

文章编号: 1000-0887(2002) 12-1211-09

压电材料中两平行对称可导通 裂纹断裂性能分析*

周振功, 王彪

(哈尔滨工业大学 复合材料研究所, 哈尔滨 150001)

(我刊编委王彪来稿)

摘要: 采用 Schmidt 研究了压电材料中对称平行的双可导通裂纹的断裂性能, 利用富里叶变换使问题的求解转换为求解两对以裂纹面位移之差为未知变量的对偶积分方程, 并采用 Schmidt 方法来对这两对对偶积分方程进行数值求解。结果表明应力强度因子和电位移强度因子与裂纹的几何尺寸有关。与不可导通裂纹有关结果相比, 可导通裂纹的电位移强度因子远小于相应问题不可导通裂纹的电位移强度因子。

关键词: 压电材料; 裂纹; Schmidt 方法; 对偶积分方程; 应力强度因子

中图分类号: O345.51 **文献标识码:** A

引 言

众所周知, 由于压电材料的电力耦合效应, 因此由压电材料制作的换能器、传感器和制动器等各种的压电器件在当今的电子技术、通讯和控制技术中得到了广泛的应用。但当由压电材料制作的各种压电器件在使用过程中, 由于在制造过程中缺陷的存在, 会引起电器件失效破坏, 因此研究压电材料的电机械性能及断裂性能是非常重要的, 特别是多裂纹问题。

在压电材料断裂问题研究中, 许多研究者提出了多种裂纹面电边界条件, 如 Deeg^[1]; Pak^[2,3]; Sosa 和 Pak^[4]; Sosa^[5,6]; Suo, Kuo, Barnett 和 Willis^[7]; Park 和 Sun^[8]; Zhang 和 Tong^[9]; Gao, Zhang 和 Tong^[10]; Wang^[11]; Narita 和 Shindo^[12,13]; Zhou, Wang 和 Cao^[14]等。为了使问题的分析得到简化, Deeg^[1]; Pak^[2,3]; Sosa 和 Pak^[4]; Sosa^[5,6]; Zhou, Wang 和 Cao^[14]和 Yu 和 Chen^[15]等在假定电场在裂纹面上是不可导通条件下对一系列问题进行了分析。在这些模型中, 不可导通裂纹的假设是根据裂纹面上的电荷是为零的, 从而电位移在裂纹面上为零。事实上, 压电材料中的裂纹含有空气或液体, 这就要求电场是可以通过裂纹的, 从而电位移和电势在裂纹上应是连续的, 也就是可导通裂纹条件。对于可导通裂纹模型, Zhang 和 Hack^[16]; McMeeking^[17]; Suo^[18]; Dunn^[19]; Zhang 和 Tong^[20]和 Sosa 和 Khutoryansky^[21]分析了有关可导通条件下压电材料

* 收稿日期: 2001_07_19; 修订日期: 2002_04_26

基金项目: 国家杰出青年基金资助项目(19725209); 黑龙江省自然科学基金资助项目; 黑龙江省博士后基金资助项目

作者简介: 周振功(1963—), 男, 河南镇平人, 教授, 博士, 博士生导师
(E-mail: zhough@hope.hit.edu.cn)

的断裂问题。最近, Soh, Fang 和 Lee^[22] 分析了两种边界条件下压电材料界面裂纹的有关性能。然而, 对于压电材料中平行对称裂纹的断裂问题利用 Schmidt 方法还没有研究过。

本文将利用 Schmidt 方法^[23] 对压电材料平行对称裂纹的断裂问题进行分析, 这种方法对于解这种问题既方便又简单。利用傅里叶变换把本问题的求解转换为两对对偶积分方程的求解。利用雅可比多项式把裂纹表面位移之差展开成级数形式, 进而利用 Schmidt^[23] 方法进行求解。这种求解过程不同文献[1~ 13]、[15~ 22]所采用的方法, 这种解的形式既简单又容易理解。最终, 应力强度因子和电位移强度因子用数值形式给出。

