应用数学和力学,第 24 卷 第 3 期(2003 年 3 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2003) 03_0282_07

Lur' e 系统的扰动抑制分析*

郝 飞[1,2], 楚天广[1,2], 黄 琳[1,2]

(1. 北京大学 力学与工程科学系, 北京 100871; 2. 北京大学 系统与控制研究中心, 北京 100871)

(叶庆凯推荐)

摘要: 用不变集方法分析了有范数摄动的单输入单输出(SISO) Lur' e 系统持续有界扰动的抑制问题• 通过 Liapunov 函数得到了用一组线性矩阵不等式(LMI) 条件给出的扰动抑制和绝对稳定性结果• 分析了这一条件的可行性, 并用算例予以验证• 还给出了鲁棒椭圆体吸引子的估计•

关 键 词: Lur' e 系统; 扰动抑制; L_1_性能; 鲁棒吸引子

中图分类号: TP273; O175 文献标识码: A

引 言

线性系统外来信号(有限能量或有界幅值)的扰动抑制问题和对象不确定性的鲁棒性问题已被广泛研究且有很多成果(见[1]~[6])• 特别地, 对有限能量扰动使用 Riccati 方程和 LMI 方法给出了一系列扰动抑制结果[2]• Abedor 等人在[4]中还研究了线性系统对持续有界扰动的抑制问题• 关于非线性情况, 饱和受限系统和 Lur' e 系统的扰动抑制问题也有相应的研究[2,5], 且主要考虑了能量有限的外来扰动信号的情况• Lur' e 系统是一类重要的系统, 其绝对稳定性的研究较多, 已经有相当深刻的结果[7,8]• 同样地, 考虑外来持续有界扰动(幅值有界信号)对 Lur' e 系统的结果是有实际意义的•

本文首先考虑持续有界扰动对 Lur' e 系统的影响, 研究了 SISO 的不确定性 Lur' e 系统对持续有界扰动的抑制• 通过用二次型或二次型加积分的 Liapunov 函数, 同时处理了绝对稳定性和扰动抑制问题分析• 得到了对外来持续有界扰动输入幅值的增益小于指定性能水平的基于线性矩阵不等式的抑制条件• 最后给出了对对象不确定性的鲁棒吸引子的估计• 这些结果可以直接推广到多输入多输出(MIMO) Lur' e 系统•

文中用以下符号: $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$, $\sigma(\boldsymbol{A})$, $\boldsymbol{A}_i$ 分别表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置、最大奇异值和第 i 行向量• $\boldsymbol{I}$ 表示有合适维数的单位矩阵•

1 预 备 知 识

考虑具有加性外来扰动的单输入单输出 Lur' e 系统:

---

* 收稿日期: 2001_09_29; 修订日期: 2002_09_30
基金项目: 国家重点基础研究专项经费资助项目(G1998020302); 自然科学基金资助项目(19872005, 69925307)
作者简介: 郝飞(1972—), 男, 内蒙古化德人, 博士(E_mail: fhao@mech.pku.edu.cn)•

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu + Bw, \\ y = c^{\mathrm{T}} x, \\ z = Cx + Dw, \end{cases} \tag{1}$$

其中控制 u 属于扇区非线性类(记为 $u \in \mathscr{F}[0, \mu], \mu > 0$), 即 $u = \phi(\cdot)$ 满足 $0 \leqslant \phi(y)/y \leqslant \mu, y \in \mathbf{R}$. 对 $\phi(y) \in \mathscr{F}[0, \mu]$, 有 $\phi^2(y) \leqslant \mu^2 y^2$. 在系统(1)中 $x \in R^n, w \in \mathscr{W} \subset R^p$ 分别是状态、外来扰动向量. A, B, C, D 分别是具有相容维数的常数矩阵. b, c 是常数向量. $\mathscr{W} = \{w \in R^p : \|w\|_\infty \leqslant 1\}$ 是允许外来扰动集.

