文章编号: 1000_0887(2003) 03_0315_08

求解非线性互补问题的内点正算法*

马昌凤[1,2], 梁国平[2], 陈新美[3]

(1. 桂林电子学院 7 系, 桂林 545000;
2. 中科院 数学与系统科学研究院 数学研究所, 北京 100080;
3. 长沙电力学院 数学与计算机系, 长沙 410077)

(张石生推荐)

摘要: 针对非线性互补问题, 提出了与其等价的非光滑方程的内点正算法, 并在一定条件下证明了该算法的收敛性定理• 数值结果表明, 该算法是十分有效的•

关 键 词: 非线性互补问题; 内点正算法; 非光滑方程
中图分类号: O224.2 文献标识码: A

1 引言及算法

考虑 R^n 中的非线性互补问题: 求 $\boldsymbol{x} \in R^n$, 使

$$\boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0},\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \geqslant \mathbf{0},\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 0,$$

其中 $\boldsymbol{f}: R^n \to R^n$ 连续可微• 上述问题(记为 NCP($\boldsymbol{f}$)) 等价于求解下面的非光滑方程:

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}) = \min\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\} = \mathbf{0}, \tag{1}$$

其中算子 min 指各分量的最小• 定义模函数

$$\theta(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})\|^2,$$

显然, $\theta(\boldsymbol{x})$ 是非负的, 其零点是(1) 的精确解• 函数 $\theta(\boldsymbol{x})$ 一般不是 F 可微的, 但在其零点处存在强 F 导数(参见[2]), 并且它是处处方向可微的, 在向量 $\boldsymbol{x}$ 处沿 $\boldsymbol{d}$ 的导数由下式给出(参见[3]):

$$\theta'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{d}) = \sum_{i \in I_x(\boldsymbol{x})} x_i d_i + \sum_{i \in I_e(\boldsymbol{x})} x_i \min\{d_i, \nabla f_i(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}\} + \sum_{i \in I_f(\boldsymbol{x})} f_i(\boldsymbol{x}) \nabla f_i(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d},$$

其中

$$I_x(\boldsymbol{x}) = \{i: f_i(\boldsymbol{x}) > x_i\},\ I_e(\boldsymbol{x}) = \{i: f_i(\boldsymbol{x}) = x_i\},\ I_f(\boldsymbol{x}) = \{i: f_i(\boldsymbol{x}) < x_i\}•$$

记 $J_f(\boldsymbol{x}) = I_x(\boldsymbol{x}) \cup I_e(\boldsymbol{x})$, 则当 $\boldsymbol{x} \in R^n_+$ 时, 有

$$\theta'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{d}) \leqslant \sum_{i \in J_f(\boldsymbol{x})} x_i d_i + \sum_{i \in I_f(\boldsymbol{x})} f_i(\boldsymbol{x}) \nabla f_i(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d} \qquad (\forall \boldsymbol{d} \in R^n)•$$

作 $n \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$, 它的第 i 列为

* 收稿日期: 2001_06_05; 修订日期: 2002_10_17
基金项目: 湖南省自然科学基金资助项目(98JJY2053)
作者简介: 马昌凤(1963—), 男, 湖南隆回人, 副教授, 士, 已发表论文 18 篇, 研究方向为变分不等式数值解及有限元方法(E_mail: macf 99_cn@ yahoo. com. cn)•

$$A(x)_i = \begin{cases} e_i & (i \in J_f(x)), \\ \nabla f_i(x) & (i \in I_f(x)), \end{cases}$$

这里 e_i 表示第 i 个分量为 1 其余分量均为 0 的向量. 则上面的不等式可表示成:

$$\theta'(x, d) \leqslant [A(x)H(x)]^{\mathrm{T}} d \qquad (\forall x \in R_+^n, d \in R^n). \tag{2}$$

根据上述不等式, 不难证明:

