应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2002) 11_1183_05

AOR 方法的收敛性定理*

黄廷祝[1], 王广彬[2]

(1. 电子科技大学 应用数学学院, 成都 610054; 2. 上海大学数学系, 上海 200436)

(戴世强推荐)

摘要: 获得了著名的 AOR 方法收敛的实用条件和 H 矩阵的实用判别条件· 所得 AOR 方法的收敛条件便于实际计算应用, 适用范围不要求方程组系数矩阵对角占优, 适用于数学物理问题中广泛的矩阵类· 给出的数值例子表明了所得结果的实用性·

关 键 词: 迭代; 收敛性; AOR 方法; H 矩阵

中图分类号: O241.6; O151.26 文献标识码: A

1 引言与预备知识

在解大型方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

(其中 $\boldsymbol{A} \in C^{n,n}$ 非奇且具非零对角元, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b} \in C^n$, $\boldsymbol{x}$ 未知, 而 $\boldsymbol{b}$ 已知) 时, 由 Hadjidimos 于[1]中提出的 AOR 方法发挥了重要作用· 本文将对于系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 H 矩阵的一个子类时, 给出 AOR 方法收敛的实用充分条件, 所得结果不要求 $\boldsymbol{A}$ 为对角占优的·

设 $\boldsymbol{A}$ 分解为如下对角部分、严格下三角部分和严格上三角部分

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{T} - \boldsymbol{S},$$

并记

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{T}, \quad \boldsymbol{U} = \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{S}\cdot$$

设 $\omega, \sigma \in \mathbf{R}$, $\omega \neq 0$· 则 AOR 方法可写为

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{M}_{\sigma,\omega}\boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{d}, \quad k = 0, 1, \cdots, \boldsymbol{x}^0 \in C^n,$$

其中

$$\boldsymbol{M}_{\sigma,\omega} = (\boldsymbol{D} - \sigma\boldsymbol{T})^{-1}((1-\omega)\boldsymbol{D} + (\omega-\sigma)\boldsymbol{T} + \omega\boldsymbol{S}), \quad \boldsymbol{d} = \omega(\boldsymbol{D} - \sigma\boldsymbol{T})^{-1}\boldsymbol{b}\cdot$$

我们将用到如下记号:

$$N = \{1, 2, \cdots, n\}, \quad N(i) = N \setminus \{i\}, \quad i \in N\cdot$$

对任意 $\boldsymbol{A} \in C^{n,n}$, $i \in N$, $\alpha \in [0, 1]$, 定义

$$P_i(\boldsymbol{A}) = \sum_{j \in N(i)} |a_{ij}|, \; Q_i(\boldsymbol{A}) = \sum_{j \in N(i)} |a_{ji}|,$$

$$P_{i,\alpha}(\boldsymbol{A}) = \alpha P_i(\boldsymbol{A}) + (1-\alpha) Q_i(\boldsymbol{A})\cdot$$

* 收稿日期: 2000_07_18; 修订日期: 2002_06_28
基金项目: 四川省青年科技基金资助项目(Jsa1081)
作者简介: 黄廷祝(1964—), 男, 成都人, 教授, 院长, 博士, 博导(E_mail: tzhuang@uestc.edu.cn).

2 AOR 方法的收敛性

首先,给出H 矩阵的一个充分条件·

定理1 设 $\boldsymbol{A}$ 满足下列条件:

$$|a_{ii}| > P_{i,\alpha}(\boldsymbol{A}),\ i \in N,\ 对某\ \alpha \in [0,1]\cdot$$

则 $\boldsymbol{A}$ 为H 矩阵·

证明 由于 $\forall \varepsilon \geqslant 0$, $\boldsymbol{A} + \varepsilon\boldsymbol{I}$ 有

$$|a_{ii} + \varepsilon| \geqslant |a_{ii}| > P_{i,\alpha}(\boldsymbol{A}),\quad i \in N$$

于是由[2,3],知 $\boldsymbol{A} + \varepsilon\boldsymbol{I}$ 非奇· 因此据[2] 知 $\boldsymbol{A}$ 为H 矩阵·

