

文章编号: 1000-0887(2003) 03-0221-08

# 粘弹性板动力稳定性分析中的 两模态 Galerkin 逼近\*

张能辉<sup>1,2</sup>, 程昌钧<sup>1,2</sup>

(1. 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072; 2. 上海大学 力学系, 上海 200436)

(本刊编委程昌钧来稿)

摘要: 利用最大 Liapunov 指数分析法以及其它数值和解析的动力学方法, 研究了大挠度粘弹性薄板的动力稳定性. 材料的行为由 Boltzmann 叠加原理描述. 采用 Galerkin 方法将原积分\_偏微分模型简化为两模态的近似积分模型, 而通过引进新变量, 该近似积分模型可进一步化为一个常微分模型. 数值比较了 1\_模态和 2\_模态截断系统的动力学性质, 讨论了面内周期激励下材料的粘弹性性质、加载的幅度和初值对板动力学行为的影响.

关键词: 粘弹性板; 动力稳定性; von K mm n 假设; Galerkin 方法; 混沌; Hopf 分叉  
中图分类号: O345 文献标识码: A

## 引 言

粘弹性结构动力稳定性分析相对比较复杂, 因为其数学模型是积分\_偏微分系统, 而不象弹性结构中的偏微分系统<sup>[1]</sup>. 许多工作采用 1\_模态 Galerkin 截断和 Liapunov 指数法, 研究了粘弹性板的动力稳定性<sup>[2- 8]</sup>. 然而, 还没有直接的证据表明采用低阶 Galerkin 截断的合理性. 到目前为止, 仅获得了几个关于粘弹性梁的非直接证据. Wojciech<sup>[9]</sup> 等人所做粘弹性梁的数值研究表明, 利用刚性有限元法、有限元法和 Galerkin 法, 所得结果几乎一致. Chen 和 Cheng<sup>[10]</sup> 所做的关于非线性粘弹性梁的工作也表明, 1\_模态和 2\_模态 Galerkin 截断模型的动力学性质定性一致, 但是在定量分析上有一些差别.

本文由[11] 给出了粘弹性 K mm n 板的积分\_偏微分数学模型, 板由服从 Boltzmann 叠加原理的线性粘弹性材料制成. 在空域上, 采用 Galerkin 方法, 将原数学模型简化为 2\_模态的近似积分模型. 在时域上, 通过引进新变量, 该简化模型可进一步化为一个常微分模型. 利用数值和分析的工具, 例如 Fourier 谱分析、相平面描述、Poincar  映射和最大 Liapunov 指数分析, 数值比较了 1\_模态和 2\_模态截断系统的动力学性质, 讨论面内周期激励下材料的粘弹性性质、加载的幅度和初值对板动力学行为的影响.

\* 收稿日期: 2001\_09\_04; 修订日期: 2002\_12\_16

基金项目: 上海市高等学校青年科学基金资助项目(01QN70); 上海市重点学科资助项目

作者简介: 张能辉(1970—), 男, 河北人, 副教授, 博士(E-mail: nhzhang@mail. shu. edu. cn).

## 1 问题的描述

假设板的材料服从 Boltzmann 叠加原理, 应变\_位移关系满足 Kùîmûñ 假设. 在简支边界条件下, 我们可得到粘弹性矩形板非线性动力分析的无量纲数学模型<sup>[1]</sup>:

$$\begin{cases} mW_{,tt} + e \leftarrow \Delta^2 W - [W, f] + \lambda W_{,xx} = 0 & (1a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta^2 f + e \leftarrow [W, W]/2 = 0 & (x, y, t) \in \Omega \times (0, t_0), & (1b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} W = \Delta W = 0, f = \Delta f = 0 & (x, y, t) \in \partial \Omega \times [0, t_0], & (1c, d) \end{cases}$$

$$\begin{cases} W = f \equiv 0 & (x, y, t) \in \Omega \times (-\infty, 0], & (1e) \end{cases}$$

$$\begin{cases} W|_{t=0} = W_0, W_{,t}|_{t=0} = V_0 & (x, y, t) \in \Omega_{\times t=0}, & (1f) \end{cases}$$