1 基本方程

设一压电材料平面中含有两平行对称长度为 $2l$ 裂纹, 如图 1 所示, h 是两裂纹间距离。在此仅考虑反平面机械位移和平面电位移的情况。如 Soh^[22] 工作中的讨论, 因裂纹没有张开位移发生, 从而可以假设裂纹面完全接触, 据此, 在本文中讨论可导通裂纹面情况。因此本问题的边界条件可表示为:

$$w^{(1)} = w^{(2)}, \quad \tau_{yz}^{(1)} = \tau_{yz}^{(2)}, \quad \phi^{(1)} = \phi^{(2)}, \quad D_y^{(1)} = D_y^{(2)}, \quad y = h \quad |x| > l, \quad (1)$$

$$w^{(2)} = w^{(3)}, \quad \tau_{yz}^{(2)} = \tau_{yz}^{(3)}, \quad \phi^{(2)} = \phi^{(3)}, \quad D_y^{(2)} = D_y^{(3)}, \quad y = 0 \quad |x| > l, \quad (2)$$

$$\tau_{yz}^{(1)} = \tau_{yz}^{(2)} = -\tau_0, \quad \phi^{(1)} = \phi^{(2)}, \quad D_y^{(1)} = D_y^{(2)}, \quad y = h \quad |x| \leq l, \quad (3)$$

$$\tau_{yz}^{(2)} = \tau_{yz}^{(3)} = -\tau_0, \quad \phi^{(2)} = \phi^{(3)}, \quad D_y^{(2)} = D_y^{(3)}, \quad y = 0 \quad |x| \leq l, \quad (4)$$

$$w^{(1)} = w^{(2)} = w^{(3)} = 0, \quad (x^2 + y^2)^{1/2} \rightarrow \infty, \quad (5)$$

这里 $\tau_k, D_k (k = x, y)$ 分别是反平面剪切应力和平面电位移。 w 和 ϕ 分别是反平面剪切位移和电势。这里右上角角标 $k (k = 1, 2, 3)$ 分别是上半平面 1、中间层 2 和下半平面 3, 如图 1 所示。

本构方程可表示为:

$$\tau_{k} = c_{44} w_{,k} + e_{15} \phi_{,k}, \quad (6)$$

$$D_k = e_{15} w_{,k} - \epsilon_{11} \phi_{,k}, \quad (7)$$

$c_{44}, e_{15}, \epsilon_{11}$ 分别是剪切模量、压电常数和介电常数, 反平面控制方程为^[22]:

$$c_{44} \cdot^2 w + e_{15} \cdot^2 \phi = 0, \quad (8)$$

$$e_{15} \cdot^2 w - \epsilon_{11} \cdot^2 \phi = 0, \quad (9)$$

这里 $\cdot^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ 是二维拉普拉斯算子。由于载荷和结构的对称性, 只需考虑 $0 \leq x < \infty, 0 \leq y < \infty$ 时的情况就可以了。方程 (8) 和 (9) 经傅里叶变换后, 解可表示为:

$$\begin{cases} w^{(1)}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty A_1(s) e^{-sy} \cos(sx) ds \\ \phi^{(1)}(x, y) = \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} w^{(1)}(x, y) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty B_1(s) e^{-sy} \cos(sx) ds \end{cases} \quad (y \geq h), \quad (10)$$

$$\begin{cases} w^{(2)}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty [A_2(s) e^{-sy} + B_2(s) e^{sy}] \cos(sx) ds \\ \phi^{(2)}(x, y) = \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} w^{(2)}(x, y) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty [C_2(s) e^{-sy} + D_2(s) e^{sy}] \cos(sx) ds \end{cases} \quad (h \geq y \geq 0), \quad (11)$$

