应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2002) 12_1289_07

Benson 真有效意义下向量集值优化的广义 Fritz John 条件*

盛宝怀[1,2], 刘三阳[1]

(1. 西安电子科技大学 应用数学系, 西安 710071; 2. 宁波大学 数学研究所, 浙江宁波 315211)

(张石生推荐)

摘要: 引入了一种有关集值映射的切导数和强、弱* 伪凸的概念· 借助凸集分离定理及锥分离定理建立了 Benson 真有效意义下向量集值优化导数型的 Fritz John 最优性条件, 并对条件的充分性进行了讨论· 当特殊到单值映射时这些最优性条件与经典的结果完全吻合·

关 键 词: Contingent 切锥; 集值映射; Benson 真有效; Fritz John 条件
中图分类号: O221.6 文献标识码: A

引 言

众所周知, Fritz John 最优性条件是约束优化理论中最为优美的内容之一· 这一条件已在弱有效意义下被推广到了抽象空间中的向量值函数[1]· 在[2]的第三章及[3]中 D.T.Luc 与 H.W.Corley 分别借助于同一种用集值映射的图及 Contingent 切锥而定义的切导数对集值优化弱有效元的特征进行了刻画· 在[4]中 Chen G.Y. 与 J.Jahn 借助于集值映射的上图, 利用 Contingent 切锥定义的一种广义的上图导数对锥凸集值映射建立了与[3]中类似的关于弱有效意义下的最优性条件· [5]、[6]也定义了类似的导数并用于广义锥次微分的讨论·

另一方面, 关于约束向量优化在 Benson 真有效意义下最优性条件也是一个重要而有吸引力的问题· 有关约束向量优化 Benson 真有效意义下的 Lagrange 乘子型最优性条件的讨论见[7]~[8]· 有关约束向量集值优化 Benson 真有效意义下的 Lagrange 乘子型最优性条件的讨论见[9]· 最近, 文[10]建立了弱 Benson 真有效意义下, 约束向量集值优化的一种 Fritz John 条件· 由于弱 Benson 真有效为一特殊的 Benson 真有效, 因而, 一般意义下约束向量集值优化 Benson 真有效元的 Fritz John 条件尚未看到· 本文利用借助于集值映射的上图及 Contingent 切锥而引入的切导数建立了约束向量集值优化在一般 Benson 真有效意义下的 Fritz John 最优性必要条件, 并在强、弱* 伪凸性的假设下证明了这种 Fritz John 条件还是充分的·

1 基 本 概 念

设 Y 为实赋范向量空间, Y^* 为 Y 的共轭空间, $S \subset Y$ 非空, cl$S$ 表示 S 的闭包, 称 S 为锥, 若

* 收稿日期: 2000_03_29; 修订日期: 2002_05_14
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(69972036); 宁波市博士基金资助项目; 宁波大学博士后基金资助项目
作者简介: 盛宝怀(1962—), 男, 陕西凤县人, 副教授, 博士(E_mail: shengbaohuai@263.net).

由 $\lambda > 0$, $s \in S$ 有 $\lambda s \in S$. 称锥 S 为点锥, 若 $S \cap (-S) = \{\theta_Y\}$ (其中 θ_Y 为 Y 中的零元向量). 设 $A \subset Y$ 则由 A 生成的锥定义为

$$\operatorname{cone} A = \{\lambda a : a \in A, \lambda \geqslant 0\}.$$

众所周知, 当 $A \neq \varnothing$ 时 $\operatorname{cone}(A)$ 为非空锥且 A 为凸集时 $\operatorname{cone}(A)$ 为凸锥. 称集合 B 为锥 S 的基, 若 B 为 S 的凸子集, $\theta_Y \notin \operatorname{cl} B$ 且 $S = \operatorname{cone} B$. 对 $A \subset Y$, $A \neq \varnothing$, 定义

$$P\min[A, S] = \{y \in A : (-S) \cap \operatorname{cl}\operatorname{cone}(A + S - y) = \{\theta_Y\}\},$$
$$P\max[A, S] = \{y \in A : S \cap \operatorname{cl}\operatorname{cone}(A - S - y) = \{\theta_Y\}\}.$$

我们称 $P\min[A, S]$ 为 A 的 Benson 真有效集, 并用

$$\min[A, S] = \{y \in A : A \cap (y - S) = \{y\}\}$$

表示 A 的有效集, 易证 $P\min[A, S] \subset \min[A, S]$.