其中,  $m$  为材料的密度,  $W(x, y, t)$  和  $f(x, y, t)$  分别代表挠度和应力函数, 函数  $e(t)$  是粘弹性材料的松弛核,  $\lambda(t)$  为  $x$  方向的面内载荷,  $W_0(x, y)$  和  $V_0(x, y)$  分别是初始挠度和速度,  $\Omega = \{(x, y): 0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq 1\}$ ,  $\partial \Omega = \{(x, y): x = 0, l; y = 0, 1\}$ ,  $l$  为板的宽厚比,  $[W, f] = W_{,xy}f_{,yy} - 2W_{,xy}f_{,xy} + W_{,yy}f_{,xx}$ ,  $\Delta f = f_{,xx} + f_{,yy}$ . 公式(1)中所有变量包括时间  $t$  均已无量纲化. 符号  $\leftarrow$  代表 Boltzmann 算子, 定义为

$$a(t) \leftarrow b(t) = a(0)b(t) + \int_0^t \frac{da(t-\tau)}{d(t-\tau)} b(\tau) d\tau,$$

其中, 符号  $*$  代表卷积运算. 需要指出的是, 由于采用了积分本构关系, 边界条件(1c)和(1d)原来的形式也是积分\_偏微分型的, 这里已利用 Titchmarsh 定理<sup>[1]</sup>作了处理.

假设挠度  $W(x, y, t)$  满足下面的形式

$$W(x, y, t) = W_{11}(t) \sin(\pi x) \sin(\pi y) + W_{31}(t) \sin(3\pi x) \sin(\pi y), \quad (2)$$

其满足边界条件(1c). 代(2)入(1b), 我们容易得到应力函数

$$f(x, y, t) = e \leftarrow \left[ \frac{1}{32} W_{11}^2 (\cos 2\pi x + \cos 2\pi y) + W_{31}^2 \left( \frac{1}{288} \cos 6\pi x + \frac{9}{32} \cos 2\pi y \right) + W_{11} W_{31} \left( -\frac{1}{16} \cos 2\pi x + \frac{1}{64} \cos 4\pi x + \frac{1}{16} \cos 2\pi y \cos 2\pi x - \frac{1}{400} \cos 4\pi x \cos 2\pi y \right) \right], \quad (3)$$

而其满足边界条件(1d). 借助于 Galerkin 方法, 我们由(1a)可得到 2\_模式的截断模型

$$\begin{cases} mW_{11,tt} + C_{11}e \leftarrow W_{11} + B_{11}W_{11}e \leftarrow \left[ W_{11}^2 - W_{11}W_{31} + \frac{9}{2}W_{31}^2 \right] - B_{31}W_{31}e \leftarrow \left[ W_{11}^2 - \frac{201}{25}W_{11}W_{31} \right] - D_{11}\lambda W_{11} = 0, & (4a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} mW_{31,tt} + C_{31}e \leftarrow W_{31} - B_{31}W_{11}e \leftarrow \left[ W_{11}^2 - \frac{201}{25}W_{11}W_{31} \right] + B_{31}W_{31}e \leftarrow \left[ \frac{9}{2}W_{11}^2 + 41W_{31}^2 \right] - D_{31}\lambda W_{31} = 0, & (4b) \end{cases}$$

这里

$$C_{11} = 4\pi^4, C_{31} = 100\pi^4, B_{11} = \pi^4/8, B_{31} = \pi^4/16, D_{11} = \pi^2, D_{31} = 9\pi^2.$$

对于标准线性固体材料, 松弛函数  $e(t)$  满足下面的条件

$$\frac{de(t-\tau)}{d(t-\tau)} = -\varphi_1(t) \cdot \phi_1(\tau) = -[e_1 \exp(-\alpha_1 t)] \cdot [\alpha_1 \exp(\alpha_1 \tau)], \quad (5)$$

其中,  $e_1$  为材料参数,  $\alpha_1$  为松弛时间的倒数.