命题 1 设 $x^* \in R_{++}^n$ 是任意向量, 则 $\forall \{x^k\}(\subset R_{++}^n) \to x^*, \{h^k\}(\subset R^n \setminus \{0\}) \to \mathbf{0}(k \to \infty)$, 有

$$\limsup_{k \to \infty} \frac{\theta(x^k + h^k) + \theta(x^k) - H(x^k)^{\mathrm{T}} A(x)^{\mathrm{T}} h^k}{\| h^k \|} \leqslant 0. \tag{3}$$

证明 由(2)式及关系式 $\theta(x^k + h^k) = \theta(x^k) + \theta'(x^k, h^k) + o(h^k)$ 立即可得引理的结论. □

下面我们来构造几个函数. 设参数 $c > 0, \zeta > n$ 为任意给定的常数, 令

$$\Omega \equiv \{x \in R_{++}^n \mid \theta(x) > 0\},$$

$$\phi_c(x) \equiv \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2} - \frac{\zeta}{(\theta(x) + e^{\mathrm{T}} x)^2} - \frac{c}{\theta^2(x)} \qquad (\forall x \in \Omega),$$

这里 e 表示分量均为 1 的 n 维向量, c 是惩罚参数, 它在算法中是可变化的. 显然, 由函数 ϕ_c 的定义, 有

$$\phi_c(x) \geqslant \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2} - \frac{c + \zeta}{\theta^2(x)} \qquad (\forall x \in \Omega).$$

根据上述不等式容易得到下述命题:

命题 2 对于固定的 $c > 0$, 下面的结论成立:

1) 若 $\{x^k\} \subset \Omega$, 且 $\lim_{k\to\infty} \phi_c(x^k) = -\infty$, 则 $\lim_{k\to\infty} \theta(x^k) = 0$;

2) $\forall \alpha > 0$ 和 $t \in R$, $\exists$ 常数 $a > 0$, 使得

$$[x \in R_{++}^n, \phi_c(x) \leqslant t, \theta(x) \geqslant \alpha] \Rightarrow x_i \geqslant a \quad (\forall i = 1, \cdots, n).$$

另一方面, 易知函数 ϕ_c 是方向可微的, $\forall x \in \Omega, d \in R^n$, 有

$$\phi_c'(x, d) = \frac{2c}{\theta^3(x)} \theta'(x, d) + \frac{2\zeta}{[\theta(x) + e^{\mathrm{T}} x]^3} [\theta'(x, d) + e^{\mathrm{T}} d] - \sum_{i=1}^n \frac{2}{x_i^3} d_i.$$

作函数

$$z_c(x, d) = \frac{2c}{\theta^3(x)} H(x)^T A(x)^{\mathrm{T}} d + \frac{2\zeta}{[\theta(x) + e^{\mathrm{T}} x]^3} [A(x)H(x) + e]^{\mathrm{T}} d - \sum_{i=1}^n \frac{2}{x_i^3} d_i.$$

由(2)式有

$$\phi_c'(x, d) \leqslant z_c(x, d) \qquad (\forall x \in \Omega, d \in R^n). \tag{4}$$

由此, 对于给定的 x, 若能找到向量 d, 使 $z_c(x, d) < 0$, 则 d 即为函数 ϕ_c 在 x 处的下降方向. 为此, 我们考虑以 d 为变元的线性方程组:

$$[A(x)A(x)^{\mathrm{T}} + X^{-2}] d + w_c(x) = \mathbf{0}, \tag{5}$$

其中

$$w_c(x) = \frac{2c}{\theta^3(x)} A(x)H(x) + \frac{2\zeta}{[\theta(x) + e^{\mathrm{T}} x]^3} [A(x)H(x) + e] - 2x^{-3},$$

$$X^{-2} = \mathrm{diag}\{x_1^{-2}, \cdots, x_i^{-2}\}, \quad x^{-3} = (x_1^{-3}, \cdots, x_i^{-3})^{\mathrm{T}}.$$

注意到矩阵

$$M(x) = A(x)A(x)^{\mathrm{T}} + X^{-2}$$

是对称正定阵, 故方程组(5)有唯一解, 设为 d_x, 于是

$$z_c(x, d_x) = w_c(x)^{\mathrm{T}} d_x = -w_c(x)^{\mathrm{T}} M(x)^{-1} w_c(x) \leqslant 0,$$

