

文章编号: 1000-0887(2002) 12-1307-07

# 可变形孔隙介质中热、水耦合力学问题的 代数多格子分析方法

王希诚, 葛增杰, 吴宏宇

(大连理工大学 工程力学系, 大连 116023)

(程耿东推荐)

**摘要:** 研究了孔隙介质中包括热和质量传递的全耦合多相流问题的代数多格子分析方法。数学模型包括质量、线性矩、能量平衡方程和本构方程, 以位移、毛细压力、汽压和温度为基本变量, 模型中采用了考虑毛细压力关系的修正有效应力概念, 并考虑相变、热传导、对流和潜热交换(汽化、冷凝), 气相是由易混合的干空气和水蒸气组成, 视为理想气体。考题显示出较高的计算效率。

**关键词:** 多相流; 可变形孔隙介质; 相变; 网格; 迭代法

**中图分类号:** TU43; O347 **文献标识码:** A

## 引 言

多相流问题的研究对于石油和天然气的开采, 地热的开发, 环境保护, 海底隧道及大型地下建筑等工程领域具有十分重大的意义, 成为近年来一个热门研究领域<sup>[1]</sup>。由于问题的非线性以及求解的时间跨度较长, 多相流分析具有高度计算复杂性, 必须寻求高效快速的数值计算方法。多格子方法(multigrid method)是在 20 世纪 70 年代发展起来的一种求解偏微分方程数值解的快速迭代方法, 在计算流体力学中有很好的应用。其基本思想是: 将问题剖分为粗、细网格, 在细网格上求解原始方程, 并通过松弛作用减少误差函数的高频分量; 在粗网格上求解误差方程, 减少误差函数的低频分量; 充分利用粗、细网格对误差的磨光特性达到快速收敛的效果。文献表明<sup>[2]</sup>, 它可以把现有计算程序的计算速度提高 1~2 个数量级。由于此方法的适用性依赖于几何剖分, 并且不能有效地用于边界形状复杂的问题。为此, 近年来又发展出一种代数多格子(AMG)方法<sup>[3]</sup>。这种方法不涉及原问题的任何几何或物理性质, 仅利用多重网格原理自动求解由原问题导出的代数方程组, 非常容易同已有的非多格子软件结合。本文探讨 AMG 方法在可变形孔隙介质中热、水耦合多相流分析领域中的应用, 以提高计算效率。

## 1 数学模型

本文求解孔隙介质中热、水和汽全耦合的多相流模型。孔隙介质被视为一种多相系统, 土

收稿日期: 2000\_12\_25; 修订日期: 2002\_04\_09

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(59778044); 国家高性能计算基金资助项目(99101); 国家 973 项目资助课题(G1999032805)

作者简介: 王希诚(1946), 男, 辽宁大连人, 教授, 博士生导师(E-mail: guixum@dlut.edu.cn).

体骨架的孔隙中含有水和汽, 汽是由干空气和水蒸气混合的理想气体组成。模型中包括质量、能量守恒方程, 线性矩平衡方程和本构方程, 采用了考虑毛细压力关系的修正有效应力概念, 并考虑相变、热传导、对流和潜热交换。介质的状态由汽压  $p_g$ , 毛细压力  $p_c$ , 温度  $T$  和骨架位移  $u$  描述

### 1.1 本构关系

将液体饱和度  $S_w$  表示为毛细压力  $p_c$  和温度  $T$  的函数

$$S_w = S_w(p_c, T), \quad (1)$$

式中毛细压力为

$$p_c = p_g - p_w, \quad (2)$$

$p_g, p_w$  分别为潮湿空气和流体水压力, 孔隙系统中的潮湿空气假定为干空气(ga) 与水蒸汽(gw) 两种理想气体的完全混合, 服从理想气体状态方程

$$p_{ga} = \frac{p_g M_{ga}}{M_{ga}}, \quad p_{gw} = \frac{p_g M_{gw}}{M_{gw}}, \quad p_g = p_{ga} + p_{gw}, \quad (3)$$

式中  $M$ 、 $\rho$  分别是组分 (干空气和水蒸汽) 的摩尔质量、密度和压力,  $R$  是气体常数,  $T$  为绝对温度。由 Kelvin-Laplace 定律, 孔隙中湿空气的相对湿度 ( $H$ ) 为

$$H = \frac{p_{gw}}{p_{gws}} = \exp\left[-\frac{p_c M_w}{w RT}\right], \quad (4)$$