引进以下新变量

$$y_1 = W_{11}, y_2 = W_{11,t}, y_3 = \varphi_1 \int_0^t \phi_1(\tau) W_{11}(\tau) d\tau, y_4 = \varphi_1 \int_0^t \phi_1(\tau) W_{11}^2(\tau) d\tau,$$

$$y_5 = W_{31}, y_6 = W_{31,t}, y_7 = \varphi_1 \int_0^t \phi_1(\tau) W_{31}(\tau) d\tau, y_8 = \varphi_1 \int_0^t \phi_1(\tau) W_{31}^2(\tau) d\tau,$$

$$y_9 = \varphi_1 \int_0^t \phi_1(\tau) W_{11}(\tau) W_{31}(\tau) d\tau, y_0 = t,$$

则可得以下常微分方程

$$Y_t = F(Y), \quad (6)$$

其中

$$Y = \{y_0, y_1, \dots, y_9\}^T, F = \{F_0, F_1, \dots, F_9\}^T,$$

$$F_0 = 1, F_1 = y_2,$$

$$F_2 = -m^{-1} \left\{ C_{11}(y_1 - y_3) + B_{11}y_1 \left[ \left( y_1^2 - y_1y_5 + \frac{9}{2}y_5^2 \right) - \left( y_4 - y_9 + \frac{9}{2}y_8 \right) \right] - \right.$$

$$\left. B_{31}y_5 \left[ \left( y_1^2 - \frac{201}{25}y_1y_5 \right) - \left( y_4 - \frac{201}{25}y_9 \right) \right] - D_{11}ly_1 \right\},$$

$$F_3 = \alpha_1(e_1y_1 - y_3), F_4 = \alpha_1(e_1y_1^2 - y_4), F_5 = y_6,$$

$$F_6 = -m^{-1} \left\{ C_{31}(y_5 - y_7) - B_{31}y_1 \left[ \left( y_1^2 - \frac{201}{25}y_1y_5 \right) - \left( y_4 - \frac{201}{25}y_9 \right) \right] + \right.$$

$$\left. B_{11}y_5 \left[ \left( \frac{9}{2}y_1^2 + 4ly_5^2 \right) - \left( \frac{9}{2}y_4 + 4ly_8 \right) \right] - D_{31}ly_5 \right\},$$

$$F_7 = \alpha_1(e_1y_5 - y_7), F_8 = \alpha_1(e_1y_5^2 - y_8), F_9 = \alpha_1(e_1y_1y_5 - y_9).$$

而非线性系统(6)的初值为

$$\begin{cases} y_0(0) = 0, y_1(0) = W_{11}(0), y_2(0) = W_{11,t}(0), y_3(0) = 0, y_4(0) = 0, \\ y_5(0) = W_{31}(0), y_6(0) = W_{31,t}(0), y_7(0) = 0, y_8(0) = 0, y_9(0) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

在(4)式中,令  $W_{31}(t) \equiv 0$ , 则可得到 1\_模态截断系统

$$mW_{11,t} + C_{11}e^{-\lambda t} W_{11} + B_{11}W_{11}e^{-\lambda t} W_{11}^2 - D_{11}lW_{11} = 0 \quad (8)$$

同样,系统(8)也可化为以下常微分系统

$$\begin{cases} Y_t = F(Y), Y = \{y_0, y_1, y_2, y_3, y_4\}^T, F = \{F_0, F_1, F_2, F_3, F_4\}^T, \\ F_0 = 1, F_1 = y_2, F_3 = \alpha_1(e_1y_1 - y_3), F_4 = \alpha_1(e_1y_1^2 - y_4), \\ F_2 = -m^{-1} [C_{11}(y_1 - y_3) + B_{11}y_1(y_1^2 - y_4) - D_{11}ly_1] \end{cases} \quad (9)$$