且 $z_c(x, d_c) < 0 \Leftrightarrow w_c(x) \neq 0$, 即 d_x 为 ϕ_c 在 x 处的一个下降方向. 根据命题题 1 和 $\phi_c(\cdot)$ 的定义, 可得下面的命题:

命题 3 设 $x^* \in \Omega$ 是任意向量, 则 $\forall \{x^k\}(\subset R^n_{++}) \rightarrow x^*$, $\{\lambda_k\}(\subset \mathbf{R} \setminus \{0\}) \rightarrow 0$ 及使 $\{(X^k)^{-1} d^k\}$ 有界的序列 $\{d^k\}$, 成立

$$\lim_{k \to \infty} \sup \frac{\phi_c(x^k + \lambda_k d^k) - \phi_c(x^k) - \lambda_k z_c(x^k, d^k)}{\lambda_k} \leqslant 0. \tag{6}$$

在上述讨论的基础上, 我们提出如下算法:

算法 1

步 1 设 $\zeta > n$, $\delta > 0$, $\sigma, \alpha, \rho \in (0, 1)$ 是任意的常数, 选取初始参数 $c_0 > 0$ 及初始向量 $x^0 \in \Omega$, 令 $k = 0$;

步 2 计算 $w^k = w_{c_k}(x^k)$;

步 3 若 $\| w^k \| \leqslant \delta$, 令 $c_{k+1} := 2c_k$, $x^{k+1} := x^k$, $k := k + 1$ 转步 2;

步 4 求解方程组

$$M(x^k) d + w^k = 0, \tag{7}$$

得唯一解 d^k;

步 5 确定步长

$$\tau_k^0 = \sup\{\tau: x^k + \tau d^k \geqslant 0\}.$$

记

$$\tau_k \begin{cases} = \alpha \tau_k^0 & (\tau_k^0 < \infty), \\ \geqslant 1/\| d^k \| & (\tau_k^0 = \infty). \end{cases}$$

并设 m_k 为使下式成立的最小非负整数 m:

$$\phi_{c_k}(x^k + \tau_k \rho^m d^k) - \phi_{c_k}(x^k) < \sigma \tau_k \rho^m z_{c_k}(x^k, d^k), \tag{8}$$

令 $x^{k+1} := x^k + \tau_k \rho^{m_k} d^k$, $c_{k+1} := c_k$;

步 6 若 $\theta(x^{k+1}) < \varepsilon$, 则停算, 否则, 令 $k := k + 1$ 转步 2.

我们对上述算法做几点说明: 1) 最大步长 τ_k 和参数 $\rho \in (0, 1)$ 是为了保证下一轮迭代向量 x^{k+1} 仍为正; 2) 若模 $\| w^k \|$ 很小($\leqslant \delta$), 则 $\| d^k \|$ 的值也很小, 这时需对参数 c_k 进行修正, 以保证模 $\| w^k \|$ 足够大, 我们的做法是每碰到这种情况(即 $\| w^k \| \leqslant \delta$), 就将 c_k 加倍, 并将 $k + 1$ 赋给 k, 重新计算; 3) 不等式(4) 将保证 Armijo 线性搜索式(8) 中的 m_k 在有限次试验后得以确定, 且由 m_k 的定义, 当时 $m_k \geqslant 1$ 时, 必有

$$\phi_{c_k}(x^k + \tau_k \rho^{m_k - 1} d^k) - \phi_{c_k}(x^k) < \sigma \tau_k \rho^{m_k - 1} z_{c_k}(x^k, d^k). \tag{9}$$

2 收敛性分析

本节, 我们将讨论由算法 1 产生的迭代序列 $\{x^k\}$ 的收敛性. 由算法 1 知, $\forall x^k \in \Omega$, $\theta(x^k) > 0$. 为了保证模 $\| w^k \| > \delta$, 参数 c 可能需要修正无限多次, 也可能只需修正有限次. 我们分上述两种情况来讨论 $\{x^k\}$ 的极限性质.