引理[4] AOR 方法迭代阵 $\boldsymbol{M}_{\sigma,\omega}$ 的谱半径的上界

$$\rho(\boldsymbol{M}_{\sigma,\omega}) \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n}(|1-\omega| + |\omega-\sigma| P_{i,\alpha}(\boldsymbol{L}) + |\omega| P_{i,\alpha}(\boldsymbol{U}))/(1-|\sigma| P_{i,\alpha}(\boldsymbol{L}))$$

$$(当\ 1-|\sigma| P_{i,\alpha}(\boldsymbol{L}) > 0)\cdot \tag{1}$$

设 $\boldsymbol{A} \in C^{n,n}$, 称 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A}) = (m_{ij})$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的比较矩阵, 其中

$$m_{ij} = \begin{cases} |a_{ii}|, & i = j \\ -|a_{ij}|, & i \neq j, \end{cases} \qquad i, j \in N\cdot$$

由定理1 和引理, 可以给出 AOR 方法的收敛性定理·

定理2 设 $\boldsymbol{A}$ 满足:

$$|a_{ii}| > P_{i,\alpha}(\boldsymbol{A}),\ i \in N,\ 对某\ \alpha \in [0,1]\cdot$$

则当:

i) $0 \leqslant \sigma < s = 2/(1+\rho(M_{0,1}(M(\boldsymbol{A})))),$

$0 < \omega < \max\left\{t = 2/(1+\max_i P_{i,\alpha}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})),\ 2\sigma/(1+\rho(M_{\sigma,\sigma}))\right\}$, 或

ii) $\max_i(-\omega(1-P_{i,\alpha}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})) + 2\max(0,\omega-1))/2P_{i,\alpha}(\boldsymbol{L}) < \sigma < 0,\ 0 < \omega < t$, 或

iii) $t \leqslant \sigma < \min_i(\omega(1+P_{i,\alpha}(\boldsymbol{L}) - P_{i,\alpha}(\boldsymbol{U})) + 2\min(0,1-\omega))/2P_{i,\alpha}(\boldsymbol{L}),\ 0 < \omega < t$

时, AOR 方法收敛·

证明 容易证明若 σ 满足条件 i) ~ iii) 之一, 我们有

$$1-|\sigma| P_{i,\alpha}(\boldsymbol{L}) > 0,\quad i \in N\cdot$$

i) 由定理1 知 $\boldsymbol{A}$ 为H 矩阵, 即其比较矩阵 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A})$ 为 $\boldsymbol{M}$ 矩阵· 于是据[5] 可得, 当 $0 \leqslant \sigma < s$ 时,

$$\rho(\boldsymbol{M}_{\sigma,\sigma}) < 1\cdot$$

熟知当 $\sigma \neq 0$, 时

$$\boldsymbol{M}_{\sigma,\omega} = (1-\omega/\sigma)\boldsymbol{E} + \omega/\sigma \boldsymbol{M}_{\sigma,\sigma}\cdot$$

若

$$0 < \omega/\sigma < 2/(1+\rho(\boldsymbol{M}_{\sigma,\sigma})),$$

则根据外插定理[6], 可以推得 $\rho(\boldsymbol{M}_{\sigma,\omega}) < 1\cdot$

余下分析, 当

$$2\sigma/(1+\rho(M_{\sigma,\sigma})) \leqslant \omega < t,\ 0 \leqslant \sigma < s$$

的情形· 由于 $\sigma < 2\sigma/(1+\rho(\boldsymbol{M}_{\sigma,\sigma}))$, 因而

$$0 \leqslant \sigma < \omega < t\cdot$$

因为

$$0 \leqslant \sigma < \omega < 2/(1+P_{i,\alpha}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})) \Rightarrow |1-\omega| + (\omega-\sigma)P_{i,\alpha}(\boldsymbol{L}) + \omega P_{i,\alpha}(\boldsymbol{U}) < 1-\sigma P_{i,\alpha}(L),$$

所以由(1)我们有 $\rho(\boldsymbol{M}_{\sigma,\omega}) < 1$.

