应用数学和力学, 第 24 卷 第 3 期(2003 年 3 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2003) 03_0229_05

分数外微分在三维空间中的应用

陈 勇, 闫振亚, 张鸿庆

(大连理工大学 应用数学系, 大连 116024)

(我刊编委张鸿庆来稿)

摘要: 首先介绍了分数微积分和分数微分形式 讨论了在原点处对曲线坐标的分数外微分变换, 并且获得了从三维卡氏坐标到球面坐标和柱面坐标的两个分数微分变换 特别地, 当 $v = m = 1$ 时, 这两个分数微分变换约化的结果与通过外微积分获得的结果是一致的

关 键 词: 分数微分形式; 卡氏坐标; 球面坐标; 柱面坐标
中图分类号: O175 文献标识码: A

引 言

一般地, 拓展微分和积分的意义在于: 是否能对微分和积分的阶数 $d^n y / dx^n$ 拓展到 n 为任意数(如无理数, 分数或复数) ? 在 1695 年 Leibniz 首先提出这个概念, Eular 和 Fourier 也曾提到任意阶的微分, 但他们未曾给过任何应用和例子 而首次应用分数微积分当属于 Abel, 1823 年他将分数微积分应用在 Tautochrone 积分方程的求解公式中 Abel 的解引起了 Liouville 的注意, 1832 年他首次尝试地给出了一个分数微积分的定义 1847 年 Riemann 当时曾作为学生他发表了一篇论文, 其中他给出了分数微分运算的定义 以 Riemann 和 Liouville 名字命名的分数微分定义可参考文献[1]

目前, 科学家们已经将分数微积分应用到许多领域: 流变学, 数量生物学, 电子化学, 散射理论, 扩散理论, 交通理论, 概率势理论和弹性理论[1] 近年来, 通过将其建立在不同的分次代数上, 外微积分被拓展[2, 3] 另一种企图拓展是基于非结合几何而建立的[4, 5] 最近, Kathlee 和 Mark 给出了分数外导数[6], 且发现了分数微分形式的空间为有限维和无限微向量空间 闭形式和恰当形式被推广到新的分数形式空间, 并且在特殊情形下得出了闭的和可积条件 另外还得到了坐标变换规律

1 曲线坐标变换和两个重要例子

本文将使用分数和微分的 Riemann_Liouville 的定义:

$$\frac{{}^{q}f(x)}{(\ (x-a))^{q}}=\frac{1}{(-q)}{}_{a}^{x}\frac{f(\ )\,\mathrm{d}}{(x-\ )^{q+1}}\qquad(\mathrm{Re}(q)<0),\tag{1}$$

收稿日期: 2001_10_09; 修订日期: 2002_06_08
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10072013) ; 重点基础研究发展规划项目(G1998030600)
作者简介: 陈勇(1960) , 男, 广东人, 博士(E_mail: chenyong@ dlut. edu. cn)

$$\frac{\partial^q f(x)}{(\partial(x-a))^q}=\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left[\frac{1}{\Gamma(n-q)}\int_a^x\frac{f(\xi)\mathrm{d}\xi}{(x-\xi)^{q-n+1}}\right]\quad\left(\frac{\mathrm{Re}(q)\ge 0}{n>q(n\text{ 是整数})}\right)\tag{2}$$

来考虑问题,其中 $\Gamma(q)$ 为参数 q 的Gamma函数,[即,$\Gamma(n+1)=n!$ 对所有的正整数 n],参数 q 是积分或微分的阶数,且允许为复数,正实数值 q 表示微分,负实数值 q 表示积分,式(1)是一个分数积分和式(2)是一个分数导数

本文仅考虑 q 为正实数值的情形 如果偏导数允许为分数阶数,一个分数外导数被定义为:

$$\mathrm{d}^v=\sum_{i=1}^n\mathrm{d}x_i\frac{\partial^v}{(\partial(x_i-a_i))^v}\tag{3}$$