除非特别声明, 以下均设 X 为向量空间, Y、Z 为赋范向量空间, $S \subset Y$, $K \subset Z$ 分别为 Y、Z 内的闭凸锥, $F: X \to 2^Y$, $G: X \to 2^Z$ 为两个集值映射.

锥 $S \subset Y$ 的共轭锥 S^* 定义为

$$S^* = \{s^* \in Y^* : s^*(s) \geqslant 0, s \in S\},$$

这里 $s^*(s)$ 为 s^* 在 s 上的值. 并定义 S^* 的拟内锥为

$$S^{*i} = \{s^* \in Y^* : s^*(s) > 0, s \in S \setminus \{\theta_Y\}\}.$$

设集值映射 $F: X \to 2^Y$, 如果对任意 $x_1, x_2 \in X$ 及 $\lambda \in (0, 1)$ 均有

$$\lambda F(x_1) + (1 - \lambda) F(x_2) \subset F(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) + S,$$

则称 F 在 X 上为 S_凸的.

F 的图 graph F 定义为

$$\operatorname{graph} F = \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}.$$

F 的上图 epi F 定义为

$$\operatorname{epi} F = \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x) + S\}.$$

一个众所周知的结果是 F 为 S_凸当且仅当 epi F 为 $X \times Y$ 中的凸集.

下面给出 Contingent 切锥的定义.

定义 1[11] (Contingent 切锥) 设 X 为一赋范向量空间, $A \subset X$, $x_0 \in \operatorname{cl} A$ 则 A 在 x_0 点之 Contingent 切锥 $T_A(x_0)$ 定义为

$$T_A(x_0) = \left\{v : \liminf_{h \to 0^+} \frac{d_A(x_0 + hv)}{h} = 0\right\},$$

这里 $d_A(z) = \inf\{\|z - u\| : u \in A\}$. 或 $v \in T_A(x_0)$ 当且仅当存在 $h_n \to 0^+$, $v_n \to v$, 而使对一切 $n \in \mathbf{N}$ 有 $x_0 + h_n v_n \in A$. 由[11] 知当 $x_0 \in \operatorname{int} A$ ($\operatorname{int} A$ 表示 A 的内部) 时, $T_A(x_0) = X$, 且当 A 为一凸集时

$$T_A(x_0) = \operatorname{cl}\operatorname{cone}(A - x_0).$$

下面给出关于集值映射 Contingent 切导数的定义.

定义 2 集值映射 $F: X \to 2^Y$ 在 $(x_0, y_0) \in \operatorname{graph} F$ 的 Contingent 切导数 $DF(x_0, y_0)$ 定义为映 X 到 Y 的集值映射, 其满足

$$\operatorname{epi} DF(x_0, y_0) = T_{\operatorname{epi} F}(x_0, y_0).$$

当集值映射 $DF(x_0, y_0)$ 存在时称 $F(x)$ 在 $(x_0, y_0) \in \operatorname{graph} F$ 为 Contingent 为可导的.

设 $F: X \to 2^Y$, $(x_0, y_0) \in \operatorname{graph} F$, F 在 (x_0, y_0) 点 Contingent 可导, 则 F 在点 (x_0, y_0) 称为

强* S_Contingent 伪凸的, 如果对 $\lambda_0 \in S^* \setminus \{\theta_{Y^*}\}$ 由

$$\lambda_0(F(x') - y_0) \cap (-R_{++}) \neq \approxeq, \quad x' \in X•$$

有

$$\lambda_0(DF(x_0, y_0)(x' - x_0)) \cap (-R_{++}) \neq \approxeq, \quad x' \in X•$$