式中  $p_{gws}$  为水蒸汽饱和汽压

由 Clausius-Clapeyron 方程得水蒸汽饱和压力

$$p_{gws}(T) = p_{gws0} \exp\left[-\frac{M_w h_{vap}}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)\right], \quad (5)$$

其中  $T_0$  是初始温度,  $p_{gws0}$  是  $T_0$  时的饱和汽压,  $h_{vap}$  为汽化热。由修正的有效应力概念可导出固体相的本构关系

$$\sigma = - (S_w p_w + S_g p_g) \mathbf{I}, \quad (6)$$

$\sigma$  是总应力,  $\sigma_{eff}$  是有效应力或 Bishop 应力,  $\mathbf{I}$  是单位张量,  $\alpha$  是 Biot 常数

$$\sigma_{eff} = \left(1 - \frac{K_T}{K_S}\right) \sigma, \quad (7)$$

$K_T$  和  $K_S$  分别是孔隙介质和固体的体积模量。有效应力  $\sigma_{eff}$  由固体骨架变形产生, 其与应变的关系为

$$d\epsilon = C_T (d\epsilon - d\epsilon^T - d\epsilon^0), \quad (8)$$

其中切向本构张量

$$C_T = C_T(\epsilon, \epsilon, T), \quad (9)$$

$d\epsilon^T = \mathbf{I}(\alpha/3)dT$  是由热弹性膨胀引起的应变增量,  $\alpha$  是固体的体热胀系数

由 Darcy 方程

$$\mathbf{v} = - \frac{K K_r}{\mu} (\text{grad} p - \rho \mathbf{g}), \quad (10)$$

其中  $\mathbf{v}$  是 (液和气) 相相对于固体相的速度,  $K$  是绝对渗透系数,  $K_r$ ,  $\mu$  分别是相的相对渗透系数和动粘度,  $\mathbf{g}$  是重力加速度。扩散质量由 Fick 定律控制

$$\mathbf{v}_{ga} = - \frac{M_a M_w}{M^2} \mathbf{D}_{eff} \text{grad} \left( \frac{p_{ga}}{p_g} \right) = \frac{M_a M_w}{M^2} \mathbf{D}_{eff} \text{grad} \left( \frac{p_{gw}}{p_g} \right) = - \mathbf{v}_{gw} \quad (11)$$

### 1.2 控制方程

控制方程由运用均匀化方法和上述本构关系于微相方程得出<sup>[4~5]</sup>: 气体质量守恒方程:

$$-\frac{1}{t} (1 - S_w)_{ga} + (1 - S_w)_{ga} \operatorname{div} \mathbf{u} - \operatorname{div} \left[ \frac{KK_{rg}}{g} \operatorname{grad} p_g \right] + \operatorname{div} \left[ \frac{M_a M_w}{M^2} \mathbf{D}_{\text{eff}} \operatorname{grad} \left( \frac{p_{gw}}{p_g} \right) \right] = 0, \quad (12)$$

其中  $\mathbf{u}$  是固体速度

液体质量守恒方程:

$$-\frac{1}{t} (1 - S_w)_{gw} + (1 - S_w)_{gw} \operatorname{div} \mathbf{u} - \operatorname{div} \left[ \frac{KK_{rg}}{g} \operatorname{grad} p_g \right] - \operatorname{div} \left[ \frac{M_a M_w}{M^2} \mathbf{D}_{\text{eff}} \operatorname{grad} \left( \frac{p_{gw}}{p_g} \right) \right] = -\frac{1}{t} (S_w - w) - S_w - w \operatorname{div} \mathbf{u} + \operatorname{div} \left[ \frac{KK_{rw}}{w} (\operatorname{grad} p_g - \operatorname{grad} p_c - w) \right] \quad (13)$$

