a combined confocal elliptical cylinder unit cell for predicting the effective longitudinal shear modulus[J]. International Journal of Solids and Structures, 1998, **30**(28/29): 3977—3987.
- [10] Jiang C P, Cheung Y K. An exact solution for three phase piezoelectric cylinder model under antiplane shear and its applications to piezoelectric composites[J]. Journal of Solids and Structures, 2001, **38**(31/32): 4777—4796.



# Interaction of a Screw Dislocation in the Interphase Layer With the Inclusion and Matrix

JIANG Chi\_ping<sup>1</sup>, LIU You\_wen<sup>2</sup>, XU Yao\_ling<sup>1</sup>

( 1. Department of Flight Vehicle Design and Applied Mechanics,  
Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, P. R. China;

2. Department of Engineering Mechanics, Hunan University,  
Changsha 410082, P. R. China )

**Abstract:** The interaction of a screw dislocation in the interphase layer with the circular inhomogeneity and matrix was dealt with. An efficient method for multiply connected regions was developed by combining the sectionally subholomorphic function theory, Schwarz symmetric principle and Cauchy integral technique. The Hilbert problem of the complex potentials for three material regions was reduced to a functional equation in the complex potential of the interphase layer, resulting in an explicit series solution. By using the present solution the interaction energy and force acting dislocation were evaluated and discussed.

**Key words:** screw dislocation; dislocation force; inhomogeneous materials; interphase layer; complex potential method