2.1 只需有限次修正 c 时的收敛定理

本小节我们讨论只需有限次修正参数 c 的情形, 即对于充分大的 k, 都有 $\|\boldsymbol{w}^k\| > \delta$ 成立.

定理 1 设 $\{\boldsymbol{x}^k\}$ 由算法 1 产生, 且算法 1 中的参数 c_k 只需修正有限次, 则有

$$\lim_{k\to\infty}\theta(\boldsymbol{x}^k) = 0, \tag{10}$$

因而, $\{\boldsymbol{x}^k\}$ 的每一聚点(如果存在的话)必是问题(1)的解.

证明 因为序列 $\{c_k\}$ 只需修正有限次, 故存在 k_0 和常数 $c > 0$, 使得 $\forall k \geqslant k_0$, 有 $c_k = c$ 且 $\|\boldsymbol{w}^k\| > \delta$. 我们用反证法证明定理的结论. 假设定理 1 的结论不成立, 即 $\lim_{k\to\infty}\theta(\boldsymbol{x}^k) > 0$, 则存在 $\varepsilon > 0$ 和子列 $\{\boldsymbol{x}^k : k \in K\}$, 使得 $K \subset \{k_0, k_0+1, \cdots\}$, 且

$$\inf_{k\in K}\theta(\boldsymbol{x}^k) \geqslant \varepsilon. \tag{11}$$

由于 $\forall k \geqslant k_0$, 有 $z_c(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{d}^k) < 0$, 根据不等式(8), 序列 $\{\phi_c(\boldsymbol{x}^k) : k \geqslant k_0\}$ 是单调下降的, 且由(11)式及命题 2 的 1) 可知, $\{\phi_c(\boldsymbol{x}^k) : k \geqslant k_0\}$ 有下界, 从而是收敛的. 由(8)式, 我们有

$$\lim_{k(\in K)\to\infty}\tau_k\rho^{m_k}z_c(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{d}^k) = 0. \tag{12}$$

下面我们来证明

$$\inf_{k\in K}\frac{|z_c(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{d}^k)|}{\|\boldsymbol{d}^k\|} > 0. \tag{13}$$

事实上, 由于 $\{\boldsymbol{x}^k : k \in K\} \subset \{\boldsymbol{x} \in R^n_{++} \mid \phi_c(\boldsymbol{x}) \leqslant t, \theta(\boldsymbol{x}) \geqslant \varepsilon\}$, 其中 $t \equiv \phi_c(\boldsymbol{x}^{k_0})$. 由命题 2 之 2), $\{\boldsymbol{x}^k : k \in K\}$ 是有界的, 且对所有的 $k \in K$, 有

$$x_i^k \geqslant a \qquad (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{14}$$

其中 $a > 0$ 为常数. 由上式及 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x})$ 的定义, 易证下式成立:

$$\|\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}^k)\| \cdot \|\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x})^{-1}\| \leqslant T \quad (\forall k \in K), \tag{15}$$

这里, $T > 0$ 为某个常数. 故根据 $\|\boldsymbol{w}^k\| \leqslant \delta$ 这一事实, $\forall k \in K$, 有

$$\frac{|z_c(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{d}^k)|}{\|\boldsymbol{d}^k\|} = \frac{|\boldsymbol{w}_c(\boldsymbol{x}^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}^k|}{\|\boldsymbol{d}^k\|} = \frac{|\boldsymbol{w}_c(\boldsymbol{x}^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}^k)^{-1}\boldsymbol{w}_c(\boldsymbol{x}^k)|}{\|\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}^k)^{-1}\boldsymbol{w}_c(\boldsymbol{x}^k)\|} \geqslant$$

$$\frac{\|\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}^k)\|^{-1} \cdot \|\boldsymbol{w}_c(\boldsymbol{x}^k)\|^2}{\|\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}^k)^{-1}\| \cdot \|\boldsymbol{w}_c(\boldsymbol{x}^k)\|} = \frac{\|\boldsymbol{w}_c(\boldsymbol{x}^k)\|}{\|\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}^k)\| \cdot \|\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}^k)^{-1}\|} \geqslant \frac{\delta}{T},$$