能量守恒方程:

$$C_p \frac{T}{t} - \operatorname{div}(\mathbf{D}_{\text{eff}} \operatorname{grad} T) - \left[ C_{pw} \frac{KK_{rw}}{w} (\operatorname{grad} p_g - \operatorname{grad} p_c - w) + C_{pg} \frac{KK_{rg}}{g} \operatorname{grad} p_g \right] \operatorname{grad} T = h_{\text{vap}} \left[ -\frac{1}{t} (S_w - w) + S_w - w \operatorname{div} \mathbf{u} - \operatorname{div} \left[ \frac{KK_{rw}}{w} (\operatorname{grad} p_g - \operatorname{grad} p_c - w) \right] \right] \quad (14)$$

线性矩平衡方程:

$$\operatorname{div} [ - \mathbf{I} (p_g - S_w p_c) ] + \quad = 0 \quad (15)$$

初值条件:

当  $t = 0$  时,

$$p_g = p_g^0, p_c = p_c^0, T = T^0, \mathbf{u} = \mathbf{u}^0 \quad (16)$$

定值边界:

$$\begin{cases} \text{在 } g \text{ 上: } p = \hat{p}_g, & \text{在 } c \text{ 上: } p_c = \hat{p}_c, \\ \text{在 } T \text{ 上: } T = \hat{T}, & \text{在 } u \text{ 上: } \mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \end{cases} \quad (17)$$

定流边界:

$$\begin{cases} \text{在 } g \text{ 上: } (v_g - v_{gw}) \cdot \mathbf{n} = q_{ga}, \\ \text{在 } c \text{ 上: } (v_w + v_{cw} + v_{gw}) \cdot \mathbf{n} = -c (v_w - v_w) + q_{gw} + q_w, \\ \text{在 } T \text{ 上: } -(v_w h_{\text{vap}} - \mathbf{D}_{\text{eff}} \operatorname{grad} T) \cdot \mathbf{n} = -c (T - T) + q_T, \end{cases} \quad (18)$$

其中  $\mathbf{n}$  是孔隙介质表面的单位法向量,  $T$  和  $v_{gw}$  分别为无穷远处温度和蒸汽密度,  $q_{ga}$ 、 $q_{gw}$ 、 $q_w$  和  $q_T$  分别为边界上的干空气流、汽流、液流和热流 外力边界条件为

$$\text{在 } u \text{ 上: } \mathbf{n} = \mathbf{t} \quad (19)$$

### 1.3 空间与时间离散

对控制方程用 Galerkin 法做空间离散得到如下系统方程:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{uu} \mathbf{u} + \mathbf{K}_{ug} \mathbf{p}_g + \mathbf{K}_{uc} \mathbf{p}_c + \mathbf{K}_{ut} T + \mathbf{F}_u = \mathbf{0}, \\ \mathbf{C}_{gg} \mathbf{p}_g + \mathbf{C}_{gc} \mathbf{p}_c + \mathbf{C}_{gt} T + \mathbf{C}_{gu} \mathbf{u} + \mathbf{K}_{gg} \mathbf{p}_g + \mathbf{K}_{gc} \mathbf{p}_c + \mathbf{K}_{gt} T + \mathbf{F}_g = \mathbf{0}, \\ \mathbf{C}_{cg} \mathbf{p}_g + \mathbf{C}_{cc} \mathbf{p}_c + \mathbf{C}_{ct} T + \mathbf{C}_{cu} \mathbf{u} + \mathbf{K}_{cg} \mathbf{p}_g + \mathbf{K}_{cc} \mathbf{p}_c + \mathbf{K}_{ct} T + \mathbf{F}_c = \mathbf{0}, \\ \mathbf{C}_{tg} \mathbf{p}_g + \mathbf{C}_{tc} \mathbf{p}_c + \mathbf{C}_{tt} T + \mathbf{C}_{tu} \mathbf{u} + \mathbf{K}_{tg} \mathbf{p}_g + \mathbf{K}_{tc} \mathbf{p}_c + \mathbf{K}_{tt} T + \mathbf{F}_t = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (20)$$

将其简写为下述形式的不对称非线性耦合矩阵方程

$$C(X)X + K(X)X + F(X) = \mathbf{0}, \quad (21)$$

其中  $X^T = \{p_g, p_c, T, u\}$ ,  $C(X)$ ,  $K(X)$  和  $F(X)$  由组装式(20)的相应子矩阵得出 对式(21)做时域上的有限差分离散得,

$$C(X_{n+1}) \frac{X_{n+1} - X_n}{t} + K(X_{n+1})X_{n+1} + F(X_{n+1}) = \mathbf{0} \quad (22)$$