相应于(9)的初值为

$$y_0(0) = 0, y_1(0) = W_{11}(0), y_2(0) = W_{11,t}(0), y_3(0) = 0, y_4(0) = 0 \quad (10)$$

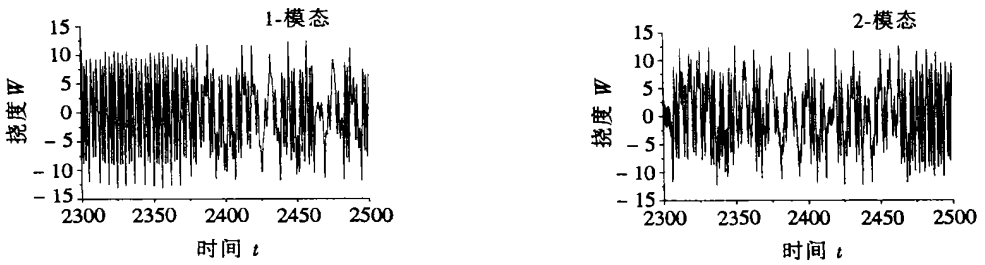
## 2 数值结果

令  $\lambda(t) = \lambda_0 \cos(\theta t)$ ,  $T_0 = 2\pi/\theta$ , 且参数  $\theta = 1$ ,  $m = 100$ ,  $e_1 = 0.9$ ,  $l = 1$ ,  $W_{31}(0) = 0$ ,  $W_{31,t}(0) = 0$ , 利用经典动力学方法, 在面内周期激励下考察参数  $\alpha_1$  和初值  $W_{11}(0)$ ,  $W_{11,t}(0)$  对方板动力学行为的影响. 首先, 使用变步长 Runge\_Kutta\_Merson 方法对(6)和(9)积分, 我们可得到时程曲线、连续的相平面描述和 Poincare 映射. 然后, 利用 Origin 软件中的 FFT 功能, 给出了功率谱. 最后, 计算了最大 Liapunov 指数. 同时, 比较了 1\_模态和 2\_模态 Galerkin 近似系统的差别.

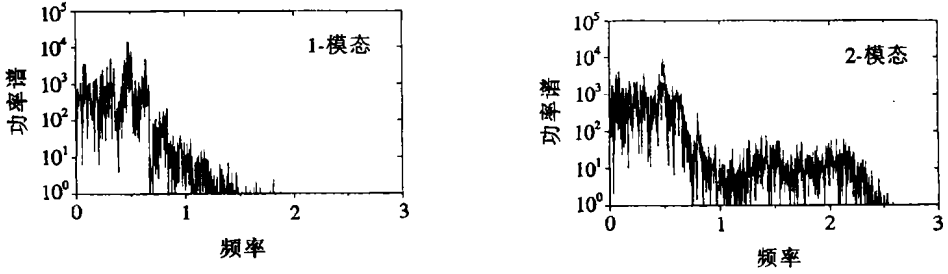
### (i) 材料参数 $\alpha_1$ 的影响

当  $\lambda_0 = 100$ ,  $W_{11}(0) = 0$ ,  $W_{11,t}(0) = 1$  时, 图 1~ 2 分别给出了板中心处各种动力学图.