从而(13)式成立. 由(12)和(13)式可得

$$\lim_{k(\in K)\to\infty}\tau_k\rho^{m_k}\|\boldsymbol{d}^k\| = 0. \tag{16}$$

进一步, 我们可证明

$$\inf_{k\in K}\tau_k\|\boldsymbol{d}^k\| > 0. \tag{17}$$

事实上, 若 $k \in K$ 使得 $\tau_k^0 = \infty$, 那么由 τ_k 的定义, 即有 $\tau_k\|\boldsymbol{d}^k\| \geqslant 1$. 另一方面, 若 $\tau_k^0 < \infty$, 则由 $\boldsymbol{x}^k + \tau_k^0\boldsymbol{d}^k \geqslant 0$ 及(14)式, 容易推得 $\tau_k^0\|\boldsymbol{d}^k\| \geqslant a$. 又因 $\forall k \geqslant 0$, $\tau_k = \alpha\tau_k^0$, 故(17)式成立. 从而可得 $\rho^{m_k} \to 0 (k \in K, k \to \infty)$. 故由 $\rho \in (0, 1)$, 对于充分大的 $k \in K$, 必有 $m_k \geqslant 1$. 因 $\{\boldsymbol{x}^k : k \in K\}$ 是有界的, 故可取 $K' \subset K$, 使

$$\lim_{k(\in K')\to\infty}\boldsymbol{x}^k = \boldsymbol{x}^* \in R^n_{++},$$

且对任意的 $k \in K'$, 有 $m_k \geqslant 1$. 于是, 根据(9)式, 有

$$\frac{\phi_c(\boldsymbol{x}^k + \tau_k\rho^{m_k-1}\boldsymbol{d}^k) - \phi_c(\boldsymbol{x}^k)}{\tau_k\rho^{m_k-1}\|\boldsymbol{d}^k\|} \geqslant \sigma\frac{z_c(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{d}^k)}{\|\boldsymbol{d}^k\|}.$$

令 $\lambda_k = \tau_k\rho^{m_k-1}\|\boldsymbol{d}^k\|$, $\boldsymbol{p}^k = \boldsymbol{d}^k / \|\boldsymbol{d}^k\|$, 则由上式得:

$$\frac{\phi_c(x^k+\lambda_k p^k)-\phi_c(x^k)-\lambda_k w_c(x)^{\mathrm T}p^k}{\lambda_k}\geqslant$$

$$-(1-\sigma)\frac{z_c(x^k,d^k)}{\|d^k\|}\geqslant\frac{(1-\sigma)\delta}{T}. \tag{18}$$

另一方面,由(16)式,$\lim\limits_{k(\in K)\to\infty}\lambda_k=0$. 同时易证序列$\{(x^k)^{-2}p^k\}$有界,故由命题3,应有

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{\phi_c(x^k+\lambda_k p^k)-\phi_c(x^k)-\lambda_k w_c(x)^{\mathrm T}p^k}{\lambda_k}\leqslant 0,$$

这与(18)式矛盾,故(10)式必然成立.

2.2 需要无限多次修正 c 时的收敛定理

本小节讨论需要无限次修正参数c的情形,即存在无数多个k,使$\|w\|\geqslant\delta$不成立. 记$K=\{k:\|w^k\|=\|w_{c_k}(x^k)\|\leqslant\delta\}$,我们证明,若$x^*$是序列$\{x^k:k\in K\}$的聚点且$x^*$是正则的,则是NCP$(f)$的解. 为此,先引入正则向量的概念:

定义1 向量$x\geqslant 0$称为正则的,如果对于$d\in R^n$,下面的线性不等式组有解:

$$\begin{cases}
x_i+d_i=0 & (i\in I_x(x)\cap I_e^0(x)),\\
f_i(x)+\nabla f_i(x)^{\mathrm T}d=0 & (i\in I_f^+(x)),\\
x_i+d_i\geqslant 0 & (i\in I_f^0(x)),\\
f_i(x)+\nabla f_i(x)^{\mathrm T}d\geqslant 0 & (i\in I_f^0(x)),\\
x_i+d_i\leqslant 0 & (i\in I_e^+(x)),\\
f_i(x)+\nabla f_i(x)^{\mathrm T}d\leqslant 0 & (i\in I_e^+(x)),
\end{cases}$$

其中

$$I_f^+(x)=\{i:f_i(x)<x_i>0\},\ I_e^+(x)=\{i:f_i(x)=x_i>0\},$$
$$I_f^0(x)=\{i:f_i(x)<x_i=0\},\ I_e^0(x)=\{i:f_i(x)=x_i=0\}.$$

引理1 设算法1中的参数c被修正无限多次,x^*是子列$\{x^k:k\in K\}$的极限点,那么序列$\{u^k:k\in K\}$必存在聚点,且它的任一聚点u^∞均满足

$$d^{\mathrm T}u^\infty\geqslant 0\qquad(\forall d\in\mathscr{R}(x^*,R_+^n)), \tag{19}$$

其中

$$u^k=A(x^k)H(x^k),\ \mathscr{R}(x^*,R_+^n)\equiv$$
$$\{d\in R^n\mid\exists\bar\alpha>0,\ 使\ x^*+\alpha d\geqslant 0,\ \forall\alpha\in[0,\bar\alpha]\}.$$

证明 由u^k的定义及$x^k\to x^*(k\in K)$,易证序列$\{u^k:k\in K\}$必存在聚点. 不失一般性,设u^∞是$\{u^k:k\in K\}$的一个聚点,我们来证明(19)成立. 事实上,设$P\equiv\{i:x_i^*>0\}$,$Z\equiv\{i:x_i^*=0\}$,注意到,$\mathscr{R}(x^*,R_+^n)=\{d\in R^n\mid d_z\geqslant 0\}$,由此可知,(19)式与下列等价

$$u_P^\infty=0,\ u_Z^\infty\geqslant 0. \tag{20}$$

我们来证明(20)式成立. 根据w^k的定义及$\|w^k\|\leqslant\delta$, $k\in K$,我们有

$$\left\|u^k+v^k-\frac{\theta^3(x^k)}{2c_k}\cdot(x^k)^{-3}\right\|\leqslant\frac{\delta\theta^3(x^k)}{2c_k}\ (\forall k\in K) \tag{21}$$

其中

$$v^k\equiv\frac{\zeta\theta^3(x^k)}{c_k[\theta(x^k)+e^{\mathrm T}x^k]^3}(e+u^k)\qquad(\forall k\in K).$$

容易看出,$\{v^k:k\in K\}\to 0(c_k\to\infty)$. 因此,由$x_P^k\to x_P^*>0(k\in K,k\to\infty)$及$c_k\to\infty$和

(21)式,即得

$$u_P^\infty=\lim_{k(\in K)\to\infty}u_P^k=\mathbf{0}.$$

又 $x_Z^k\to 0(k\in K,k\to\infty)$,根据(21)及 $c_k\to\infty$,对于充分大的 $k\in K$,有 $u_Z^k+v_Z^k\geqslant\mathbf{0}$,故

$$u_Z^\infty=\lim_{k(\in)K\to\infty}(u_Z^k+v_Z^k)\geqslant\mathbf{0}.$$

因此,引理的结论成立.