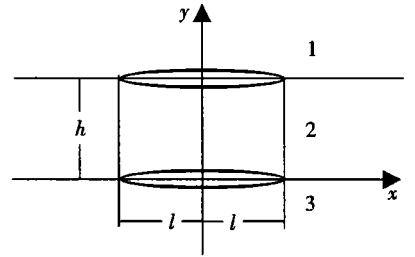


图 1 压电材料中裂纹模型

$$\begin{cases} w^{(3)}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty A_3(s) e^{sy} \cos(sx) ds \\ \phi^{(3)}(x, y) = \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} w^{(3)}(x, y) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty B_3(s) e^{sy} \cos(sx) ds \end{cases} \quad (y \leq 0), \quad (12)$$

这里 $\mu = c_{44} + e_{15}^2/\epsilon_{11}$, $A_1(s)$, $B_1(s)$, $A_2(s)$, $B_2(s)$, $C_2(s)$, $D_2(s)$, $A_3(s)$ 和 $B_3(s)$ 是未知函数。变量上面的一横杠表示经过傅里叶变换的量, 即:

$$f(s) = \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{-isx} dx. \quad (13)$$

由方程(6)和(7)可得:

$$\begin{cases} \tau_{yz}^{(1)}(x, y) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty s [\mu A_1(s) e^{-sy} + e_{15} B_1(s) e^{-sy}] \cos(sx) ds \\ D_y^{(1)}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \epsilon_{11} s B_1(s) e^{-sy} \cos(sx) ds \end{cases} \quad (y \geq h), \quad (14)$$

$$\begin{cases} \tau_{yz}^{(2)}(x, y) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \mu s [A_2(s) e^{-sy} - B_2(s) e^{sy}] + e_{15} s [C_2(s) e^{-sy} - D_2(s) e^{sy}] \right\} \cos(sx) ds, \\ D_y^{(2)}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \epsilon_{11} s [C_2(s) e^{-sy} - D_2(s) e^{sy}] \cos(sx) ds, \end{cases} \quad (h \geq y \geq 0), \quad (15)$$

$$\begin{cases} \tau_{yz}^{(3)}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty s [\mu A_3(s) e^{sy} + e_{15} B_3(s) e^{sy}] \cos(sx) ds \\ D_y^{(3)}(x, y) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \epsilon_{11} s B_3(s) e^{sy} \cos(sx) ds \end{cases} \quad (y \leq 0). \quad (16)$$

为了求解问题, 裂纹面上的位移之差和裂纹面上电势之差分别定义为:

$$f_1(x) = w^{(1)}(x, h^+) - w^{(2)}(x, h^-), \quad (17)$$

$$f_{\phi 1}(x) = \phi^{(1)}(x, h^+) - \phi^{(2)}(x, h^-), \quad (18)$$

$$f_2(x) = w^{(2)}(x, 0^+) - w^{(3)}(x, 0^-), \quad (19)$$

$$f_{\phi 2}(x) = \phi^{(2)}(x, 0^+) - \phi^{(3)}(x, 0^-). \quad (20)$$

把方程(10)到(12)分别代入方程(17)至(20)中, 并应用傅立叶变换和边界条件可得:

$$f_1(s) = [A_1(s) - A_2(s)] e^{-sh} - B_2(s) e^{sh}, \quad (21)$$

$$f_{\phi 1}(s) = \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} f_1(s) + [B_1(s) - C_2(s)] e^{-sh} - D_2(s) e^{sh} = 0, \quad (22)$$

$$f_2(s) = A_2(s) + B_2(s) - A_3(s), \quad (23)$$

$$f_{\phi 2}(s) = \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} f_2(s) + C_2(s) + D_2(s) - B_3(s) = 0. \quad (24)$$