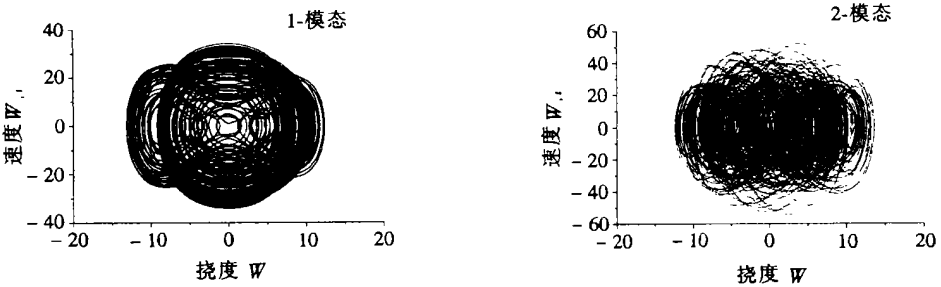
当  $\alpha_1 = 0.001$  时, 表 1 和图 1 表明, 尽管 2\_模态截断系统和 1\_模态截断系统的定量分析



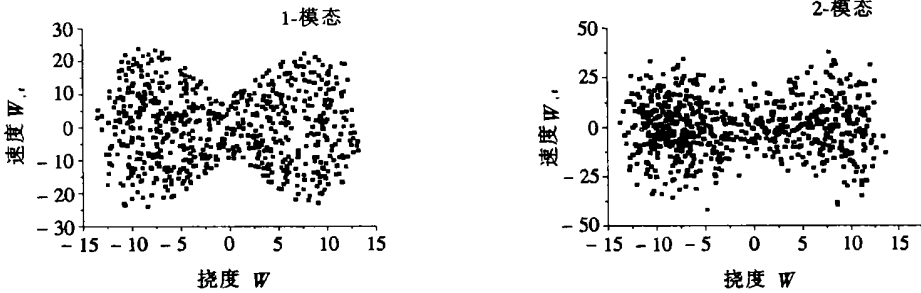
(a) 时程曲线



(b) 功率谱



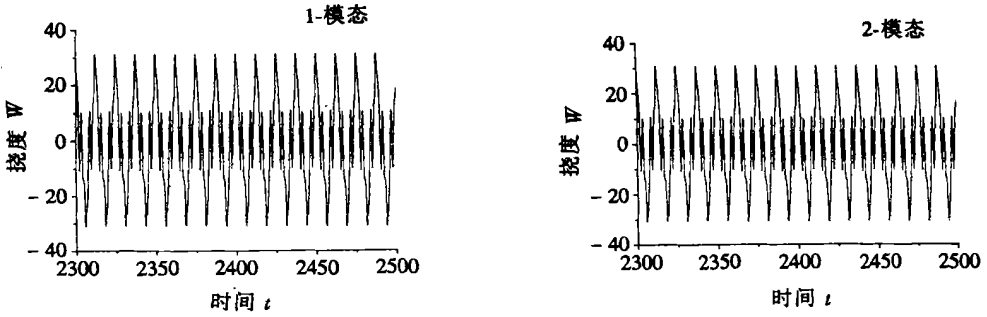
(c) 相平面



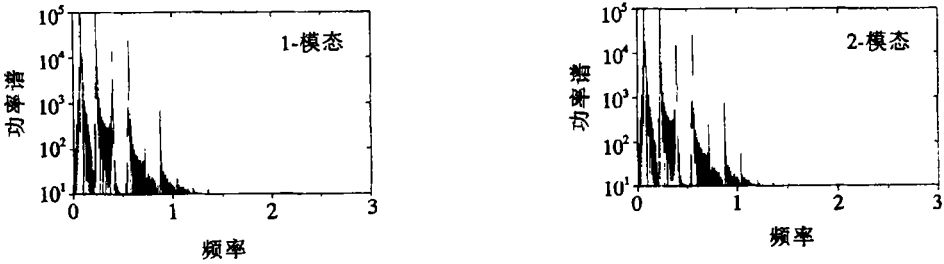
(d) Poincaré 映射

图 1  $\alpha_1 = 0.001$  时响应

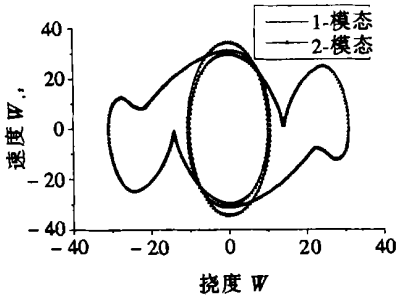
存在一些差别,但是定性结果却是一致的:系统是混沌的且具有一个不稳定的奇怪吸引子。而当  $\alpha_1 = 100$  时,基于两个不同截断系统的结论不仅定性一致,而且定量也一致:系统具有一个稳定的周期\_2吸引子。这表明  $\alpha_1$  的增大有助于粘弹性板的稳定性,而且似乎  $\alpha_1$  的值越大,Galerkin 截断的误差就越小。



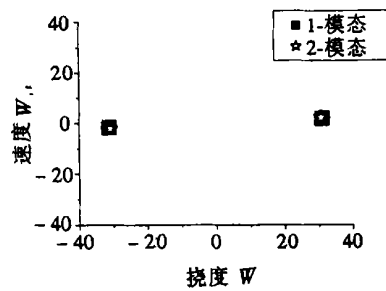
(a) 时程曲线



(b) 功率谱



(c) 相平面



(d) Poincaré 映射

图2  $\alpha_1 = 1$  时响应  
最大 Liapunov 指数

表 1

$\alpha_1$	1_模态截断系统		2_模态截断系统	
	$\sigma_{\max}$	状态	$\sigma_{\max}$	状态
0.001	0.19 > 0	混沌; 不稳定	0.17 > 0	混沌; 不稳定
100	0	周期 <sub>2</sub> ; 稳定	0	周期 <sub>2</sub> ; 稳定