称集合 S 为系统的正不变集, 是指若初始状态属于该集, 则以后任意时间的状态轨迹都在该集中. 一个系统的原点可达集(记为 $R_\infty(0)$) 是指由系统的原点出发的对所有允许的控制和扰动的状态轨迹所形成的集合. 它是包含原点的关于相应系统的最小正不变闭集. 对有零初始条件的不受控系统(1)(即 $b = 0, x(0) = 0$), 若对所有 $w \in \mathscr{W}$ 有 $\|z\|_\infty \leqslant \rho$ 成立, 则称不受控系统(1)具有 ρ_性能. 引入 L_1 范数的 ρ_性能集如下:

$$\Omega(\rho) = \{x : |C_i x| \leqslant \rho - \delta_i\} \qquad (i = 1, \cdots, m),$$

其中 $\delta_i = \|D_i\|_1$(见[1, 3]). 对系统(1), 由于 $\|Cx + Dw\|_\infty \leqslant \max_i\{|C_i x| + \|D_i w\|_\infty\} \leqslant \max_i\{|C_i x| + \delta_i\} \leqslant \rho$, 所以只要原点可达集包含在 $\Omega(\rho)$ 中, 就能说明系统具有 ρ_性能.

对系统(1), 若对任意的 $u \in \mathscr{F}[0, \mu]$ 使得原点可达集包含在 $\Omega(\rho)$ 中, 则称系统(1)具有鲁棒 ρ_性能. 等价地: 系统(1)有鲁棒 ρ_性能当且仅当 $R_\infty(0) \subset \Omega(\rho)$. 若固定 $u \in \mathscr{F}[0, \mu]$ 且闭环系统原点可达集包含在 $\Omega(\rho)$ 中, 则称(1)与 u 构成的闭环系统具有 ρ_性能.

称集合 S 为系统(1)的鲁棒吸引子是指对任意的允许扰动 w 和 $u \in \mathscr{F}[0, \mu]$ 从该集外部的任意状态出发的状态轨迹最终进入 S 中. 对不确定系统, 可以类似地定义鲁棒吸引子. 显然, 鲁棒吸引子是鲁棒正不变集.

本文的主要目的是分析系统的绝对稳定性和对外扰及 $u \in \mathscr{F}[0, \mu]$ 具有鲁棒 ρ_性能, 并且给出系统关于外扰和 $u \in \mathscr{F}[0, \mu]$ 鲁棒的椭圆体吸引子.

下面给出本文中常用的两个不等式, 其证明显然.

引理 1 对任意正实数 α, β, 下列不等式成立:

$$2x^{\mathrm{T}} PBw \leqslant \frac{1}{\alpha} x^{\mathrm{T}} PBB^{\mathrm{T}} Px + \alpha w^{\mathrm{T}} w,$$

$$2x^{\mathrm{T}} Pbu \leqslant \frac{1}{\beta} x^{\mathrm{T}} Pbb^{\mathrm{T}} Px + \beta\mu^2 x^{\mathrm{T}} cc^{\mathrm{T}} x.$$

2 扰动抑制分析

对椭圆体 $S = \{x : x^{\mathrm{T}} Px \leqslant 1, P = P^{\mathrm{T}} > 0\}$, 要判断 S 为鲁棒吸引子时, 只要证明对 S 外的任意状态 x 有 $\dot{V}(x) < 0$ 即可, 其中 $V(x) = x^{\mathrm{T}} Px$.

定理 1 若存在正定矩阵 P, 和实数 $\alpha > 0, \beta > 0$ 满足下列条件:

$$\begin{bmatrix} PA + A^{\mathrm{T}} P + \alpha P + \beta\mu^2 cc^{\mathrm{T}} & PB & Pb \\ B^{\mathrm{T}} P & -\alpha I & 0 \\ b^{\mathrm{T}} P & 0 & -\beta \end{bmatrix} < 0. \tag{2}$$

则椭圆体 $S = \{x : x^{\mathrm{T}} Px \leqslant 1\}$ 是系统(1)的鲁棒吸引子. 若 P 还满足

$$\begin{bmatrix} P & \frac{1}{\rho-\delta_i}C_i^{\mathrm{T}} \\ \frac{1}{\rho-\delta_i}C_i & 1 \end{bmatrix} \geqslant \mathbf{0}, \tag{3}$$

则 $S \subset \Omega(\rho)$. 从而系统(1) 具有鲁棒 ρ_性能. 此外, 由条件(2) 可得无外扰系统(1) 是绝对稳定的.