F 在点(x_0, y_0) 称为弱* S_Contingent 伪凸的, 如果对 $\lambda_0 \in S^* \setminus \{\theta_{Y^*}\}$ 由

$$\lambda_0(F(x') - y_0)) \cap (-R_+) \neq \approxeq, \quad x' \in X•$$

有

$$\lambda_0(DF(x_0, y_0)(x' - x_0)) \cap (-R_+) \neq \approxeq, \quad x' \in X•$$

这里 $R_+ = [0, +\infty)$, $R_{++} = (0, +\infty)$•

考虑如下约束向量集值优化问题(vector set_valued maps optimization problems, VSVMOP)

$$(\text{VSVMOP})\ S - \min_{\text{s.t. } x \in E} F(x),$$

这里 $E = \{x : G(x) \cap (-K) \neq \approxeq\}$• 记 E 在 F 下的像集为 $F(E) = \bigcup_{x \in E} F(x)$•

如果 存在 $x_0 \in E$ 使

$$F(x_0) \cap P\min[F(E), S] \neq \approxeq,$$

则称 x_0 为(VSVMOP) 的一个 Benson 真有效解• 又若

$$y_0 \in F(x_0) \cap P\min[F(E), S],$$

则称 (x_0, y_0) 为(VSVMOP) 的一个 Benson 真有效元• 本文中用 **N** 表示自然数的集合且当设集合 $A, B \subset X$ 时令

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\},$$
$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}•$$

对实数集 $A \subset \mathbf{R}$(其中 $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$)$A \geqslant 0$ 指对任意 $a \in A$, $a \geqslant 0$•

2 主要结果及其证明

引理 1[12] 设 P 和 S 是某局部凸拓扑线性空间中的两个闭凸锥, S 还是点锥并有紧基• 若 $P \cap (-S) = \{\theta_Y\}$, 则存在 $\varphi \in S^{*i}$ 而使 $\varphi \in P^*$•

引理 2 $(S \times K)^{*i} = S^{*i} \times K^{*i}$•

证明 显然 $(S \times K)^{*i} \supseteq S^{*i} \times K^{*i}$• 下证$(S \times K)^{*i} \subseteq S^{*i} \times K^{*i}$• 设 $\varphi \in (S \times K)^{*i}$ 则由[13] $\varphi \in (S \times K)^* = S^* \times K^*$, 因而可令 $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ 其中 $\varphi_1 \in S^*$, $\varphi_2 \in K^*$, 且对任意$(s, k) \in S \times K$, $(s, k) \neq (\theta_Y, \theta_Z)$ 有 $\varphi(s, k) = \varphi_1(s) + \varphi_2(k) > 0$• 下证 $\varphi_1 \in S^{*i}$, $\varphi_2 \in K^{*i}$• 否则, 如设 $\varphi_2 \notin K^{*i}$, 则存在 $k_0 \in K$, $k_0 \neq \theta_Z$ 而使 $\varphi_2(k_0) = 0$• 这时$(\theta_Y, \theta_Z) \neq (\theta_Y, k_0) \in S \times K$ 但 $\varphi(\theta_Y, k_0) = \varphi_1(\theta_Y) + \varphi_2(k_0) = 0 + \varphi_2(k_0) = 0$• 这与已证的结果矛盾•

定理 1(Fritz John 条件) 设 $F(x): X \to 2^Y$ 为一个 Contingent 可导的 S_凸集值映射, $G(x): X \to 2^Z$ 为一个 Contingent 可导的 K_凸集值映射, $(x_0, y_0) \in \text{graph } F$ 为(VSVMOP) 的一个 Benson 真有效元, S 具有紧基, 则对任意 $z_0 \in G(x_0) \cap (-K)$, 存在 $s^* \in S^{*i} \cup \{\theta_{Y^*}\}$, $k^* \in K^*$, 使