(ii) 加载幅度  $\lambda_0$  的影响

当  $\alpha_1 = 0.1$ ,  $W_{11}(0) = 0$ ,  $W_{11,t}(0) = 1$  时, 考察  $\lambda_0$  对稳态解的影响. 由图 3 可看出, 由 1\_模态和 2\_模态截断系统得到的整体变化趋势基本是一致的. 对于  $\lambda_0 < 49$ , 系统有一个不稳定的不动点. 当  $\lambda_0 = 50$  时发生 Hopf 分叉, 然后随着  $\lambda_0$  的增加, 稳定的周期运动和不稳定的混沌运动交替出现. 但从两个不同截断系统所算得的周期和混沌之间的转换点却是不同的. 例如, 当  $\lambda_0 \in [150, 192]$  时, 1\_模态截断系统(6) 是周期的, 而当  $\lambda_0 \in [131, 188]$  时, 2\_模态截断系统(9) 是周期的. 换句话说, 当  $\lambda_0 \in [188, 192]$  时, 系统(6) 是周期的, 而系统(9) 却

是混沌的。

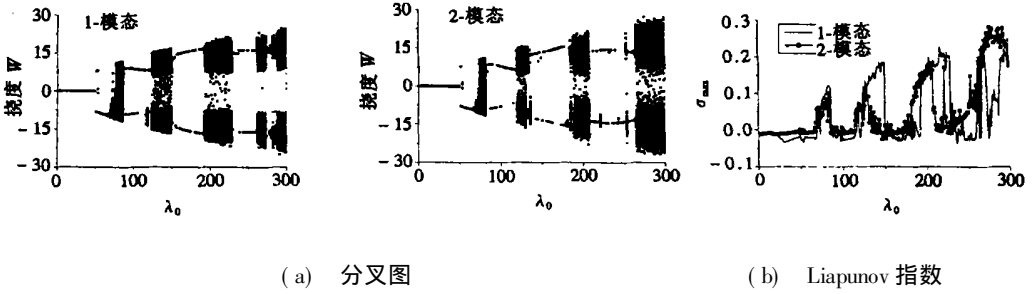


图 3 不同加载幅度下的响应

(ii) 初值  $W_{11}(0)$  和  $W_{11,t}(0)$  的影响

当  $\lambda_0 = 100, \alpha = 0.01$  时, 研究了不同初值下的响应。图 4 表明, 当固定  $W_{11}(0) = 1.2$ , 随着初值  $W_{11,t}(0)$  的变化, 系统(6) 或(9) 交替展现出周期和混沌的运动。尽管由 1\_ 模态和 2\_ 模态近似系统计算所得的  $\sigma_{max}$  值有所不同, 但变化趋势几乎一致。