证明 考虑 $V(x)$ 沿系统(1) 解的导数. 利用扇区非线性函数的特性及引理1 得

$$\dot{V}|_{(1)}(x) = x^{\mathrm{T}}P(Ax + bu + Bw) + (Ax + bu + Bw)^{\mathrm{T}}Px \leqslant$$

$$x^{\mathrm{T}}(PA + A^{\mathrm{T}}P)x + \frac{1}{\beta}x^{\mathrm{T}}Pbb^{\mathrm{T}}Px + \beta\mu^2 x^{\mathrm{T}}cc^{\mathrm{T}}x + \frac{1}{\alpha}x^{\mathrm{T}}PBB^{\mathrm{T}}Px + \alpha w^{\mathrm{T}}w \leqslant$$

$$x^{\mathrm{T}}\left[PA + A^{\mathrm{T}}P + \frac{1}{\beta}Pbb^{\mathrm{T}}P + \beta\mu^2 cc^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\alpha}PBB^{\mathrm{T}}P + \alpha P\right]x - \alpha x^{\mathrm{T}}Px + \alpha.$$

因为对 $x \notin S$, 有 $x^{\mathrm{T}}Px > 1$, 故要有 $\dot{V}|_{(1)}(x) < 0$, 只要

$$PA + A^{\mathrm{T}}P + \frac{1}{\beta}Pbb^{\mathrm{T}}P + \beta\mu^2 cc^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\alpha}PBB^{\mathrm{T}}P + \alpha P < \mathbf{0}.$$

由Schur 补, 这等价于条件(2) 成立. 这表明 S 是系统(1) 的鲁棒吸引子. 此外, 由条件(2) 及 $\frac{1}{\alpha}PBB^{\mathrm{T}}P + \alpha P \geqslant \mathbf{0}$, 我们有

$$PA + A^{\mathrm{T}}P + \frac{1}{\beta}Pbb^{\mathrm{T}}P + \beta\mu^2 cc^{\mathrm{T}} < \mathbf{0}.$$

这表明系统(1) (当 $w = 0$ 时) 是绝对稳定的.

另一方面, 用 Schur 补可将LMI(3) 转化为

$$P - \frac{1}{(\rho-\delta_i)^2}C_i^{\mathrm{T}}C_i \geqslant \mathbf{0}.$$

于是当 $x \in S$, 有 $|C_i x|^2 \leqslant (\rho - \delta_i)^2$, 这表明 $S \subset \Omega(\rho)$. 由于 S 是包含原点闭的鲁棒吸引子, 故为鲁棒正不变集, 因而有 $R_\infty(0) \subset S \subset \Omega(\rho)$. 这表明系统(1) 具有鲁棒 ρ_性能.

□

注1 对固定的 $\alpha > 0$, 定理1中的条件(2) 是关于 P 的LMI. A 是稳定的, 记 $\lambda_m = -\max(\mathrm{Re}\lambda(A))$ (其中 $\mathrm{Re}\lambda(A)$ 表示矩阵的特征值的实部), 则存在 $\alpha \in (0, \lambda_m)$ 使得 $A + (\alpha/2)I =: \bar{A}$ 是稳定的. 对半正定矩阵 $B/\sqrt{\alpha}(B/\sqrt{\alpha})^{\mathrm{T}} + b/\sqrt{\beta}(b/\sqrt{\beta})^{\mathrm{T}}$, 一定存在矩阵 $\bar{B}$ 使得 $\bar{B}\bar{B}^{\mathrm{T}} = B/\sqrt{\alpha}(B/\sqrt{\alpha})^{\mathrm{T}} + b/\sqrt{\beta}(b/\sqrt{\beta})^{\mathrm{T}}$. 令 $\bar{C} = \mu\sqrt{\beta}c$. 由有界实引理(见[2, 8] 及其中文献), 系统 Σ_1:

$$\begin{cases} \dot{x} = \bar{A}x + \bar{B}u, \\ y = \bar{C}x \end{cases}$$

的传递函数 $H(s) = \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B}$ 的H_∞ 范数小于1(即系统是有界实的, 即对任意 $\mathrm{Re}s \geqslant 0$ 有 $H^*(s)H(s) \leqslant I$) 等价于

$$PA + A^{\mathrm{T}}P + \frac{1}{\beta}Pbb^{\mathrm{T}}P + \beta\mu^2 cc^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\alpha}PBB^{\mathrm{T}}P + \alpha P =$$