其中:下标 i 表示坐标数,上标 v 表示分数坐标微分的阶数,a_i 是导数的初始点 为了方便起见,分数导数的初始点取为原点

设 $\{x_i\}$ 和 $\{y_i\}$ 是两个坐标系统,在它们之间在 $p\in E^n$ 的领域中,存在一一映射,取 $\{x_i\}$ 为卡氏坐标 $\{y_i\}$ 为曲线坐标 设 $\{x_i\}$ 是 $\{y_i\}$ 的光滑函数,

$$x_i=x_i(y),\tag{4}$$

对方程(4)两边取外导数,得

$$\mathrm{d}x_i=\sum_{i=1}^n\mathrm{d}y_l\frac{\partial x_i}{\partial y_l}\tag{5}$$

在这两个坐标系中,分数外导数 d^v 取如下形式:

$$\mathrm{d}^v=\sum_{i=1}^n\mathrm{d}x_i\frac{\partial^v}{\partial x_i^v},\tag{6}$$

$$\mathrm{d}^v=\sum_{i=1}^n\mathrm{d}y_i\frac{\partial^v}{\partial y_i^v}\tag{7}$$

从而得到,

$$\sum_{i=1}^n\mathrm{d}x_i\frac{\partial^v}{\partial x_i^v}=\sum_{i=1}^n\mathrm{d}y_i\frac{\partial^v}{\partial y_i^v}\tag{8}$$

考虑函数 f_k,将在 E^n 映射到复数,

$$f_k=\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(v+1)}\left(\sum_{i=1/i\ne k}^n x_i\right)^{v-m}x_k^v,\tag{9}$$

易得到,

$$\frac{\partial^v f_k}{(\partial x_i)^v}=0\quad(i\ne k)\text{ 即}f_k\in\mathrm{Ker}\left(\frac{\partial^v}{(\partial x_i)^v}\right)\tag{10}$$

和

$$\frac{\partial^v f_k}{(\partial x_i)^v}=1\quad(i=k)\tag{11}$$

对等式(9)两边取分数外导数(8),在两个不同坐标系中,可得到以下变换规律

$$\mathrm{d}x_k^v=\sum_{i=1}^n\frac{\mathrm{d}y_i^v}{\Gamma(v+1)}\frac{\partial^v}{(\partial y_i)^v}\left(\left(\sum_{j=1/j\ne k}^n x_j(y)\right)^{v-m}x_k(y)^v\right)\tag{12}$$

下面,我们考虑在分数微分下,从三维卡氏坐标到球面坐标以及柱面坐标的坐标变换:

例1 球面坐标

考虑球面坐标的坐标变换

$$\begin{cases} x_1 = r\sin(\ )\cos(\ ), \\ x_2 = r\sin(\ )\sin(\ ), \qquad (r \quad 0, 0 \qquad , 0 \qquad) \\ x_3 = r\cos(\ ) \end{cases} \tag{13}$$