把方程(14)至(16)分别代入方程(1)至(4)中可得:

$$\begin{aligned} \mu A_1(s) e^{-sh} + e_{15} B_1(s) e^{-sh} &= \mu [A_2(s) e^{-sh} - B_2(s) e^{sh}] + \\ &e_{15} [C_2(s) e^{-sh} - D_2(s) e^{sh}], \end{aligned} \quad (25)$$

$$[B_1(s) - C_2(s)] e^{-2sh} + D_2(s) = 0, \quad (26)$$

$$\mu [A_2(s) - B_2(s)] + e_{15} [C_2(s) - D_2(s)] = -\mu A_3(s) - e_{15} B_3(s), \quad (27)$$

$$C_2(s) - D_2(s) + B_3(s) = 0 \quad (28)$$

利用 8 个方程(21) 至(28) 求解 8 个未知数 $A_1(s)$ 、 $B_1(s)$ 、 $A_2(s)$ 、 $B_2(s)$ 、 $C_2(s)$ 、 $D_2(s)$ 、 $A_3(s)$ 、 $B_3(s)$ ，并利用边界条件(3) ~ (4) 可得：

$$\int_0^{\infty} c_{44}[f_1(s) + e^{-sh} f_2(s)] \cos(sx) ds = \pi \tau_0 \quad |x| \leq l, \quad (29)$$

$$\int_0^{\infty} c_{44}[f_2(s) + e^{-sh} f_1(s)] \cos(sx) ds = \pi \tau_0 \quad |x| \leq l, \quad (30)$$

$$\int_0^{\infty} f_1(s) \cos(sx) ds = 0 \quad |x| > l, \quad (31)$$

$$\int_0^{\infty} f_2(s) \cos(sx) ds = 0 \quad |x| > l. \quad (32)$$

从方程(29) 至(32) 中可以看出：

$$\begin{cases} f_1(s) = f_2(s) \Rightarrow f_1(x) = f_2(x), \\ \tau_{yz}^{(1)}(x, h) = \tau_{yz}^{(2)}(x, h) = \tau_{yz}^{(2)}(x, 0) = \tau_{yz}^{(3)}(x, 0), \end{cases} \quad (33)$$

从而利用方程(14) 到(16) 可得：

$$D_y^{(1)}(x, h) = D_y^{(2)}(x, h) = D_y^{(2)}(x, 0) = D_y^{(3)}(x, 0).$$

为了确定未知函数 $f_1(s)$ 和 $f_2(s)$ ，必须求解上面两对对偶积分方程。

2 对偶积分方程的求解

这里可以利用 Schmidt^[23] 方法来求解对偶积分方程(29) ~ (32)，未知函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 可以展开成如下级数形式：

$$f_1(x) = f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_{2n-2}^{(1/2, 1/2)} \left[\frac{x}{l} \right] \left[1 - \frac{x^2}{l^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad -l \leq x \leq l, y = 0, \quad (34)$$

这里 a_n 是未知系数， $P_n^{(1/2, 1/2)}(x)$ 是雅可比多项式^[24]。方程(34) 经傅里叶变换后为^[25]：

$$f_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n G_n \frac{1}{s} J_{2n-1}(sl), \quad G_n = 2\sqrt{\pi}(-1)^{n-1} \frac{\Gamma(2n-1/2)}{(2n-2)!}, \quad (35)$$

这里 $\Gamma(x)$ 和 $J_n(x)$ 分别是伽玛函数和贝塞尔函数。

把方程(35) 代入到方程(29) ~ (32) 中，方程(31) 和(32) 能够自动满足，方程(29) 经过在区间 $-l < x < l$ 上对 x 积分后变为

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n G_n \int_0^{\infty} \frac{c_{44}}{s} [1 + e^{-sh}] J_{2n-1}(sl) \sin(sx) ds = \pi \tau_0 x. \quad (36)$$

利用关系式^[25]

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{s} J_n(sa) \sin(bs) ds = \begin{cases} \frac{\sin[n \arcsin(b/a)]}{n} & a > b, \\ \frac{a^n \sin(n\pi/2)}{n [b + \sqrt{b^2 - a^2}]^n} & b > a, \end{cases} \quad (37)$$

方程(36) 的半无限积分可变为：

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{s} [1 + e^{-sh}] J_{2n-1}(sl) \sin(sx) ds = \frac{1}{2n-1} \sin \left[(2n-1) \arcsin \left(\frac{x}{l} \right) \right] + \int_0^{\infty} \frac{1}{s} e^{-sh} J_{2n-1}(sl) \sin(sx) ds. \quad (38)$$