## 2 非线性方程组的代数多格子解法

### 2.1 Newton\_Raphson 迭代过程

由于矩阵方程(21)是一组非线性方程,用Newton\_Raphson方法求解有

$$K(X_{n+1})X_{n+1} = F, \quad (23)$$

其中

$$K(X_{n+1}) = \left[ \frac{1}{X} C(X_{n+1})(X_{n+1} - X_n) + C(X_{n+1}) + \frac{1}{X} K(X_{n+1})X_{n+1} + K(X_{n+1}) + \frac{1}{X} F(X_{n+1}) \right]$$

$$F = - [ C(X_{n+1})(X_{n+1} - X_n) + K(X_{n+1})X_{n+1} - t + F(X_{n+1}) - t ], \quad (24)$$

是迭代次数,解  $X$  由下式得到

$$X_{n+1}^{+1} = X_{n+1} + X_{n+1} \quad (25)$$

### 2.2 代数多格子解法

设  $X_{n+1}$  为含有  $h$  个分量的未知向量 在代数多格子方法中,将这  $h$  个分量理解为  $h$  个网格结点上的待求值 并视其为第一层网格,记为  $\Omega_1$ ,这是最细的一层网格,其系数矩阵即为式(23)中的  $K$  按多格子原理,首先在细网格上求解原始方程,通过  $\Omega_1$  次松弛迭代减少误差函数的高频分量,得近似解  $((X))_{n+1}$ ,再进行网格粗化 设粗化矩阵为  $I_1^2$ ,相应的网格为  $\Omega_2$  在  $\Omega_2$  上求解误差方程

$$K_2^c((X^c))_{n+1} = F_2^c, K_2^c = I_1^2 K (I_1^2)^T, F_2^c = I_1^2 (F - K((X))_{n+1}), \quad (26)$$

以减少误差函数的低频分量,并修正  $\Omega_1$  上的解

$$((X)^{+1})_{n+1} = ((X))_{n+1} + (I_1^2)^T (X^c)_{n+1} \quad (27)$$

综上,代数多格子方法包括两部分,即网格粗化过程和多格子迭代过程 上述过程递归的用于式(26)、(27),充分利用粗、细网格对误差的磨光特性达到快速收敛的效果

#### 2.2.1 网格粗化

假设第  $s$  层粗网格  $\Omega_s (s = 1, 2, \dots, S)$  及相应的系数矩阵  $K_s^c = (k_{jl})_s^c$  已知,则更粗一层网格的  $\Omega_{s+1}$  及  $K_{s+1}^c$  由以下 6 步完成:

- 1) 令  $i := 1, F_s$  为空集,  $C_s$  由结点 1 构成
- 2)  $i := i + 1$ , 如  $i > h$  则转 5); 否则转 3);
- 3) 判别  $i$  是否属于  $C_s$ , 如是则转 2); 否则将点  $i$  加入  $F_s$ , 并且转 4)
- 4) 将不属于  $F_s$  而与点  $i$  邻接的点按邻接强度  $| (k_{il_1})_s^c | \quad | (k_{il_2})_s^c | \quad \dots \quad | (k_{il_c})_s^c |$  排序,

令

$$w = \frac{| (k_{il})_s^c |}{i \quad l \quad s}, \quad = \frac{| (k_{il})_s^c |}{i \quad i \quad C_s}$$

$$= \min \left\{ g: \begin{matrix} g \\ l_u = l \\ l_s \end{matrix} \mid (k_{jl})_s^c \mid w - \right\} \quad (0, 1]$$

将  $l_1, l_2, \dots, l$  加入  $C_s$ , 然后转 2)

5) 令  $l_{s+1} = C_s$

6) 系数矩阵  $K_{s+1}^c = I_s^{s+1} K_s^c (I_s^{s+1})^T, I_s^{s+1}, I_{s+1}^s$  分别为细网格到粗网格的限制算子和粗网格到细网格的插值算子, 并  $I_s^{s+1} = (I_{s+1}^s)^T$  若用  $V^s$  表示  $C_s$  上的网格函数空间, 则插值关系可由下式定义:

$$V_j^s = \begin{cases} V_j^{s+1} & j \in C_s, \\ (k_{jl})_s^c V_l^{s+1} \setminus (k_{jl})_s^c & j \in F_s \end{cases} \quad (28)$$