$$\inf_{x \in X} [s^*(DF(x_0, y_0)(x)) + k^*(DG(x_0, z_0)(x))] = 0, \tag{1}$$

且

$$k^*(G(x_0) \cap (-K)) = \{0\}• \tag{2}$$

其中

$$s^*(\mathrm{DF}(x_0,y_0)(x))=\bigcup_{y\in \mathrm{DF}(x_0,y_0)(x)} s^*(y),$$

$$k^*(\mathrm{DG}(x_0,z_0)(x))=\bigcup_{z\in DG(x_0,z_0)(x)} k^*(z),$$

$$k^*(\mathrm{G}(x_0)\cap(-K))=\bigcup_{z\in G(x_0)\cap(-K)} k^*(z)\cdot$$

证明 令 $\varphi^*(x)=\mathrm{DF}(x_0,y_0)(x)\times(\mathrm{DG}(x_0,z_0)(x)+\mathrm{G}(x_0)\cap(-K))$, 则 $\varphi^*(x):X\to 2^{Y\times Z}$ 为一个 $S\times K$ 凸集值映射• 因为(x_0,y_0) 为(VSVMOP) 的一个Benson 真有效元, 我们有

$$\mathrm{cl\ cone}(\mathrm{F}(E)+S-y_0)\cap(-S)=\{\theta_Y\}\cdot \tag{3}$$

令 $\varphi^*(X)=\bigcup_{x\in X}\varphi^*(x)$• 我们首先证明

$$\mathrm{cl\ cone}(\varphi^*(X)+S\times K)\cap[-((S\setminus\{\theta_Y\})\times \mathrm{int}\,K)]=\varnothing\cdot \tag{4}$$

假如(4) 不成立, 则存在 $(\alpha,\beta)\in Y\times Z$ 使

$$(\alpha,\beta)\in \mathrm{cl\ cone}(\varphi^*(X)+S\times K)\cap[-((S\setminus\{\theta_Y\})\times \mathrm{int}\,K)], \tag{5}$$

由此可知存在 $x_n\in X$, $\lambda_n\geqslant 0$, $y_n\in \mathrm{DF}(x_0,y_0)(x_n)$, $z_n\in \mathrm{DG}(x_0,z_0)(x_n)$, $z_n^*\in \mathrm{G}(x_0)\cap(-K)$, $(s_n,k_n)\in S\times K$ 而使

$$\begin{aligned}(\alpha,\beta)&=\lim_{n\to\infty}[\lambda_n(y_n,z_n+z_n^*)+(s_n,k_n)]=\\&\lim_{n\to\infty}\lambda_n(y_n+s_n,z_n+z_n^*+k_n)=\\&\lim_{n\to\infty}\lambda_n[(y_n+s_n,z_n+k_n)+(\theta_Y,z_n^*)]\in-((S\setminus\{\theta_Y\})\times \mathrm{int}\,K)\cdot\end{aligned}$$

这样 $\alpha=\lim_{n\to\infty}\lambda_n(y_n+s_n)\in-(S\setminus\{\theta_Y\})$, $\beta=\lim_{n\to\infty}\lambda_n(z_n+z_n^*+k_n)\in-\mathrm{int}\,K$• 因为int K 为一开集, 不失一般性, 我们设 $\lambda_n(z_n+z_n^*+k_n)\in-\mathrm{int}\,K$ $(n\in\mathbf{N})$, $\lambda_n>0$• 因而 $z_n+z_n^*+k_n\in-\mathrm{int}\,K$ $(n\in\mathbf{N})$ 及 $z_n+z_n^*\in-\mathrm{int}\,K-k_n\subset-\mathrm{int}\,K$ $(n\in\mathbf{N})$• 由 $y_n\in \mathrm{DF}(x_0,y_0)(x_n)$, $z_n\in \mathrm{DG}(x_0,z_0)(x_n)$ 我们有 $t_{n(i)}>0$ $(i\in\mathbf{N})$, $t_{n(i)}\to+\infty$ $(i\to+\infty)$, $x_{n(i)}\in X$, $z_{n(i)}\in G(x_{n(i)})+K$ $(i\in\mathbf{N})$, $(x_{n(i)},z_{n(i)})\to(x_0,z_0)$ $(i\to+\infty)$, 而使

$$(x_n,z_n)=\lim_{i\to\infty}(t_{n(i)}(x_{n(i)}-x_0),t_{n(i)}(z_{n(i)}-z_0))\cdot$$