对于较大的变量 s ，方程(38) 中的积分函数几乎都是指数衰减形式。从而可容易进行数值

求解^[26]。至此方程(36)可以利用 Schmidt^[23]方法求解未知系数 a_n 。方程(36)可以简写为:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n E_n(x) = U(x) \quad -l < x < l, \tag{39}$$

这里 $E_n(x)$ 和 $U(x)$ 是已知函数, a_n 是要确定的未知函数。为了求解未知系数 a_n , 重新构造一函数序列 $P_n(x)$, $P_n(x)$ 满足如下正交条件:

$$\int_{-l}^l P_m(x) P_n(x) dx = N_n \delta_{mn}, \quad N_n = \int_{-l}^l P_n^2(x) dx, \tag{40}$$

而 $P_n(x)$ 是由已知函数 $E_n(x)$ 通过如下形式构造的:

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^n \frac{M_{in}}{M_{mm}} E_i(x), \tag{41}$$

这里 M_{ij} 是矩阵 D_n 的元素 d_{ij} 的余因子。矩阵 D_n 和元素 d_{ij} 分别定义为:

$$D_n = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & \dots & d_{2n} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & \dots & d_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & d_{n3} & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}, \quad d_{ij} = \int_{-l}^l E_i(x) E_j(x) dx. \tag{42}$$

利用方程(39)~(42)可得:

$$a_n = \sum_{j=n}^{\infty} q_j \frac{M_{nj}}{M_{jj}}, \quad q_j = \frac{1}{N_j} \int_{-l}^l U(x) P_j(x) dx. \tag{43}$$

3 强度因子

若未知系数 a_n 获得, 整个扰动应力场和扰动电位移场就可以获得。但对于断裂力学, 重要的是确定裂纹尖端附近的扰动应力场和扰动电位移场。沿裂纹面的应力 $\tau_{yz}^{(1)}$ 、 $\tau_{yz}^{(2)}$ 、 $\tau_{yz}^{(3)}$ 和电位移 $D_y^{(1)}$ 、 $D_y^{(2)}$ 、 $D_y^{(3)}$ 可分别表示为:

$$\begin{aligned} \tau_{yz}^{(1)}(x, h) &= \tau_{yz}^{(2)}(x, h) = \tau_{yz}^{(2)}(x, 0) = \tau_{yz}^{(3)}(x, 0) = \\ &= -\frac{c_{44}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a_n G_n \int_0^{\infty} [1 + e^{-sh}] J_{2n-1}(sl) \cos(xs) ds, \end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned} D_y^{(1)}(x, h) &= D_y^{(2)}(x, h) = D_y^{(2)}(x, 0) = D_y^{(3)}(x, 0) = \\ &= -\frac{e_{15}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a_n G_n \int_0^{\infty} [1 + e^{-sh}] J_{2n-1}(sl) \cos(xs) ds. \end{aligned} \tag{45}$$

通过观察方程(44)~(45)和利用下列关系式^[25]:

$$\int_0^{\infty} J_n(sa) \cos(bs) ds = \begin{cases} \frac{\cos[n \arcsin(b/a)]}{\sqrt{a^2 - b^2}} & a > b, \\ -\frac{a^n \sin(n\pi/2)}{\sqrt{b^2 - a^2} [b + \sqrt{b^2 - a^2}]^n} & b > a, \end{cases} \tag{46}$$

扰动应力场和扰动电位移场的奇异部分可分别表示为 ($l < x$):

$$\tau = \frac{c_{44}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a_n G_n H_n(x), \tag{47}$$

$$D = \frac{e_{15}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a_n G_n H_n(x), \tag{48}$$

这里
$$H_n(x) = \frac{(-1)^{n-1} l^{2n-1}}{\sqrt{x^2 - l^2} [x + \sqrt{x^2 - l^2}]^{2n-1}}$$