重复上述步骤, 当  $C$  和  $F$  的元素个数足够小时网格粗化即告结束, 记所得的网格总层数为  $S$

### 2.2.2 多格子迭代

如  $S = 1$ , 则用直接法或迭代法直接求解, 否则, 用 Gauss-Seidel 迭代法的多格子迭代 AMG( $S, C, l_1, l_2$ ) 分 4 步完成:

1) 在  $C$  上, 以  $((X)^0)_{n+1}$  为初值作  $l_1$  次迭代, 记所得结果为  $((X)^1)_{n+1}$ ;

2) 令  $(X^c)_{n+1} = 0, K_2^c = I_1^2 K^c (I_1^2)^T, F_2^c = I_1^2 (F - K((X)^1)_{n+1})$ , 对  $C_2$  上的误差方程  $K_2^c (X^c)_{n+1} = F_2^c$ ,  $l_2$  次引用 AMG( $S - 1, C, l_1, l_2$ ), 记所得结果为  $((X^c)_{n+1})$ ;

3) 粗网格校正, 取  $((X)^{+1})_{n+1} = ((X)^1)_{n+1} + (I_1^2)^T ((X^c)_{n+1})$ ;

4) 以  $((X)^{+1})_{n+1}$  为初值, 再作  $l_1$  次迭代

以上是一次引用 AMG( $S, C, l_1, l_2$ ) 的结果, 本文取 AMG( $S, 1, 1, 1$ )

## 3 算例

### 3.1 Liakopoulos 排水实验<sup>[6]</sup>

一个高 1 m 的土柱, 水自柱顶注入, 由底部自由排放, 当达到均匀流 ( $t = 0$ ) 时, 停止注水并开始实验。土的孔隙率  $\epsilon = 29.75\%$ 。假定当饱和度  $S = 0.91$  时, 饱和度、毛细压力 ( $p_c$ ) 和相对渗透性 ( $K_{r1}$ ) 之间关系为  $S = 1 - 1.972 \times 10^{-11} p_c^{2.4279}, K_{r1} = 1 - 2.207(1 - S)^{1.0121}$ 。计算时将柱分成 20 个相同尺寸的八节点等参元。在柱

两侧边:  $q_T = 0$ , 水平位移  $u_h = 0$ ; 柱顶:  $p_g = p_{atm}$  ( $p_{atm}$  为 1 个大气压)  $T = 293.15$  K; 柱底:  $p_g = p_{atm}$ , 当  $t > 150$  s 时,  $p_c = 0, T = 293.15$  K, 竖直位移  $u_v = u_h = 0$ 。土的弹性模量  $E = 1.3$  MPa, 泊松比  $\nu = 0.14$ 。在非饱和区假定气压为  $p_{atm}$ 。在曙光 1000 (A) 上计算了 3600 个时间步, 直接法时间为 2107 s, 本法为 1621 s, 计算结果的比较见图 1。