因此

$$\lim_{i\to\infty}t_{n(i)}(z_{n(i)}-z_0)+z_n^*\in-\mathrm{int}\,K\cdot$$

因为 int K 为开集, 不失一般性假设

$$t_{n(i)}(z_{n(i)}-z_0)+z_n^*\in-\mathrm{int}\,K\qquad(i\in\mathbf{N})$$

或

$$(z_{n(i)}-z_0)+\frac{z_n^*}{t_{n(i)}}\in-\mathrm{int}\,K\qquad(i\in\mathbf{N})\cdot$$

因此

$$z_{n(i)}\in z_0-\frac{z_n^*}{t_{n(i)}}-\mathrm{int}\,K\subset-K\qquad(i\in\mathbf{N})\cdot$$

设 $z_{n(i)}=z'_{n(i)}+k'_{n(i)}$, $z'_{n(i)}\in \mathrm{G}(x_{n(i)})$, $k'_{n(i)}\in K$ $(i\in\mathbf{N})$ 则 $z'_{n(i)}\in-K-k'_{n(i)}\subset-\mathrm{K}$ $(i\in\mathbf{N})$• 因而 $\mathrm{G}(x_{n(i)})\cap(-K)\neq\varnothing$ $(i\in\mathbf{N})$, 和 $x_{n(i)}\in E$ $(i\in\mathbf{N})$• 这样 $x_n\in T_E(x_0)$, 由于 $\mathrm{DF}(x_0,y_0)(T_E(x_0))\subset \mathrm{cl\ cone}(\mathrm{F}(E)+S-y_0)$ 因此 $y_n\in \mathrm{cl\ cone}(\mathrm{F}(E)+S-y_0)$• 又由 $\alpha=\lim_{n\to\infty}\lambda_n(y_n+s_n)$ 知道 $\alpha\in \mathrm{cl\ cone}(\mathrm{F}(E)+S-y_0)$ 因此

$$\alpha\in \mathrm{cl\ cone}(\mathrm{F}(E)+S-y_0)\cap[-(S\setminus\{\theta_Y\})],$$

这与(3)矛盾了。因此(4)成立，由其知

$$\mathrm{cl\,cone}(\varphi^*(X)+S\times K)\cap[-(S\times\{\theta_Z\})]=\{(\theta_Y,\theta_Z)\}。\tag{6}$$

因为 S 具有紧基，因而 $S\times\{\theta_Z\}$ 也有紧基，由[14]的 Theorem 2.3，存在点锥 P 而使 $-(S\times\{\theta_Z\})\setminus\{(\theta_Y,\theta_Z)\}\subset \mathrm{int}\,P$ 且

$$\mathrm{cl\,cone}(\varphi^*(X)+S\times K)\cap P=\{(\theta_Y,\theta_Z)\}。$$

令 $Q=[-(S\setminus\{\theta_Y\})\times(\mathrm{int}\,K\cup\{\theta_Z\})+P]\cup\{(\theta_Y,\theta_Z)\}$。则 Q 为一凸锥且由[15]的Theorem 2.2 知 $\mathrm{int}\,Q=\mathrm{int}\,P-(S\setminus\{\theta_Y\})\times(\mathrm{int}\,K\cup\{\theta_Z\})$。对每个 $s\in S\setminus\{\theta_Y\}$，$k\in\mathrm{int}\,K\cup\{\theta_Z\}$，$-(s,k)=-(s/2,k)-(s/2,\theta_Z)\in-[(S\setminus\{\theta_Y\})\times(\mathrm{int}\,K\cup\{\theta_Z\})]+\mathrm{int}\,P=\mathrm{int}\,Q$。由此得到 $-[(S\setminus\{\theta_Y\})\times(\mathrm{int}\,K\cup\{\theta_Z\})]\subset\mathrm{int}\,Q$。我们将证明 Q 为点锥。对 $z_0\in G(x_0)\cap(-K)$ 及 $(s,k)\in S\times K$ 有

$$\begin{aligned}(s,k)=&(\theta_Y,z_0)+(s,k-z_0)\in\\ &[\mathrm{DF}(x_0,y_0)(X),\mathrm{DG}(x_0,z_0)(X)+G(x_0)\cap(-K)]+S\times K\subset\\ &\mathrm{cl\,cone}(\varphi^*(X)+S\times K),\end{aligned}$$