当 ii) 或 iii) 满足时根据 i) 可以类似地证明结论成立

例 1 设

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

由定理 2, 取 $\alpha = 2/3$, 知 $\boldsymbol{A}$ 为 H 矩阵(但 $\boldsymbol{A}$ 显然不是对角占优的),

$$P_{1,\alpha}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}) = \frac{5}{6}, \quad P_{2,\alpha}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}) = \frac{1}{6}, \quad t = \frac{12}{11},$$

收敛区域为:

1) $0 \leqslant \sigma < 4(2-\sqrt{3}), 0 < \omega < \max\left\{2\sigma/(1+\rho(\boldsymbol{M}_{\sigma,\sigma})), \frac{12}{11}\right\}$, 或

2) $0 < \omega \leqslant 1, -\frac{1}{2}\omega < \sigma < 0; 1 < \omega < \frac{12}{11}, \frac{11}{2}\omega - 6 < \sigma < 0$, 或

3) $0 < \omega \leqslant 1, \frac{12}{11} \leqslant \sigma < \frac{1}{2}\omega; 1 < \omega < \frac{12}{11}, \frac{12}{11} \leqslant \sigma < 6 - \frac{11}{2}\omega$.

若取 $\alpha = 1$, 定理 2 成为如下推论

推论 设 $\boldsymbol{A}$ 满足:

$$|a_{ii}| > P_i(\boldsymbol{A}), i \in N.$$

则 AOR 方法的收敛区域为:

i) $0 \leqslant \sigma < s = 2/(1+\rho(\boldsymbol{M}_{0,1}(\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A}))))$,

$0 < \omega < \max\left\{t = 2/(1+\max_i P_i(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}), 2\sigma/(1+\rho(\boldsymbol{M}_{\sigma,\sigma}))\right\}$, 或

ii) $\max_i(-\omega(1-P_i(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})) + 2\max(0, \omega-1))/2P_i(\boldsymbol{L}) < \sigma < 0, 0 < \omega < t$, 或

iii) $t \leqslant \sigma < \min_i(\omega(1+P_i(\boldsymbol{L}) - P_i(\boldsymbol{U})) + 2\min(0, 1-\omega))/2P_i(L), 0 < \omega < t$.

例 2 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

由推论我们有

$$P_1(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}) = \frac{1}{4}, \quad P_2(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}) = \frac{1}{2}, \quad t_1 = \frac{4}{3},$$

收敛区域为:

1) $0 \leqslant \sigma < \frac{4}{7}(4-\sqrt{2}), 0 < \omega < \max\left\{2\sigma/(1+\rho(\boldsymbol{M}_{\sigma,\sigma})), \frac{4}{3}\right\}$, 或

2) $0 < \omega \leqslant 1, -\frac{1}{2}\omega < \sigma < 0; 1 < \omega < \frac{4}{3}, \frac{3}{2}\omega - 2 < \sigma < 0$, 或

3) $0 < \omega \leqslant 1, \frac{4}{3} \leqslant \sigma < \frac{3}{2}\omega; 1 < \omega < \frac{4}{3}, \frac{4}{3} \leqslant \sigma < 2 - \frac{1}{2}\omega$.

对于例 2 中同样的矩阵, 取 $\alpha = \frac{1}{2}$, 由定理 2 我们有

$$P_{1,\alpha}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}) = \frac{3}{8}, \quad P_{2,\alpha}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}) = \frac{3}{8}, \quad t_2 = \frac{16}{11},$$

收敛区域为:

1) $0 \leqslant \sigma < \frac{4}{7}(4-\sqrt{2}), 0 < \omega < \max\left\{2\sigma/(1+\rho(M_{\sigma,\sigma})), \frac{16}{11}\right\}$, 或

2) $0 < \omega \leqslant 1, -\frac{5}{4}\omega < \sigma < 0; 1 < \omega < \frac{16}{11}, \frac{11}{4}\omega - 4 < \sigma < 0$, 或