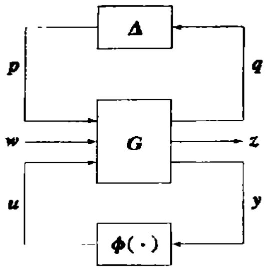
$$P\bar{A} + \bar{A}^{\mathrm{T}}P + P\bar{B}\bar{B}^{\mathrm{T}}P + \bar{C}^{\mathrm{T}}\bar{C} < \mathbf{0}.$$

由Schur 补, 这又等价于(2). 于是给出条件(2) 的频域解释, 从而使得条件易于检验. 另外, 定理1 同时给出了动态性能(绝对稳定性) 和扰动抑制的条件.

注2 由定理1 的证明知, 若系统(1) 中取 $u = \mu c^{\mathrm{T}}x$ 和 $u = \mathbf{0}$ 时的闭环系统同时具有 ρ_性能, 则对任意的 $u \in \mathscr{F}[0, \mu]$, 系统具有鲁棒 ρ_性能. 因此, 定理1 给出了一个顶点检验结果.

进一步, 考虑如图1 所示系统, 对象既有外部扰动又有系统不确定性(对象有范数摄动),

且不确定信号不受外来扰动和输入的影响时,系统由下列方程给出:



$$G=\left[\begin{array}{c|ccc} A & B & B & b \\ \hline C & D & 0 & 0 \\ C & 0 & D & 0 \\ c^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

图 1　不确定性 Lur'e 系统

$$\begin{cases} \dot{x}= Ax+bu+Bp+Bw, \\ y=c^{\mathrm{T}}x, \quad z=Cx+Dw, \\ q=Cx+Dp, \\ P=\Delta q, \ \|\Delta\|\leqslant 1, \ \sigma(D)<1. \end{cases} \tag{4}$$

其中 p, q 分别为对象的不确定性输入、输出. 有如下结果:

定理 2　对于系统(4), 若存在正定矩阵 P, V 和实数 $\alpha>0, \beta>0$ 满足下列条件:

$$\begin{bmatrix} PA+A^{\mathrm{T}}P+\alpha P+V+\beta\mu^2cc^{\mathrm{T}} & PB & Pb \\ B^{\mathrm{T}}P & -\alpha I & 0 \\ b^{\mathrm{T}}P & 0 & -\beta \end{bmatrix}<0. \tag{5}$$

$$\begin{bmatrix} -V & PB & C^{\mathrm{T}} \\ B^{\mathrm{T}}P & -I & D^{\mathrm{T}} \\ C & D & -I \end{bmatrix}<0. \tag{6}$$

则椭圆体 S 是系统(4) 的鲁棒吸引子. 若 P 同时满足条件(3), 则 $S\subset\Omega(\rho)$. 进而得到系统(4) 具有对对象不确定性摄动 Δ 和扇区非线性鲁棒的 ρ_ 性能.

证明　由定理 1 的证明知, 条件(3) 推得 $S\subset\Omega(\rho)$. 所以, 只要证明 S 是系统(4) 的鲁棒吸引子, 类似于定理1 的证明知系统(4) 具有对对象不确定摄动 Δ 和扇区非线性鲁棒的 ρ_ 性能.