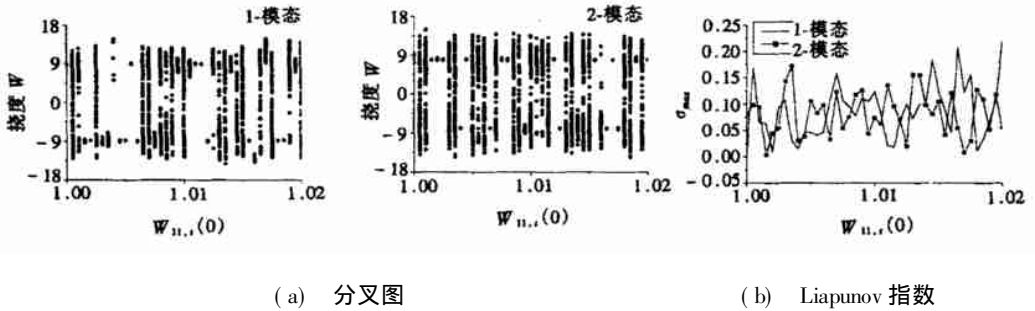


图 4  $W_{11}(0) = 1.2$  时的响应

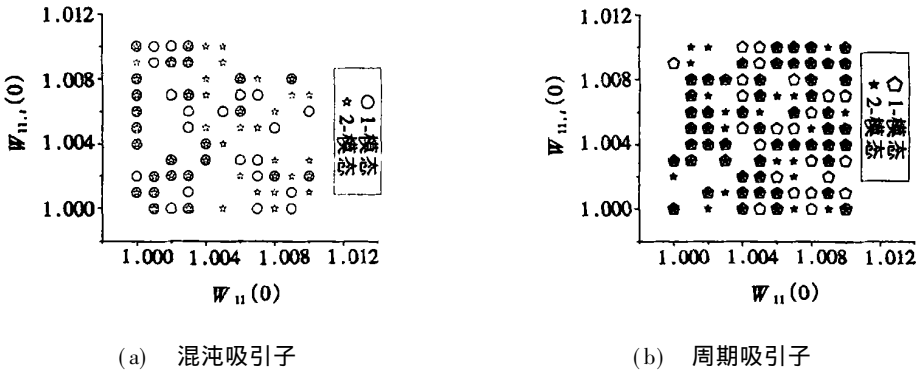


图 5 初值的影响

图 5 示出了不同初值下的定性结论。显然系统(6) 或(9) 对初值是敏感的, 在一些点从两个不同截断系统得到的定性结论是一致的, 而在其它点定性结论却是相反的。图 5 中被两种符号所占据表明 1\_ 模态和 2\_ 模态近似系统具有相同的定性结论, 而那些仅被一种符号所占据的点表明 2\_ 模态截断的定性结论不同于 1\_ 模态截断的定性结论。

### 3 结 论

借助于空域的 Galerkin 方法和时域的引进新变量方法, 2\_ 模态截断系统(9) 和 1\_ 模态截断系统(6) 可由在挠度粘弹性薄板的数学模型(1) 推得。就定性性质而言, 尽管在某些参数组合