由此知 $S\times K\subset\mathrm{cl\,cone}(\varphi^*(X)+S\times K)$。由

$$\mathrm{cl\,cone}(\varphi^*(X)+S\times K)\cap P=\{(\theta_Y,\theta_Z)\}$$

知 $(S\times K)\cap P=\{(\theta_Y,\theta_Z)\}$。因而 $[(S\setminus\{\theta_Y\})\times(\mathrm{int}K\cup\{\theta_Z\})]\cap P=\emptyset$。由此及 S，$\mathrm{int}K\cup\{\theta_Z\}$，$P$ 为点锥知 Q 为点锥。

我们将证明

$$\mathrm{cl\,cone}(\varphi^*(X)+S\times K)\cap Q=\{(\theta_Y,\theta_Z)\}。$$

否则，存在 $u\in\mathrm{cl\,cone}(\varphi^*(X)+S\times K)\cap Q$，$u\neq\theta_{Y\times Z}$。由 Q 的定义，令 $u=u_1+u_2$，其中 $u_1\in-[(S\setminus\{\theta_Y\})\times(\mathrm{int}\,K\cup\{\theta_Z\})]$，$u_2\in P$。这便表明

$$\begin{aligned}u_2=u-u_1\in&[\mathrm{cl\,cone}(\varphi^*(X)+S\times K)-u_1]\cap P\subset\\ &\mathrm{cl\,cone}(\varphi^*(X)+S\times K)\cap P=\\ &\{(\theta_Y,\theta_Z)\}。\end{aligned}$$

因此，由(4)知道 $u=u_1\in\mathrm{cl\,cone}(\varphi^*(X)+S\times K)\cap\{-[(S\setminus\{\theta_Y\})\times(\mathrm{int}K\cup\{\theta_Z\})]\}=\emptyset$，导致矛盾。由凸集分离定理知道，存在 $(s^*,k^*)\in Q^*$ 使

$$s^*(s)+k^*(k)\geqslant 0,\qquad (s,k)\in\mathrm{cl\,cone}(\varphi^*(X)+S\times K)。$$

因此

$$s^*(\mathrm{DF}(x_0,y_0)(x))+k^*(\mathrm{DG}(x_0,z_0)(x)+G(x_0)\cap(-K))\geqslant 0\qquad x\in X,\tag{7}$$

及 $s^*(s)+k^*(k)<0$，$(s,k)\in\mathrm{int}Q$。因为 $-((S\setminus\{\theta_Y\})\times(\mathrm{int}\,K\cup\{\theta_Z\}))\subset\mathrm{int}\,Q$。我们得到

$$s^*(s)+k^*(k)>0,\quad (s,k)\in(S\setminus\{\theta_Y\})\times(\mathrm{int}K\cup\{\theta_Z\})。$$

因而 $s^*\in S^{*i}$。令 $s\to\theta_Y$，则 $k^*\in K^*$。在(7)中令 $x=\theta_X$ 则 $k^*(G(x_0)\cap(-K))\geqslant 0$。由 K^* 的定义 $k^*(G(x_0)\cap(-K))\leqslant 0$。由此及(7)我们得到(1)和(2)。