要证明 S 是系统(4) 的鲁棒吸引子, 只要证明 $\dot{V}|_{(4)}(x)<0$. 为此我们引入辅助函数

$$V_1(x)=V(x)+\int_0^t(q^{\mathrm{T}}(s)q(s)-p^{\mathrm{T}}(s)p(s))\mathrm{d}s.$$

由于 $\dot{V}_1(x)=\dot{V}(x)+q^{\mathrm{T}}(t)q(t)-p^{\mathrm{T}}(t)p(t)$, $p=\Delta q$, $\|\Delta\|\leqslant 1$ 知 $q^{\mathrm{T}}q\geqslant p^{\mathrm{T}}p$. 故只要能证明 $\dot{V}_1|_{(4)}(x)<0$, 就有 $\dot{V}|_{(4)}(x)<0$. 利用引理 1 得到

$$\dot{V}_1|_{(4)}(x)=x^{\mathrm{T}}P\dot{x}+\dot{x}^{\mathrm{T}}Px+(Cx+Dp)^{\mathrm{T}}(Cx+Dp)-p^{\mathrm{T}}p\leqslant$$

$$\begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} M & PB+C^{\mathrm{T}}D \\ B^{\mathrm{T}}P+D^{\mathrm{T}}C & D^{\mathrm{T}}D-I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix}-\alpha x^{\mathrm{T}}Px+\alpha w^{\mathrm{T}}w.$$

其中 $M=PA+A^{\mathrm{T}}P+\frac{1}{\beta}Pbb^{\mathrm{T}}P+\beta\mu^2cc^{\mathrm{T}}+\frac{1}{\alpha}PBB^{T}P+C^{\mathrm{T}}C+\alpha P$.

对条件(5) 进行 Schur 补等价地得到

$$PA+A^{\mathrm{T}}P+\frac{1}{\beta}Pbb^{\mathrm{T}}P+\beta\mu^2cc^{\mathrm{T}}+\frac{1}{\alpha}PBB^{T}P+C^{\mathrm{T}}C+\alpha P+V<0.$$

代入上述关于 $\dot{V}|_{(4)}(x)$ 的不等式得到

$$\dot{V}|_{(4)}(x) \leqslant \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} C^{\mathrm{T}}C - V & PB + C^{\mathrm{T}}D \\ B^{\mathrm{T}}P + D^{\mathrm{T}}C & D^{\mathrm{T}}D - I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix} - \alpha x^{\mathrm{T}}Px + \alpha.$$

对 $x \notin S$, 有 $x^{\mathrm{T}}Px > 1$, 故只要

$$\begin{bmatrix} C^{\mathrm{T}}C - V & PB + C^{\mathrm{T}}D \\ B^{\mathrm{T}}P + D^{\mathrm{T}}L & D^{\mathrm{T}}D - I \end{bmatrix} < 0,$$

就有 $\dot{V}|_{(4)}(x) < 0,\ x \in \partial S$. 而由 Schur 补, 这个矩阵不等式等价于条件(6) 成立. □

注 3 对固定的 $\alpha > 0$, 定理 2 中的条件(5) 是关于 P, V 的 LMI. 由注 1, 当 Σ_1 的传递函数的 H_∞ 范数小于 1 时, 有

$$PA + A^{\mathrm{T}}P + \frac{1}{\beta}Pbb^{\mathrm{T}}P + \beta\mu^2 cc^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\alpha}PBB^{T}P + + \alpha P < 0.$$

因而存在正定矩阵 V 使得

$$PA + A^{\mathrm{T}}P + \frac{1}{\beta}Pbb^{\mathrm{T}}P + \beta\mu^2 cc^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\alpha}PBB^{T}P + + \alpha P + V < 0,$$

且由于 $(PB + C^{\mathrm{T}}D)(D^{\mathrm{T}}D - I)^{-1}(B^{\mathrm{T}}P + D^{\mathrm{T}}C) \leqslant 0$, 故

$$(PB + C^{\mathrm{T}}D)(D^{\mathrm{T}}D - I)^{-1}(B^{\mathrm{T}}P + D^{\mathrm{T}}C) - V < 0.$$

这分别等价于条件(5) 和(6). 这说明只要系统 Σ_1 的 H_∞ 范数小于 1, 那么定理 2 中的两个 LMI 有公共的正定解 $P > 0$. 进一步, 只要性能集 $\Omega(\rho)$ 足够大时, 易由定理 2 得到的鲁棒吸引子外含在其中. 因而理论上, 定理 2 条件中的三个 LMI 很容易有公共的正定解. 文末的算例验证了这一点.