下可能会得到相反的定性结论, 但由两个截断系统所获得的变化趋势却是一致。松弛时间  $1/\alpha_1$  的减少有助于粘弹性薄板的稳定性和减少 Galerkin 截断的误差。随着面内加载幅度  $\lambda_0$  和初值  $W_{11}(0)$ 、 $W_{11,t}(0)$  的变化, 方板交替展现出周期和混沌运动。尽管单模态模型(6)可以反映出主要的动力学性质, 但是如果关注定量分析的话, 则有必要研究更高阶的模式, 因为在估计周期和混沌之间的转换点时忽略高阶的模式会导致严重的误差。

### [参 考 文 献]

- [1] Bolotin V V. The Dynamic Stability of Elastic System [M]. San Francisco: Holden Day, 1964.
- [2] 程昌钧, 张能辉. 粘弹性矩形板的混沌和超混沌行为[J]. 力学学报, 1998, 30(6): 690—699.
- [3] ZHANG Neng\_hui, CHENG Chang\_jun. Chaotic behavior of viscoelastic plates in supersonic flow[A]. In: CHIEN Wei\_zang, CHENG Chang\_jun, DAI Shi\_qiang, et al Eds Proc 3rd Inter Conf on Nonlinear Mech [C]. Shanghai: Shanghai University Press, 1998, 432—436.
- [4] ZHU Yuan\_yuan, ZHANG Neng\_hui, Miura F. Dynamical behavior of viscoelastic rectangular plates [A]. In: CHIEN Wei\_zang, CHENG Chang\_jun, DAI Shi\_qiang, et al Eds Proc 3rd Inter Conf on Nonlinear Mech [C]. Shanghai: Shanghai University Press, 1998, 445—450.
- [5] 张能辉, 程昌钧. 面内周期激励下粘弹性矩形板的混沌和周期行为[J]. 固体力学学报, 2000, 21(增刊): 160—164.
- [6] 陈立群, 程昌钧. 粘弹性板混沌振动的输出变量反馈线性化控制[J]. 应用数学和力学, 1999, 20(12): 1229—1234.
- [7] Aboudi J, Cederbaum G, Elishakoff I. Dynamic stability analysis of viscoelastic plates by Liapunov exponents[J]. J Sound Vib, 1990, 139(3): 459—467.
- [8] Touati D, Cederbaum G. Dynamic stability of nonlinear viscoelastic plates[J]. Int J Solids Struct, 1994, 31(17): 2367—2376.
- [9] Wojciech S, Klosowicz M. Nonlinear vibration of a simply supported viscoelastic inextensible beam and comparison of methods[J]. Acta Mechanica, 1990, 85(1): 43—54.
- [10] CHEN Li\_qun, CHENG Chang\_jun. Dynamical behavior of nonlinear viscoelastic columns based on 2\_order Galerkin truncation[J]. Mech Res Comm, 2000, 27(4): 413—419.
- [11] ZHANG Neng\_hui, CHENG Chang\_jun. Non\_linear mathematical model of viscoelastic thin plates with its applications[J]. Comput Methods Appl Mech Enng, 1998, 165(4): 307—319.

# Two\_Mode Galerkin Approach in Dynamic Stability Analysis of Viscoelastic Plates

ZHANG Neng\_hui<sup>1,2</sup>, CHENG Chang\_jun<sup>1,2</sup>

(1. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai 200072, P. R. China;

2. Department of Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200436, P. R. China)

**Abstract:** The dynamic stability of viscoelastic thin plates with large deflections was investigated by using the largest Liapunov exponent analysis and other numerical and analytical dynamic methods. The material behavior was described in terms of the Boltzmann superposition principle. The Galerkin method was used to simplify the original integro-partial-differential model into a two-mode approximate integral model, which further reduced to an ordinary differential model by introducing new variables. The dynamic properties of one-mode and two-mode truncated systems were numerically compared. The influence of viscoelastic properties of the material, the loading amplitude and the initial values on the dynamic behavior of the plate under in-plane periodic excitations was discussed.

**Key words:** viscoelastic plate; dynamic stability; von K rn n's hypothesis; Galerkin method; chaos; Hopf bifurcation