引理2 设 $x\in R_+^n$, $\forall d\in R^n$,令

$$\theta_x^{\min}(d)=\sum_{i\in I_f(x)}f_i(x)\nabla f_i(x)^{\mathrm T}d+\sum_{i\in I_e(x)}x_i\min\{\nabla f_i(x)^{\mathrm T}d,d_i\}+\sum_{i\in I_x(x)}x_id_i,$$

$$\theta_x^{\max}(d)=\sum_{i\in I_f(x)}f_i(x)\nabla f_i(x)^{\mathrm T}d+\sum_{i\in I_e(x)}x_i\max\{\nabla f_i(x)^{\mathrm T}d,d_i\}+\sum_{i\in I_x(x)}x_id_i,$$

设 $\theta_x:\mathscr{R}(x,Rn+)\to R$ 是齐线性的,且满足

$$\theta_x^{\min}(d)\leqslant\theta_x(d)\leqslant\theta_x^{\max}(d)\qquad(\forall d\in\mathscr{R}(x,R_+^n)).$$

考虑关于 x 的下列条件:

(a) x 是正则的;

(b) 存在某个 $d\in\mathscr{R}(x,R_+^n)$,使得

$$\begin{cases}f_i(x)(f_i(x)+\nabla f_i(x)^{\mathrm T}d)\leqslant 0 & (i\in I_f(x)),\\ \max\{x_i(x_i+d_i),f_i(x)(f_i(x)+\nabla f_i(x)^{\mathrm T}d)\}\leqslant 0 & (i\in I_e(x)),\\ x_i(x_i+d_i)\leqslant 0 & (i\in I_x(x));\end{cases}\tag{22}$$

(c) 存在 $\mu>0$ 和 $d\in\mathscr{R}(x,R_+^n)$ 使得

$$\mu\theta(x)+\theta_x(d)\leqslant 0;$$

(d) 若 $\theta(x)>0$,则存在 $d\in\mathscr{R}(x,R_+^n)$,使得 $\theta_x(d)<0$.

那么,下面的蕴涵式成立:

$$(a)\Rightarrow(b)\Rightarrow(c)\Leftrightarrow(d).$$

证明 由正则向量的定义及 $d\in\mathscr{R}(x,R_+^n)\Leftrightarrow d_i\geqslant 0(i\in\mathbf{Z})$,可直接推出(a)$\Leftrightarrow$(b)成立.下面证明(b)$\Rightarrow$(c).设(b)成立,将(22)两边对 $i=1,\dots,n$ 求和,得 $2\theta(x)+\theta_x(d)\leqslant 0$.取 $\mu=2$ 即得(c)成立.(c)与(d)的等价性容易由 $\theta_x(d)$ 的定义推证.

定理2 设 $\{x^k\}$ 由算法1产生,且算法1中的参数 c_k 需修正无限多次,如果 x^* 是子列 $\{x^k:k\in K\}$ 的极限点,且 x^* 是正则的,那么,$\theta(x^*)=0$.

证明 用反证法.设 $\theta(x^*)\neq 0$,则 $\theta(x^*)>0$.令 u^∞ 是序列 $\{u^k:k\in K\}$ 的一个聚点,其中 $u^k=A(x^k)H(x^k)$.那么函数 $\theta_x(d)=d^{\mathrm T}u^\infty$ 满足引理2的条件,由 x^* 的正则性及 $\theta(x^*)>0$,根据引理2(d),存在 $d\in\mathscr{R}(x,R_+^n)$,使

$$d^{\mathrm T}u^\infty<0,$$

这与引理1相矛盾,故必有 $\theta(x^*)=0$.

3 数值试验

本节,我们给出 NCP (f) 的两个简单的数值例子来验证算法1的实效性.终止准则取为

$\theta(\boldsymbol{x}^k) < 10^{-12}$, 初始惩罚参数 $c_0 = 1000$, 其它参数的取值为: $\zeta = n + 1$, $\delta = 10^{-6}$, $\sigma = \rho = 0.5$, $\alpha = 0.95$•

算例 1[4] 试验函数为

$$\begin{cases} f_1(\boldsymbol{x}) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3 + 3x_4 - 6, \\ f_2(\boldsymbol{x}) = 2x_1^2 + x_1 + x_2^2 + 3x_3 + 2x_4 - 2, \\ f_3(\boldsymbol{x}) = 3x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_3 + 3x_4 - 1, \\ f_4(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3 + 3x_4 - 3 \end{cases}$$