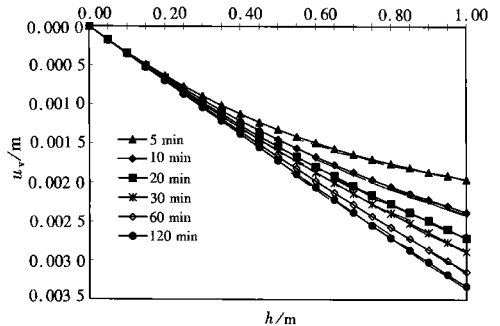


图 1 竖向位移 ( $u_v$ ) 沿高度分布 (实线) 与文[4]结果 (虚线) 的比较

312 不等温固结<sup>[4-5]</sup>

这是一个非饱和的热弹性固结例子# 土柱高 7 m 宽 2 m, 弹性模量  $E = 6 \text{ MPa}$ , 泊松比  $M = 0.14$ , 外表面荷载  $1000 \text{ Pa}$ , 表面温度由初始的  $293.15 \text{ K}$  升高  $50 \text{ K}$ , 其他数据与文[4] 相同# 计算时将柱分成 18 个八节点等参元# 柱侧面:  $q_T = 0; u_h = 0$ # 柱顶:  $T = 343.15 \text{ K}, p_g = p_{\text{atm}}, p_c = 0$  ( $p_c^*$  为相应于饱和度  $S = 0.192$  时的毛细压力); 柱底:  $q_T = 0, u_h = 0$ # 对开始的 10 个时间步, 步长为  $0.101 \text{ d}$ , 以后每进行 10 个时间步, 步长扩大 10 倍, 至  $10^7 \text{ d}$ # 在曙光 1000(A) 上用直接法求解时间为  $198 \text{ s}$ , 本法为  $137 \text{ s}$ , 计算结果比较见图 2、3#

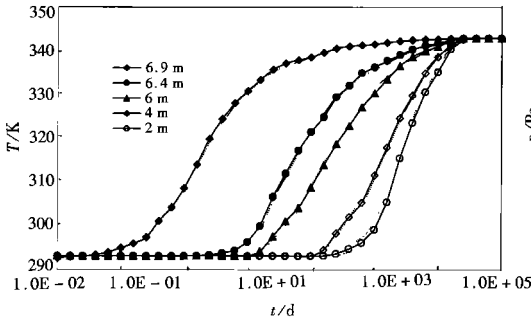


图 2 温度 ( $T$ ) 分布 (实线) 与文[4] 结果(虚线) 的比较

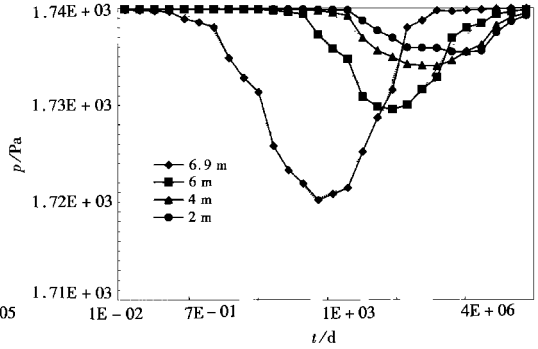


图 3 毛细压力 ( $p_c$ ) 分布(实线) 与文[4] 结果(虚线) 的比较

## 4 结 论

全耦合多相流问题具有比较高的计算复杂性, 寻求高效快速的数值解法是其重要研究方向# 本文将代数多格子方法用于分析可变形孔隙介质中热、水耦合的多相流非线性问题, 显示出较高的计算效率#

## [参 考 文 献]

- [1] 章根德. 固体-流体混合物连续介质理论及其在工程上的应用[J]. 力学进展, 1993, 23(1): 58) 67.
- [2] 刘超群. 多重网格法及其在计算流体力学中的应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 1995.
- [3] Webster R. An algebraic multigrid solver for Navier-Stokes problems[J]. Internat J Numer Methods Fluids, 1994, 18(6): 761) 780.
- [4] Gawin D, Baggio P, Schrefler B A. Coupled heat, water and gas flow in deformable porous media[J]. Internat J Numer Methods Fluids, 1995, 20(8): 969) 987.
- [5] Lewis R W, Schrefler B A. The Finite Element Methods in the Static and Dynamic Deformation and Consolidation of Porous Media[M]. New York: Wiley, 1998.
- [6] Liakopoulos A C. Transient flow through unsaturated porous media[D]. Ph D Thesis. Berkeley, CA: University of California, 1965.

( Department of Engineering Mechanics, Dalian University of  
Technology, Dalian 116024, P R China )

Abstract: An algebraic multigrid method is developed to solve fully coupled multiphase problem involving heat and mass transfer in deforming porous media. The mathematical model consists of balance equations of mass, linear momentum and energy and of the appropriate constitutive equations. The chosen macroscopic field variables are temperature, capillary pressure, gas pressure and displacement. The gas phase is considered to be an ideal gas composed of dry air and vapour, which are regarded as two miscible species. The model makes further use of a modified effective stress concept together with the capillary pressure relationship. Phase change is taken into account as well as heat transfer through conduction and convection and latent heat transfer (evaporation-condensation). Numerical examples are given to demonstrate the computing efficiency of this method.

Key words: multiphase flow; deforming porous media; phase change; grid; iteration