定理 2(充分性条件) 令 $F(x):X\to 2^Y$ 为一个强* S_Contingent 伪凸集值映射，$G(x):X\to 2^Z$ 为一个弱* K_Contingent 伪凸集值映射，$(x_0,y_0)\in\mathrm{graph}\,F$，且对任何 $z_0\in G(x_0)\cap(-K)$，存在 $s^*\in S^{*i}$，$k^*\in K^*$，使

$$\inf_{x\in E}[s^*(\mathrm{DF}(x_0,y_0)(x))+k^*(\mathrm{DG}(x_0,z_0)(x))]=0, \tag{8}$$

$$k^*(\mathrm{G}(x_0)\cap(-K))=\{0\}• \tag{9}$$

则 (x_0,y_0) 为(VSVMOP) 的一个 Benson 真有效元•

证明 如若不然, 设 (x_0,y_0) 不为(VSVMOP) 的 Benson 真有效元, 则 $y_0 \notin P\min[\mathrm{F}(E),S]$, 由此知

$$(-S)\cap \mathrm{cl\,cone}(\mathrm{F}(E)+S-y_0)\neq\{\theta_Y\}•$$

令 $\alpha\in(-S)\cap\mathrm{cl\,cone}(\mathrm{F}(E)+S-y_0)$ 且 $\alpha\neq\theta_Y$• 则一方面 $s^*(\alpha)<0$• 另一方面存在 $\lambda_n\geqslant 0, y_n\in\mathrm{F}(x_n)\subset\mathrm{F}(E), s_n\in S(n\in\mathbf{N})$ 使 $\alpha=\lim\limits_{n\ \ +\infty}\lambda_n(y_n+s_n-y_0)$• 因此

$$s^*(\alpha)=\lim_{n\ \ +\infty}\lambda_n(s^*(y_n)+s^*(s_n)-s^*(y_0))=$$
$$\lim_{n\ \ +\infty}\lambda_n(s^*(y_n-y_0)+s^*(s_n))•$$

因为 $s^*(s)\geqslant 0, s\in S$• 所以 $\lim\limits_{n\ \ +\infty}\lambda_n s^*(y_n-y_0)<0$• 不失一般性, 设 $\lambda_n>0(n\in\mathbf{N})$• 因此可设当 $n\in\mathbf{N}$ 时 $s^*(y_n-y_0)<0$, 因而 $s^*(\mathrm{F}(x_n)-y_0)\cap[-R_{++}]\neq\approxeq$• 由 $\mathrm{F}(x)$ 为强 * S_Contingent 伪凸的假设知道 $s^*(\mathrm{DF}(x_0,y_0)(x_n-x_0))\cap[-R_{++}]\neq\approxeq$•

由 $x_n\in E$ 得 $\mathrm{G}(x_n)\cap[-K]\neq\approxeq$• 因而由(9) 知存在 $z_n\in\mathrm{G}(x_n)\cap[-K]$ 使对任意 $z_0\in\mathrm{G}(x_0)\cap[-K]$ 有 $k^*(z_n-z_0)\leqslant 0$• 因此 $k^*(\mathrm{G}(x_n)-z_0)\cap[-R_+]\neq\approxeq$, 由此及定理 2 的假设知道 $k^*(\mathrm{DG}(x_0,z_0)(x_n-x_0))\cap[-R_+]\neq\approxeq$• 因而

$$[s^*(\mathrm{DF}(x_0,y_0)(x_n-x_0))+k^*(\mathrm{DG}(x_0,z_0)(x_n-x_0))]\cap[-R_{++}]\neq\approxeq•$$

这与(8) 矛盾• 因此(x_0,y_0) 为(VSVMOP) 的一个 Benson 真有效元•

这里需要指出的是满足强 * S_Contingent 伪凸及弱 * S_Contingent 伪凸的集值映射是存在的• 例如, 设 $\mathrm{F}(x):X\to 2^Y$ 为 Contingent 可导的 S_凸集值映射, $(x_0,y_0)\in\mathrm{graph\ F}$, 则对任意 $x\in X$, 由定义 2 有

$$\mathrm{F}(x)-y_0\subset\mathrm{DF}(x_0,y_0)(x-x_0)+S•$$

因此对任意 $s^*\in S^*\setminus\{\theta_{Y^*}\}$ 我们有

$$s^*(\mathrm{F}(x)-y_0)\subset s^*(\mathrm{DF}(x_0,y_0)(x-x_0)+S)=$$
$$s^*(\mathrm{DF}(x_0,y_0)(x-x_0))+s^*(S)•$$