可得应力强度因子 K 为:

$$K = \lim_{x \rightarrow f^+} \sqrt{2\pi(x-l)} \cdot \tau = \frac{2c_{44}}{\sqrt{l}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(2n-1/2)}{(2n-2)!} \quad (49)$$

可得电位移强度因子 D_L 为:

$$D_L = \lim_{x \rightarrow f^+} \sqrt{2\pi(x-l)} \cdot D = \frac{2e_{15}}{\sqrt{l}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(2n-1/2)}{(2n-2)!} = \frac{e_{15}}{c_{44}} K \quad (50)$$

4 数值计算和讨论

从文献 [27] ~ [34] 中的研究方法可知, 可以利用 Schmidt 方法来求解方程 (39), 且选取级数的前 10 项就可以满足有关精度. 应力强度因子 K 和电位移强度因子 D_L 可以利用数值方法求得. 有关结果可以用图 2 至图 7 表示出来. 从这些图中可以得出如下结论:

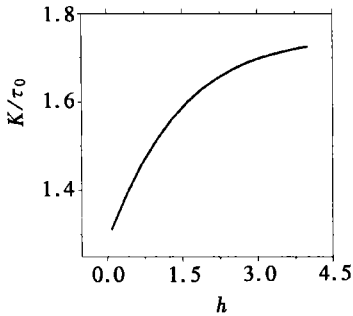


图 2 应力强度因子随 h 的变化情况 ($l = 1.0$)

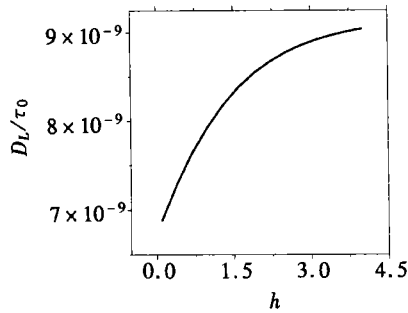


图 3 电位移强度因子随 h 的变化情况 ($l = 1.0$)

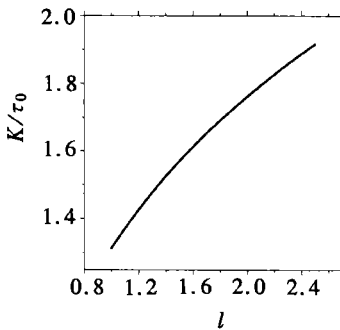


图 4 应力强度因子随 l 的变化情况 ($h = 0.1$)

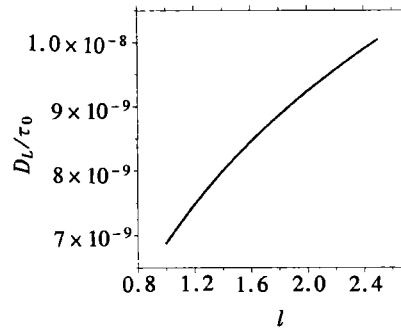


图 5 电位移强度因子随 l 的变化情况 ($h = 0.1$)

(i) 裂纹的应力强度因子 K 和电位移强度因子 D_L 不仅与裂纹长度有关, 而且与裂纹间距离有关.

(ii) 裂纹的应力强度因子 K 和电位移强度因子 D_L 随裂纹间距离增加而增加, 但随裂纹长度的减小而减小. 这种现象称为“屏蔽”效应.

(iii) 从图 3、图 5、图 7 和方程 (50) 中可以看出, 可导通裂纹的电位移强度因子远小于不可导通裂纹的电位移强度因子.