相应的NCP$(\boldsymbol{f})$问题有唯一解 $\boldsymbol{x}^* = (\sqrt{6}/2, 0, 0, 0.5)^{\mathrm{T}}$, 数值结果如表1•

表 1 算例 1 的数值结果

初始值 $\boldsymbol{x}^0$	迭代次数 k	$\theta(\boldsymbol{x}^k)$ 的值
$(1, 0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$	8	1.647 05E_13
$(1, 1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$	11	2.353 53E_13
$(0, 1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$	10	7.692 93E_13
$(5, 2, 4, 3)^{\mathrm{T}}$	13	1.055 37E_13

算例 2[8] 试验函数为

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{Mx} + \boldsymbol{q},$$

其中

$$\begin{cases} [M]_{ii} = 4(i - 1) + 1 \quad (i = 1, \cdots, n), \\ [M]_{ij} = [M]_{ii} + 1 \quad (i = 1, \cdots, n - 1; j = i + 1, \cdots, n), \\ [M]_{ij} = [M]_{jj} + 1 \quad (j = 1, \cdots, n - 1; i = j + 1, \cdots, n), \end{cases}$$

及 $\boldsymbol{q} = (-1, -1, \cdots, -1)^{\mathrm{T}}$• 相应的NCP$(\boldsymbol{f})$的问题有唯一解 $\boldsymbol{x}^* = (1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$, 取初始点 $\boldsymbol{x}^0 = (1, 1, \cdots, 1)\mathrm{T}$, 数值结果如表 2•

表 2 算例 2 的数值结果

维数 (n)	5	10	15	20	25	30	35	40
迭代次数 (k)	8	13	16	16	16	18	18	21

[参 考 文 献]

[1] Harker P T, Pang J S. Finite_dimensional variational inequality and nonlinear complementarity problems: a survey of theory, algorithms and applications[J]. Math Prog, 1990, **48**(2): 161—220.

[2] Harker P T, Xiao B. Newton's methods for nonlinear complementarity problem: a B_differentiable equation approach[J]. Math Prog, 1990, **48**(3): 339—358.

[3] Pang J S. Newton's method for B_differentiable equations[J]. Math Oper Res, 1990, **15**(2): 311—341.

[4] Monteriro R D C, Pang J S, Wang T. A Positive algorthm for nonlinear complementarity problem[J]. SIAM J Opt, 1995, **5**(1): 129—148.

[5] Pang J S. A B_differentiable equation_based, globally and locally quadratically convergent alogorithm

for nonlinear problems[J]. Math Prog, 1991, **51**(1): 101—131.

[6] Pang J S. Gabriel S A. NE/SQP: a robust algorithm for nonlinear complementarity problems[J]. Math Prog, 1993, **60**(2): 295—338.

[7] Mathiesen L. An algorithm based on a sequence of linear complementarity problems applied to a Walrasian equilibrium model: an example[J]. Math Prog, 1987, **37**(1): 1—18.

[8] Friedlander A, Martinez J M, Stantos S A. A new strategy for solving variational inequalities in bounded polytopes[J]. Numer Funct Anal and Optimiz, 1995, **16**(5/6): 653—668.

A Positve Interior_Point Algorithm for Nonlinear Complementarity Problems

MA Chang_feng[1,2], LIANG Guo_ping[2], CHEN Xin_mei[3]

(1. Guilin University of Electronic Technology, Guilin 545000, P.R. China;
2. Institute of Mathematics, Academy of Mathematics &System Sciences, CAS, Beijing 100080, P.R. China; 3. Department of Mathematic &Computer, Changsha University of Electric Power, Changsha 410077, P. R. China)

Abstract: A new iterative method, which is called positive interior_point algorithm, is presented for solving the nonlinear complementarity problems. This method is of the desirable feature of robustness. And the convergence theorems of the algorithm is established. In addition, some numerical results are reported.

Key words: nonlinear complementarity problems; positive interior_point algorithm; non_smooth equations