由于 $s^*(S)\geqslant 0$, 因此当 $s^*\in S^*\setminus\{\theta_{Y^*}\}$ 时由 $s^*(\mathrm{F}(x)-y_0)\cap[-R_{++}]\neq\approxeq$ 得到 $s^*(\mathrm{DF}(x_0,y_0)(x-x_0))\cap[-R_{++}]\neq\approxeq$• 当 $s^*\in S^*\setminus\{\theta_{Y^*}\}$ 时由 $s^*(\mathrm{F}(x)-y_0)\cap[-R_+]\neq\approxeq$ 有 $s^*(\mathrm{DF}(x_0,y_0)(x-x_0))\cap[-R_+]\neq\approxeq$• 因此 $\mathrm{F}(x)$ 既为强 * S_Contingent 伪凸又为弱 * S_Contingent 伪凸的集值映射• 这说明定理 2 中对集值映射的附加条件是有意义的•

[参 考 文 献]

[1] 胡毓达. 多目标规划有效性理论[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1994, 126—127.

[2] Luc D T. Theory of Vector Optimization, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems [M]. Berlin: Springer_Verlag, 1989: 140—164.

[3] Corley H W. Optimality conditions for maximizations of set_valued functions[J]. J Optim Theory Appl, 1988, **58**(1): 1—10.

[4] CHEN Guang_ya, Jahn J. Optimality conditions for set_valued optimization problems[J]. Math Methods Oper Res, 1998, **48**(2): 187—200.

[5] 孟志青. 集值映射的 Hahn_Banach 定理[J]. 应用数学和力学, 1998, **19**(1): 55—61.

[6] Baier J, Jahn J. On subdifferential of set_valued maps[J]. J Optim Theory Appl, 1999, **100**(1): 233—240.

[7] WANG Shou_yang, LI Zhong_fei. Scalarization and Lagrange duality in multiobjective optimization[J]. Optimization, 1992, **26**(2): 315—324.

[8] CHEN Guang_ya, RONG Wei_dong. Characterizations of the Benson proper efficiency for nonconvex vector optimization[J]. J Optim Theory Appl, 1998, **98**(2): 365—384.

[9] LI Zhong_fei. Benson proper efficiency in the vector optimization of set_valued maps[J]. J Optim Theory Appl, 1998, **98**(3): 623—649.

[10] 盛宝怀, 刘三阳, 熊胜君. Benson 真有效意义下向量集值优化的广义 Fritz John 条件[J]. 经济数学, 2000, **17**(1): 59—65.

[11] Aubin J P, Frankowska H. Set_Valued Analysis[M]. Boston: Birkhauser, 1990, 121—138.

[12] Borwein J M. Proper efficient points for maximizations with respect to cone[J]. SIAM J Control Optim, 1977, **15**(1): 57—63.

[13] LI Ze_min. A theorem of the alternative and its application to the optimization of set_valued maps[J]. J Optim Theory Appl, 1999, **100**(2): 365—375.

[14] Dauer J P, Saleh O A. A characterization of proper minimal problem as a solutions of sublinear optimization problems[J]. J Math Anal Appl, 1993, **178**(2): 227—246.

[15] Zowe J. A remark on a regularity assumption for the mathematical programming problem in Banach spaces[J]. J Optim Theory Appl, 1978, **25**(3): 375—381.

On the Generalized Fritz John Optimality Conditions of Vector Optimization With Set_Valued Maps Under Benson Proper Efficiency

SHENG Bao_huai[1,2], LIU San_yang[1]

(1. Department of Applied Mathematics, Xidian University, Xi'an 710071, P R China;

2. Institute of Mathematics, Ningbo University, Ningbo, Zhejiang 315211, P R China)

Abstract: A kind of tangent derivative and the concepts of strong and weak * pseudoconvexity for a set_valued map are introduced. By the standard separation theorems of the convex sets and cones the optimality Fritz John condition of set_valued optimization under Benson proper efficiency is established, its sufficience is discussed. The form of the optimality conditions obtained here completely tally with the classical results when the set_valued map is specialized to be a single_valued map.

Key words: Contingent tangent cone; set_valued map; Benson proper efficiency; Fritz John condition