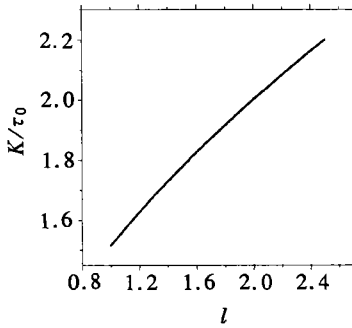


图6 应力强度因子随 l 的变化情况 ($h = 1.0$)

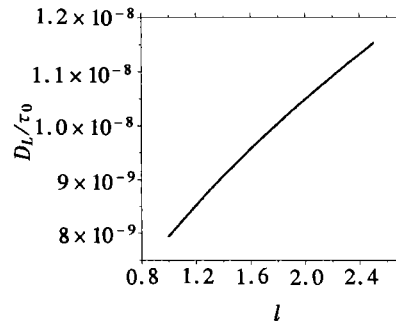


图7 电位移强度因子随 l 的变化情况 ($h = 1.0$)

(iv) 裂纹的应力强度因子 K 与材料参数无关, 但电位移强度因子 D_L 与材料参数有关。

[参 考 文 献]

- [1] Deeg W E F. The analysis of dislocation, crack and inclusion problems in piezoelectric solids[D]. Ph D thesis. Stanford University, 1980.
- [2] Pak Y E. Crack extension force in a piezoelectric material[J]. Journal of Applied Mechanics, 1990, **57**(4): 647—653.
- [3] Pak Y E. Linear electro-elastic fracture mechanics of piezoelectric materials[J]. International Journal of Fracture, 1992, **54**(1): 79—100.
- [4] Sosa H A, Pak Y E. Three dimensional eigenfunction analysis of a crack in a piezoelectric ceramics [J]. International Journal of Solids and Structures, 1990, **26**(1): 1—15.
- [5] Sosa H A. Plane problems in piezoelectric media with defects[J]. International Journal of Solids and Structures, 1991, **28**(4): 491—505.
- [6] Sosa H. On the fracture mechanics of piezoelectric solids[J]. International Journal of Solids and Structures, 1992, **29**(8): 2613—2622.
- [7] Suo Z, Kuo C M, Barnett D M, et al. Fracture mechanics for piezoelectric ceramics[J]. Journal of Mechanics and Physics of Solids, 1992, **40**(5): 739—765.
- [8] Pack S B, Sun C T. Fracture criteria for piezoelectric ceramics[J]. Journal of American Ceramics Society, 1995, **78**(7): 1475—1480.
- [9] Zhang T Y, Tong P. Fracture mechanics for a mode III crack in a piezoelectric material[J]. International Journal of Solids and Structures, 1996, **33**(5): 343—359.
- [10] Gao H, Zhang T Y, Tong P. Local and global energy rates for an elastically yielded crack in piezoelectric ceramics[J]. Journal of Mechanics and Physics of Solids, 1997, **45**(4): 491—510.
- [11] WANG Biao. Three dimensional analysis of a flat elliptical crack in a piezoelectric materials [J]. International Journal of Engineering Science, 1992, **30**(6): 781—791.
- [12] Narita K, Shindo Y. Scattering of Love waves by a surface-breaking crack in piezoelectric layered media [J]. JSME International Journal, Series A, 1998, **41**(1): 40—52.
- [13] Narita K, Shindo Y. Scattering of anti-plane shear waves by a finite crack in piezoelectric laminates[J]. Acta Mechanica, 1999, **134**(1): 27—43.
- [14] Zhou Z G, Wang B, Cao M S. Analysis of two collinear cracks in a piezoelectric layer bonded to dissimilar half spaces subjected to anti-plane shear[J]. European Journal of Mechanics, A/ Solids, 2001, **20**(2): 213—226.