那么,分数微分的坐标变换为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x_1^v = {} & \frac{(3v-2m+1)}{(v+1)\ (2v-2m+1)} \frac{\cos^{v-m}(\ )\cos^{v}(\ )}{\sin^{m-2v}(\ )\sin^{m-v}(\ )} r^{2v-2m}\mathrm{d}r^v + \\ & \frac{r^{3v-2m}}{(v+1)} \frac{v}{(\quad)^v}\left(\frac{\cos^{v-m}(\ )\cos^{v}(\ )}{\sin^{m-2v}(\ )\sin^{m-v}(\ )}\right)\mathrm{d}^{\ v} + \\ & \frac{r^{3v-2m}}{(v+1)} \frac{v}{(\quad)^v}\left(\frac{\cos^{v-m}(\ )\cos^{v}(\ )}{\sin^{m-2v}(\ )\sin^{m-v}(\ )}\right)\mathrm{d}^{\ v}, \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x_2^v = {} & \frac{(3v-2m+1)}{(v+1)\ (2v-2m+1)} \frac{\cos^{v-m}(\ )\cos^{v-m}(\ )\sin^{v}(\ )}{\sin^{m-2v}(\ )} r^{2v-2m}\mathrm{d}r^v + \\ & \frac{r^{3v-2m}}{(v+1)} \frac{v}{(\quad)^v}\left(\frac{\cos^{v-m}(\ )\cos^{v-m}(\ )\sin^{v}(\ )}{\sin^{m-2v}(\ )}\right)\mathrm{d}^{\ v} + \\ & \frac{r^{3v-2m}}{(v+1)} \frac{v}{(\quad)^v}\left(\frac{\cos^{v-m}(\ )\cos^{v-m}(\ )\sin^{v}(\ )}{\sin^{m-2v}(\ )}\right)\mathrm{d}^{\ v}, \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x_3^v = {} & \frac{(3v-2m+1)}{(v+1)\ (2v-2m+1)} \frac{\cos^{v-m}(\ )\cos^{v}(\ )}{\sin^{m-v}(\ )\sin^{2m-2v}(\ )} r^{2v-2m}\mathrm{d}r^v + \\ & \frac{r^{3v-2m}}{(v+1)} \frac{v}{(\quad)^v}\left(\frac{\cos^{v-m}(\ )\cos^{v}(\ )}{\sin^{m-v}(\ )\sin^{2m-2v}(\ )}\right)\mathrm{d}^{\ v} + \\ & \frac{r^{3v-2m}}{(v+1)} \frac{v}{(\quad)^v}\left(\frac{\cos^{v-m}(\ )\cos^{v}(\ )}{\sin^{m-v}(\ )\sin^{2m-2v}(\ )}\right)\mathrm{d}^{\ v} \end{aligned} \tag{16}$$

对 $v = m = 1$, 我们从(14)~(16)得到

$$\begin{cases} \mathrm{d}x_1 = \sin(\ )\cos(\ )\mathrm{d}r + r\cos(\ )\cos(\ )\mathrm{d}\ - r\sin(\ )\sin(\ )\mathrm{d}\ , \\ \mathrm{d}x_2 = \sin(\ )\sin(\ )\mathrm{d}r + r\cos(\ )\sin(\ )\mathrm{d}\ + r\sin(\ )\cos(\ )\mathrm{d}\ , \\ \mathrm{d}x_3 = \cos(\ )\mathrm{d}r - r\sin(\ )\mathrm{d} \end{cases} \tag{17}$$

即

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}x_1 \\ \mathrm{d}x_2 \\ \mathrm{d}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\ )\cos(\ ) & r\cos(\ )\cos(\ ) & -r\sin(\ )\sin(\ ) \\ \sin(\ )\sin(\ ) & r\cos(\ )\sin(\ ) & r\sin(\ )\cos(\ ) \\ \cos(\ ) & -r\sin(\ ) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}r \\ \mathrm{d} \\ \mathrm{d} \end{pmatrix} \tag{18}$$

这个结果和通常的在球面坐标和三维空间卡氏坐标之间的外微分变换是一样的

例 2 柱面坐标

考虑柱面坐标的坐标变换

$$\begin{cases} x_1 = r\cos(\ ), \\ x_2 = r\sin(\ ), \\ x_3 = z \end{cases} \tag{19}$$

由(12),可以得到分数微分的坐标变换

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x_1^v = {} & \frac{(2v-m+1)}{(v+1)\ (v-2m+1)} \frac{z^{v-m}\cos^{v}(\ )}{\sin^{m-v}(\ )} r^{v-m}\mathrm{d}r^v + \\ & \frac{r^{2v-m}z^{v-m}}{(v+1)} \frac{v}{(\quad)^v}\left(\frac{\cos^{v}(\ )}{\sin^{m-v}(\ )}\right)\mathrm{d}^{\ v} + \end{aligned}$$