类似于定理 1, 2 的证明, 对对象既有外部扰动又有不确定性摄动(对象有范数摄动) , 且非线性控制向量或外扰对系统不确定性信号有影响的情况, 有类似的结果. 限于篇幅从略.

3 鲁棒椭圆吸引子的估计

本节考虑系统(4) 的鲁棒椭圆吸引子的估计. 给出包含在鲁棒椭圆吸引子 S 中的最大集合, 即对有界凸集 X_0, 要求 $\sup\{\zeta > 0: \zeta X_0 \subset S\}$. 我们给出两类典型集合的鲁棒吸引子估计.

一类为椭圆体 $X_0 = \{x: x^{\mathrm{T}}Rx \leqslant 1,\ R = R^{\mathrm{T}} > 0\}$. 另一类为多胞体 $X_0 = \{x = X\gamma: \sum_{i=1}^{m}\gamma_i \leqslant 1,\ \gamma_i \geqslant 0\}$, 即多胞体 X_0 是以 X 的列向量 x_i 为顶点组成的$(i = 1, \cdots, m)$.

考虑椭圆体和多胞体, 上述问题分别转化为:

$$\max \zeta > 0,\ \text{s.t.}\ \alpha > 0,\ \beta > 0,\ P > 0,\ V > 0,\ (3), (5), (6),\ R^{-1} \leqslant (\zeta^2 P)^{-1},$$

和

$$\max \zeta > 0,\ \text{s.t.}\ \alpha > 0,\ \beta > 0,\ P > 0,\ V > 0,\ (3), (5), (6),\ \begin{bmatrix} \zeta^{-2} & x_i^{\mathrm{T}} \\ x_i & P^{-1} \end{bmatrix} \geqslant 0.$$

令 $Q = P^{-1},\ \delta = \zeta^{-2}$, 则条件(3) , (5) 分别等价于

$$\begin{bmatrix} 1 & C_iQ \\ QC_i^{\mathrm{T}} & Q \end{bmatrix} \geqslant 0,\quad \begin{bmatrix} AQ + QA^{\mathrm{T}} + \alpha Q + V & B & b & Qc \\ B^{\mathrm{T}} & -\alpha I & 0 & 0 \\ b^{\mathrm{T}} & 0 & -\beta & 0 \\ c^{\mathrm{T}}Q & 0 & 0 & -\frac{1}{\beta\mu^2} \end{bmatrix} < 0. \tag{7}$$

上式对固定的 $\beta > 0$ 和 $\alpha > 0$ 是 LMI. 从而上述两问题又分别转化为如下的 LMI 问题:

$$\min\delta>0,\ \mathrm{s.t.}\ \boldsymbol{Q}>\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{V}>\boldsymbol{0},(6),(7),\boldsymbol{R}^{-1}\leqslant(\delta\boldsymbol{Q}),$$

$$\min\delta>0,\ \mathrm{s.t.}\ \boldsymbol{Q}>\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{V}>\boldsymbol{0},(6),(7),\begin{bmatrix}\delta & \boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{x}_i & \boldsymbol{Q}\end{bmatrix}\geqslant\boldsymbol{0}.$$

这样, 我们分别得到了包含在鲁棒椭圆吸引子 $\{\boldsymbol{x}:\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{1}\}$ 中有固定结构的椭圆体和多胞体•

4　算　　例

考虑系统(4): 其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1.8 & 0.3 & 0\\ -0.6 & -0.9 & 0\\ 0 & 0 & -0.8\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0.1 & 0.1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0.1\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0.1\\ 0 & 0.1 & 0\\ 0.1 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}0.02 & 0 & 0\\ 0 & 0.02 & 0\\ 0 & 0 & 0.02\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0.1\\ 0 & 0.1 & 0\\ 0 & 0 & 0.1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0.1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}0.2\\ -0.1\\ 0\end{bmatrix},$$

则由定理 2 的结论, 对任意 $\alpha\in(0,\lambda_m)$, 其中 $\lambda_m=-2\max(\mathrm{Re}\,\lambda(\boldsymbol{A}))$, 我们都能得到系统的鲁棒椭圆吸引子• 对固定的 $\alpha=0.3$ 和 $\rho=1$ 取 $\mu=1$, 我们得到下列正定矩阵 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{B}$ 和 $\beta>0$ 满足条件:

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}2.0101 & -0.1164 & 0.1302\\ -0.1164 & 2.0094 & -0.5774\\ 0.1302 & -0.5774 & 2.2828\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{V}=\begin{bmatrix}2.6059 & 0.4121 & 0.2499\\ 0.4121 & 1.4026 & -0.6605\\ 0.2499 & -0.6605 & 1.4093\end{bmatrix},$$

$\beta=5.8168$• 因而系统有如图 2 的鲁棒椭圆吸引子•

4　结　　论

本文研究了单输入单输出 Lur’e 系统的扰动抑制分析• 运用二次型或二次型加积分的 Liapunov 函数, 得到了用一组 LMI 表示的系统鲁棒吸引子充分条件• 它们同时给出了关于 Lur’e 系统扰动抑制的顶点检验结果和对对象不确定性鲁棒吸引子的估计• 本文的特点是用辅助 Liapunov 函数, 同时处理了绝对稳定性和扰动抑制的结果•

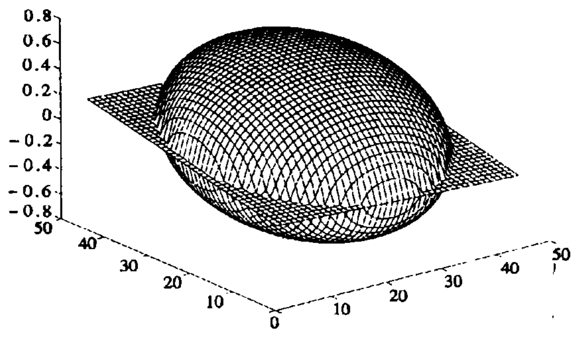


图 2　系统鲁棒椭圆吸引子

这些结果的保守性在于要求一组线性矩阵不等式有公共正定解• 本文结果很容易直接推广到多输入多输出系统•

[参 考 文 献]

[1] Sanchez_Pena R S, Sznaier M. Robust Systems Theory and Applications [M]. New York: John Wiley & Sons. 1998.

[2] Boyd S, Ghaoui L E, Feron E, et al. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory [M]. Philadelphia: SIMA press, Pennsylvania, 1994.

[3] Vidyasagar M. Optimal rejection of persistent bounded disturbances[J]. IEEE Trans Automa Contr, 1986, **31**(6): 527—534.

[4] Abedor J, Nagpal K, Poolla K. A linear matrix inequality approach to peak_to_peak gain minimization [J]. Int J Robust and Nonlinear Control, 1996, **6**(9): 899—927.

[5] Hindi H, Boyd S. Analysis of linear systems with saturating using convex optimization[A]. In: IEEE Control Systems Society Ed. Proc 37th IEEE Decision Control [C]. Tampa: Hyatt Regency Westshore, Florida, 1998, 903—908.

[6] Blanchini F. Set invariance in control[J]. Automatica, 1999, **35**(11): 1747—1767.

[7] 谢惠民. 绝对稳定性理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 1986.

[8] 黄琳. 稳定性理论[M]. 北京: 北京大学出版社, 1992.

Analysis of Disturbances Rejection for Lur' e Systems

HAO Fei[1,2], CHU Tian_guang[1,2], HUANG Lin[1,2]

(1. Department of Mechanics and Engineering Sciences, Peking University, Beijing 100871, P.R. China;

2. Center for Systems and control, Peking University, Beijing 100871, P.R. China)

Abstract: The analysis of disturbance rejection for singe_input singe_output(SISO) Lur' e system with norm uncertainty was concerned through invariant set analysis using Lyapunov function method. The conditions on robust ellipsoidal attractor for uncertain Lur' e systems were given in terms of LMIs (Linear Matrix Inequality), which simultaneously ensure the absolute stability and disturbance rejection of the uncertain Lur' e systems. An estimate of the maximum set included in a robust ellipsoidal attractor was also presented. Finally, a numerical example was worked out to illustrate the main results.

Key words: Lur' e systems; disturbance rejection; L_1_performance; robust attractor