- [15] Yu S W, Chen Z T. Transient response of a cracked infinite piezoelectric strip under anti-plane impact [J]. *Fatigue and Engineering Materials and Structures*, 1998, **21**(4): 1381—1388.
- [16] Zhang T Y, Hack J E. Mode III cracks in piezoelectric materials[J]. *Journal of Applied Physics*, 1992, **71**(9): 5865—5870.
- [17] McMeeking R M. On mechanical stress at cracks in dielectrics with application to dielectric breakdown [J]. *Journal of Applied Physics*, 1989, **62**(11): 3116—3122.
- [18] Suo Z. Models for breakdown-resistant dielectric and ferroelectric ceramics[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1993, **41**(6): 1155—1176.
- [19] Dunn M L. The effects of crack face boundary conditions on the fracture mechanics of piezoelectric solids[J]. *Engineering Fracture of Mechanics*, 1994, **48**(1): 25—39.
- [20] Zhang T Y, Tong P. Fracture mechanics for a mode III crack in a piezoelectric material[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1996, **33**(5): 343—359.
- [21] Sosa H, Khutoryansky N. Transient dynamic response of piezoelectric bodies subjected to internal electric impulses[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1999, **36**(9): 5467—5484.
- [22] Soh A K, Fang D N, Lee K L. Analysis of a bi-piezoelectric ceramic layer with an interfacial crack subjected to anti-plane shear and in-plane electric loading[J]. *European Journal of Mechanics, A/Solid*, 2000, **19**(6): 961—977.
- [23] Morse P M, Feshbach H. *Methods of Theoretical Physics*[M]. New York: McGraw-Hill, 1958, 1, 828—930.
- [24] Gradshteyn I S, Ryzhik I M. *Table of Integral, Series and Products*[M]. New York: Academic Press, 1980, 1035—1037.
- [25] Erdelyi A. *Tables of Integral Transforms*[M]. Vol 1. New York: McGraw-Hill, 1954, 34—89.
- [26] Amemiya A, Taguchi T. *Numerical Analysis and Fortran*[M]. Tokyo: Maruzen, 1969, 105—123.
- [27] Itou S. Three dimensional waves propagation in a cracked elastic solid[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1978, **45**(5): 807—811.
- [28] Zhou Z G, Bai Y Y, Zhang X W. Scattering of harmonic shear waves by a finite crack by using the non-local theory[J]. *International Journal of Engineering Science*, 1999, **37**(5): 609—620.
- [29] Zhou Z G, Bai Y Y, Zhang X W. Two collinear Griffith cracks subjected to uniform tension in infinitely long strip[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1999, **36**(36): 5597—5609.
- [30] Zhou Z G, Han J C, Du S Y. Investigation of a Griffith crack subject to anti-plane shear by using the non-local theory[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1999, **36**(26): 3891—3901.
- [31] Zhou Z G, Wang B, Du S Y. Scattering of harmonic anti-plane shear waves by a finite crack by using the non-local theory[J]. *International Journal of Fracture*, 1998, **91**(1): 13—22.
- [32] Zhou Z G, Zhang X W, Bai Y Y. Investigation of two Griffith cracks subject to uniform tension by using the non-local theory[J]. *International Journal of Engineering Science*, 1999, **37**(13): 1709—1722.
- [33] Zhou Z G, Shen Y P. Investigation of the scattering of harmonic shear waves by two collinear cracks using the non-local theory[J]. *Acta Mechanica*, 1999, **135**(3): 169—179.
- [34] 周振功, 王彪. 采用新方法研究非局部理论中I型裂纹的断裂问题[J]. *应用数学和力学*, 1999, **20**(10): 1025—1032.

The Behavior of Two Parallel Symmetric Permeable Cracks in Piezoelectric Materials

ZHOU Zhen_gong, WANG Biao

(P O Box 2147, Center for Composite Materials and Electro_Optics Research Center ,
Harbin Institute of Technology , Harbin 150001, P R China)

Abstract The behavior of two parallel symmetric cracks in piezoelectric materials under anti_plane shear loading was studied by the Schmidt method for the permeable crack face conditions. By using the Fourier transform , the problem can be solved with two pairs of dual integral equations in which the unknown variable is the jump of the displacement across the crack surfaces. These equations were solved using the Schmidt method. The results show that the stress and the electric displacement intensity factors of cracks depend on the geometry of the crack. Contrary to the impermeable crack surface condition solution , it is found that the electric displacement intensity factors for the permeable crack surface conditions are much smaller than the results for the impermeable crack surface conditions.

Key words: piezoelectric material; parallel crack; Schmidt method; dual_integral equation; stress and electric displacement; intensity factors