$$\frac{r^{2v-m}\ \ (v-m+1)}{z^m\ (1-m)\ \ (v+1)}\frac{\cos^v(\ \ )}{\sin^{m-v}(\ \ )}\mathrm{d}z^v, \tag{20}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x_2^v = & \frac{(2v-m+1)}{(v+1)\ \ (v-2m+1)}\frac{z^{v-m}\sin^v(\ \ )}{\cos^{m-v}(\ \ )}r^{v-m}\mathrm{d}r^v + \\ & \frac{r^{2v-m}z^{v-m}}{(v+1)}\frac{\ \ ^v}{(\ \ \ )^v}\left(\frac{\sin^v(\ \ )}{\cos^{m-v}(\ \ )}\right)\mathrm{d}\ ^v + \\ & \frac{r^{2v-m}\ \ (v-m+1)}{z^m\ (1-m)\ \ (v+1)}\left(\frac{\sin^v(\ \ )}{\cos^{m-v}(\ \ )}\right)\mathrm{d}z^v,\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x_3^v = & \frac{(2v-m+1)}{(v+1)\ \ (v-2m+1)}\frac{z^{v-m}\cos^{v-m}(\ \ )}{\sin^{m-v}(\ \ )}r^{v-2m}\mathrm{d}r^v + \\ & \frac{r^{2v-2m}z^v}{(v+1)}\frac{\ \ ^v}{(\ \ \ )^v}\left(\frac{\cos^{v-m}(\ \ )}{\sin^{m-v}(\ \ )}\right)\mathrm{d}\ ^v + \\ & \frac{r^{2v-2m}\cos^{v-m}(\ \ )}{\sin^{m-v}(\ \ )}\mathrm{d}z^v\end{aligned} \tag{22}$$

当 $v = m = 1$ 时, 从(21)~(22)我们得到

$$\begin{cases}\mathrm{d}x_1 = \cos(\ \ )\mathrm{d}r - r\sin(\ \ )\mathrm{d}\ \ , \\ \mathrm{d}x_2 = \sin(\ \ )\mathrm{d}r + r\cos(\ \ )\mathrm{d}\ \ , \\ \mathrm{d}x_3 = \mathrm{d}z\end{cases} \tag{23}$$

即

$$\begin{pmatrix}\mathrm{d}x_1 \\ \mathrm{d}x_2 \\ \mathrm{d}x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\ \ ) & -r\sin(\ \ ) & 0 \\ \sin(\ \ ) & r\cos(\ \ ) & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}r \\ \mathrm{d}\ \ \\ \mathrm{d}z\end{pmatrix} \tag{24}$$

这个结果和通常的在柱面坐标和三维空间卡氏坐标之间的外微分变换是一样的

总之, 我们分别发现了从三维卡氏坐标到球面坐标和柱面坐标的分数微分的两个坐标变换公式, 特别地, 对 $m = v = 1$, 以上的两个坐标变换同通过外微积分获得的结果是一样的

[参 考 文 献]

[1] Dold A, Eckmann B. Fractional Calculus and Its Aapplications[M]. Berlin: Springer_Verlag, 1975.

[2] Kerner R. Z_3_graded exterior differential calculus and gauge theories of higher order[J]. Lett Math Phys, 1996, **36**(5): 441 454.

[3] Dubois_Violette M. Generalized homologies for $d^N = 0$ and graded q_differential algebras[J]. Contemp Math, 1998, **219**(1): 69 79.

[4] Coquereaux R. Differentials of higher order in noncommutative differential geometry[J]. Lett Math Phys, 1997, **42**(3): 241 259.

[5] Modore J. An Introduction to Noncommutative Differential Geometry and Its Applications[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

[6] Cottrill_Shepherd K, Naber M. Fractional differential forms[J]. J Math Phys, 2001, **42**(5): 2203 2212.

Applications of Fractional Exterior Differential in Three_Dimensional Space

CHEN Yong, YAN Zhen_ya, ZHANG Hong_qing
(Department of Applied Mathematics, Dalian University of Technology,
Dalian 116024, P.R. China)

Abstract: A brief survey of fractional calculus and fractional differential forms was firstly given. The fractional exterior transition to curvilinear coordinate at the origin were discussed and the two coordinate transformations for the fractional differentials for three_dimensional Cartesian coordinates to spherical and cylindrical coordinates are obtained, respectively. In particular, for $v = m = 1$, the usual exterior transformations, between the spherical coordinate and Cartesian coordinate, as well as the cylindrical coordinate and Cartesian coordinate, are found respectively, from fractional exterior transformation.

Key words: fractional differential form; Cartesian coordinate; spherical coordinate; cylindrical coordinate