3) $0 < \omega \leqslant 1, \frac{16}{11} \leqslant \sigma < 3\omega; 1 < \omega < \frac{16}{11}, \frac{16}{11} \leqslant \sigma < 4-\omega$•

图 1 中, 我们可以看出该区域(实线部分) 比由推论所得区域(虚线部分) 来得宽•

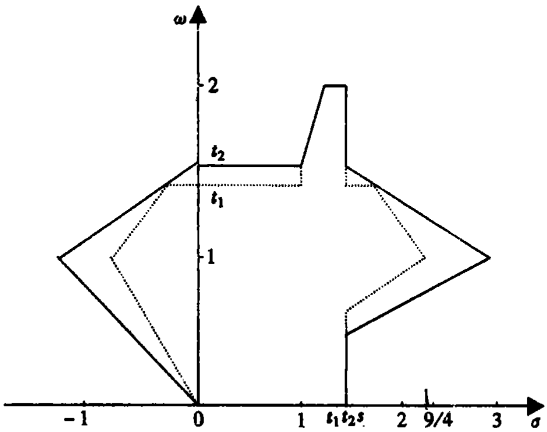

图 1

例 3[7] 一些数学物理问题, 将求解大型稀疏线性方程组 $AX = b$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -2 & 6 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 6 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 6 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & -2 & 6 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -2 & 6 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -2 & 6 & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}_{n\times n} \quad (\text{参见}[7]),$$

例如, 我们考虑 $n = 50$ 的情况• 易验证 A 满足定理 2 的条件(如取 $\alpha = 48/49$), 因而 A 为 H 矩阵• 若用估计

$$\rho(M_{0,1}(M(A))) \leqslant \|M_{0,1}(M(A))\|_\infty = \frac{1}{2},$$

由定理 2 有下面的收敛区域:

1) $0 \leqslant \sigma < \frac{4}{3}, 0 < \omega < \max\left\{\frac{392}{373}, 2\sigma/(2\sigma/1+\rho(M_{\sigma,\sigma}))\right\}$, 或

2) $0 < \omega \leqslant 1, -\frac{19}{288}\omega < \sigma < 0;$

$1 < \omega < \frac{392}{373}, \frac{373}{288}\omega - \frac{49}{36} < \sigma < 0$, 或

3) $0 < \omega \leqslant 1, \frac{392}{373} \leqslant \sigma < \frac{307}{288}\omega;$

$$1 < \omega < \frac{392}{373}, \frac{392}{373} \leqslant \sigma < \frac{49}{36} - \frac{85}{288}\omega.$$

[参 考 文 献]

[1] Hadjidimos A. Accelerated overrelaxation method[J]. Math Comp, 1978, **32**: 149—157.
[2] 游兆永. 非奇 M 矩阵[M]. 武汉: 华中工学院(讲义), 1983.
[3] 李正良, 钟守铭, 黄廷祝. 矩阵理论及应用[M]. 成都: 电子科技大学出版社, 1996.
[4] HUANG Ting_zhu, BAI Zhong_zhi. Bounds for the spectral radii of iterative matrices[J]. J Appl Sci, 1998, **16**(3): 269—275.
[5] Cvetkovic L J, Herceg D. Some sufficient conditions for convergence of AOR_method[A]. In: Milovanovic G. V. Ed Numerical Methods and Approximation Theory[C], Nis, 1984, 143—148.
[6] Hadjidimos A, Yeyios A. The principal of extrapolation in connection with the accelerated overrelaxation method[J]. Linear Algebra Appl, 1980, **30**: 115—128.
[7] 曹志浩. 线性方程组二级迭代法的收敛性[J]. 计算数学, 1995, **17**(2): 98—109.

Convergence Theorems for the AOR Method

HUANG Ting_zhu[1], WANG Guang_bin[2]
(School of Applied Mathematics, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054, P R China;
2. Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200436, P R China)

Abstract: Practical sufficient conditions for the convergence of the AOR method and a practical sufficient condition for H_matrices are studied. The obtained convergence conditions suited to matrices which need not to be diagonally dominant.

Key words: convergence; AOR method; iteration; H_matrice